Contexte :
La série 2 sur les matrices montre comment résoudre des systèmes d'équations linéaires.
Cette série 4, utilise cette possibilité pour interpoler, approximer et déterminer les paramètres optimaux de divers modèles

1. Droite passant par 2 points donnés.
Soient les deux points : P1 = (–2 ; 1) et P2 = (3 ; 5)
En utilisant Scilab :
a) Déterminez le système à résoudre.
b) Déterminez l'équation de la droite passant par ces deux points.
c) Affichez les coefficients de l'équation de la droite. (a et b de y = a*x + b).
d) Affichez ces deux points dans un graphique.
e) Dans le même graphique, tracez la droite.
f) Afficher un titre et des légendes au graphique.

---

2. Droite passant au mieux 4 points donnés.
Soient les quatre points : P1 = (–2 ; 1) ; P2 = (3 ; 5) ; P3 = (8 ; 8) ; et P4 = (13 ; 13)
En utilisant Scilab :
a) Déterminez le système à résoudre.
b) Déterminez l'équation de la droite passant au mieux par ces points.
c) Affichez les coefficients de l'équation de la droite. (a et b de y = a*x + b).
d) Affichez ces points dans un graphique.
e) Dans le même graphique, tracez la droite.
f) Afficher un titre et des légendes au graphique.

---

3. Détermination d'un polynôme d'interpolation.
Soient les 5 points définis par : ax = [-2; -1; 0; 1; 2]; ay=sin(ax); // vecteurs colonnes !
On cherche les coefficients c_i, i = 0:4, qui satisfont :
$c_0 + c_1 \cdot ax(k) + c_2 \cdot ax(k)^2 + c_3 \cdot ax(k)^3 + c_4 \cdot ax(k)^4 = ay(k)$, pour k = 1:5
Cela forme donc un système de 5 équations aux 5 inconnues c_i.
! Écrivez sur une feuille le système sous forme matricielle !

Utilisez SciLab pour :
° entrée les données : `ax = [-2; -1; 0; 1; 2];    ay = sin(ax);` // une ligne
° écrire le système d'équation sous forme matricielle // 2 lignes (avec une boucle 'for ')
° résoudre le système pour déterminer les coefficients c_i // 1 ligne
° `plot(ax, ay, 'LineStyle', 'none', 'Marker', 'o');`
Pour afficher les points dans un graphique
° `xxx = linspace(min(ax), max(ax), 100);`
`yyy =` les images de `xxx` du polynôme de degré 4, ayant les coefficients c_0, c_1, c_2, c_3, c_4.
`plot(xxx, yyy);`
Pour dessiner le polynôme et vérifier qu'il passe bien par les points choisis.

tournez la feuille...

4. Polynôme passant au mieux par des points donnés.

Soient les points définis par : *ax = linspace(-2, 2, 21)' ;* *ay=sin(ax);* // vecteurs colonnes !
nDeg = 3;
On cherche les coefficients c_i, $i = 0:nDeg$, qui satisfont :
$c_0 + c_1 \cdot ax(k) + c_2 \cdot ax(k)^2 + ... + c_{nDeg} \cdot ax(k)^{nDeg} = ay(k)$, pour $k = 1:size(ax,1)$
Cela forme donc un système surdimensionné.

° Indiquez le nombre d'équations et le nombre d'inconnues.
° Écrivez sur une feuille le système sous forme matricielle !
° Ce système d'équations, a-t-il une solution exacte ?

Utilisez SciLab pour :

° entrée les données : `ax = linspace(-2, 2, 21);    ay = sin(ax);` // une ligne
° définir la variable *nDeg = 3;*
° écrire le système d'équation sous forme matricielle // 2 lignes (avec une boucle 'for ')
° résoudre le système pour déterminer les coefficients c_i // 1 ligne
° `plot(ax, ay, 'LineStyle', 'none', 'Marker', 'o');`
Pour afficher les points dans un graphique
° `xxx = linspace(min(ax), max(ax), 101);`
`yyy =` les images de `xxx` du polynôme de degré *nDeg*, ayant les coefficients $c_0, c_1, c_2, ..., c_{nDeg}$.
`plot(xxx, yyy);`
Pour dessiner le polynôme et vérifier qu'il passe bien proche les points choisis.

---

5. Approximation d'une fonction paire par une somme de cosinus.

Le but est d'approximer la fonction $f(x)=e^{-5\cdot x^2}$ sur l'intervalle $[-\pi \;;\; \pi]$ par la fonction :

$$Fourier(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \cos((k-1)\cdot x) .$$

Le nombre n est un paramètre que l'on fixera à 7 pour la suite, les nombres a_k sont à déterminer pour avoir une approximation optimale.
Une telle approximation s'appelle une approximation de Fourier.
On veut tracer dans un graphique les points ayant servis à calculer l'approximation, la courbe de la fonction *Fourier(x)* et dans un autre graphique la différence entre la fonction et son approximation.

° Écrivez la fonction *y=Fourier(coefs, x)* , où

i) coefs est le vecteur des coefficients, coef(k) = a_k
ii) x est un vecteur colonne en lequel il faut évaluer la fonction Fourier(x) définie ci-dessus
iii) y est le vecteur colonne des évaluations de la fonction Fourier(x)

° Dans une fonction ex5() :

a) Définissez un vecteur colonne de 15 valeurs réparties régulièrement dans l'intervalle $[-\pi \;;\; \pi]$.
b) Définissez les 15 images de ces 15 valeurs par la fonction $f(x)=e^{-5\cdot x^2}$.
c) Déterminez les nombres a_1 jusqu'à a_7 de telle sorte à satisfaire au mieux les 15 équations :
$a_1+a_2\cdot\cos(x_k)+a_3\cdot\cos(2\cdot x_k)+a_4\cdot\cos(3\cdot x_k)+...+a_7\cdot\cos(6\cdot x_k) = e^{-5\cdot x_k^2}$ pour
$x_k=-\pi+(k-1)\cdot\pi/7 \quad k=1 \text{ à } 15$ étant les valeurs définies en a).
e) Tracez les points $\left(x_k \;;\; e^{-5\cdot x_k^2}\right)$ dans un graphique.
f) Tracez dans le même graphique la fonction Fourier(coefs, x) pour x allant de $-\pi$ à π.
coefs est le vecteur des valeurs a_k déterminés au point c).
g) Tracez dans un autre graphique la différence entre la fonction $f(x)=e^{-5\cdot x^2}$ et son approximation de Fourier.
h) Que faut-il changer au programme si au lieu de 15 équations, on en voulait 75 ?

Cela améliore-t-il l'approximation ?