But :
Présenter quelques problèmes sous la forme de ceux qui seront présenté lors de l'oral de maturité.
Vous aurez donc 40 minutes pour préparer chacun de ces problème, plus 20 minutes pour le présenter.

Problème 1 : Comment retrouver les coefficients d'une fonction périodique ?

Soit la fonction : $f(t) = 1.3 \cdot \cos(5 \cdot t) + 0.6 \cdot \sin(15 \cdot t)$

Supposons savoir qu'elle est périodique de période 2 π et supposons connaître les valeurs :

$f_j = f(t_j)$, pour $t_j = \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot (j-1)$; $j = 1..N$, $N = 2^7$.

On ignore les coefficients 1.3 ; 5 ; 0.6 et 15. Comment faire pour les retrouver ?

Puisqu'elle est périodique de période 2 π , on peut s'attendre à ce que :

$$f_j = A_0 + \sum_{k=1}^{M} A_k \cdot \cos(k \cdot t_j) + B_k \cdot \sin(k \cdot t_j) \text{, avec } M = \frac{N}{2} - 1 \text{ , } N = 2^7.$$

La théorie des transformées de Fourier justifie cette attente.

a) Écrivez dans SciLab une fonction "`coef = FourCoef(af)`" qui effectue les calculs suivants :

$M = \frac{N}{2} - 1$ où N = taille du vecteur `af`, `af` = vecteur des valeurs f_j.

$$A_0 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^{N} f_j \quad ; \quad A_k = \frac{2}{N} \cdot \sum_{j=1}^{N} f_j \cdot \cos(k \cdot t_j) \quad ; \quad B_k = \frac{2}{N} \cdot \sum_{j=1}^{N} f_j \cdot \sin(k \cdot t_j) \quad \text{pour} \quad k = 1..M \text{ .}$$

La fonction retourne la matrice `coef` formée de deux lignes de M+1 colonnes :
valeurs de la première ligne : $A_0, A_1, ..., A_M$,
valeurs de la deuxième ligne : $0, B_1, ..., B_M$.
Vous vérifierez plus loin que l'on obtient bien les coefficients attendus.

Dans une fonction `ex11()` :

b) Définissez un vecteur "`at`" formé des valeurs t_j définies ci-dessus, avec $N = 2^7$.

c) Définissez un vecteur "`fonc`" formé des valeurs f_j définies ci-dessus, avec $N = 2^7$.

d) Tracez le graphique de la fonction f en fonction de t, pour t variant de 0 à 2 π.

e) Appelez la fonction "`coef = FourCoef(fonc)`" qui calculera les coefficients.
Tracez dans en vert dans un graphique les valeurs de la première ligne de la matrice `coef` et tracez en rouge dans le même graphique les valeurs de la deuxième ligne de la matrice `coef`.

f) Vérifiez que vous retrouvez bien les coefficients qui définissent la fonction f.

Dans une fonction `ex12()` :

g) Avec l'instruction "`load('s10d_ex1a_data.bin', 'fonc')`" chargez dans la variable "`fonc`" les données qui vous ont été fournies, d'une fonction *fonc* périodique de période 2 π.

h) Tracez le graphique de la fonction *fonc* correspondante à ces données, t variant de 0 à 2 π.

i) Avec la même technique qu'au point e), retrouvez les coefficients qui définissent la fonction *fonc*.
Passez des valeurs f_j aux valeurs A_k, B_k s'appelle calculer la **Transformée de Fourier** de la fonction périodique définies par les valeurs f_j.
Les coefficients A_k, B_k s'appelle les **Coefficients de Fourier**.

Problème 2 : Matrices, système linéaire d'équations et approximation d'une fonction

Lors du laboratoire sur la décharge d'un condensateur, Arthur Freeman et Nathan Evan ont obtenu le 7 février 2019 les valeurs suivantes :

Tensions [V]	10	9,5	9,0	8,5	8,0	7,5	7,0	6,5	6,0	5,5
Temps [s]	0,00	5,70	11,48	18,31	25,31	32,65	41,02	49,46	59,02	69,51

Tensions [V]	5,0	4,5	4,0	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5
Temps [s]	81,17	93,74	108,22	124,31	143,71	166,70	195,34	233,25	288,88	394,31

On sait par la théorie que la décharge d'un condensateur se fait selon la loi : $U(t)=U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$.

La valeur de la résistance est connue et vaut R = 1000 [Ω].
Les deux grandeurs inconnues sont U_0 et C.

Pour rendre linéaire le problème de la détermination des inconnues, on prend le logarithme naturel.

$\log(U(t_j)) = \log(U_0) + \frac{-1}{R \cdot C} \cdot t_j \quad j=1..20$. t_j correspond aux 20 temps mesurés.

Les **commentaires** sont importants ! Commentez vos fonctions !
Écrivez en commentaire votre nom, prénom, la date et le sujet.

Écrivez une fonction `ex21()` qui :

a) détermine et affiche les valeurs de U_0 et de C.

b) trace les 20 points de mesure sur un graphique.

c) ajoute un titre et les légendes des axes x et y.

d) trace la fonction du modèle avec les coefficients déterminés en a) pour 100 points entre 0 et 400 secondes.

Supplément :

Faites les mêmes étapes que ci-dessus, en éliminant les 5 dernières mesures. On ne prend donc que les mesures des 15 temps correspondants aux tensions de 10 [V] à 3,0 [V].

Remarquez que la valeur de la capacité obtenue est assez différente de celle obtenue au point a).

Quelle est la valeur la plus fiable ? Pourquoi ? (C'est pas évident !)

Problème 3 : Matrices, système linéaire d'équations et approximation d'une fonction

Le but est d'approximer la fonction $f(x) = \sqrt{1{,}5 \cdot x + 2{,}5}$ sur l'intervalle $[-1 \ ; \ 1]$ par la fonction :
$F(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \cos((k-1) \cdot \arccos(x))$.

De cette manière, $\sqrt{y} \approx F\left(\frac{y-2{,}5}{1{,}5}\right)$, pour $y \in [1 \ ; \ 4]$.

Le nombre n est un paramètre que l'on fixera à 5 pour la suite, les nombres a_k sont à déterminer pour avoir une approximation optimale.
On veut tracer dans un graphique les points ayant servis à calculer l'approximation et la courbe de la fonction *F(x)*.
Ce n'est pas évident, mais $\cos((k-1) \cdot \arccos(x))$ est un polynôme, que l'on appelle polynôme de Tchebychev.

Les **commentaires** sont importants ! Commentez vos fonctions !
Écrivez en commentaire votre nom, prénom, la date et le sujet.

° Dans une fonction `ex31`() :

a) Définissez le vecteur colonne des 13 nombres : $x_j = -1 + \frac{j-1}{6}$ $\quad j = 1$ *à* 13 .

b) Définissez le vecteur colonne des 13 images : $y_j = f(x_j)$ $\quad j = 1$ *à* 13 .

c) Déterminez les nombres a_1 jusqu'à a_5 de telle sorte à satisfaire au mieux les 13 équations suivantes :
$a_1 + a_2 \cdot \cos(\arccos(x_j)) + a_3 \cdot \cos(2 \cdot \arccos(x_j)) + \ldots + a_5 \cdot \cos(4 \cdot \arccos(x_j)) = y_j$ $\quad j = 1$ *à* 13 .
Pour cela, il faudra définir la matrice correspondant à ce système d'équations.

d) Tracez les points $(x_j \ ; \ y_j)$ dans un graphique.

e) Tracez dans le même graphique la fonction :
$F(x) = a_1 + a_2 \cdot \cos(\arccos(x)) + a_3 \cdot \cos(2 \cdot \arccos(x_j)) + a_4 \cdot \cos(3 \cdot \arccos(x_j)) + a_5 \cdot \cos(4 \cdot \arccos(x))$
pour x prenant une centaine de valeurs entre –1 à 1.

f) Tracez dans un graphique la différence : $F(x_j) - y_j$ $\quad j = 1$ *à* 13 .
Remarquez que l'approximation est assez bonne.

g) Que faut-il changer au programme pour obtenir une meilleure approximation ?

Supplément :

h) Faites de même que les points c) à e), en remplaçant $\cos((k-1) \cdot \arccos(x))$ par x^{k-1} .
Dans les mêmes graphiques que précédemment, tracez la courbe de l'approximation et la courbe de la différence entre l'approximation et les données y_j.
Que constatez-vous ?