Le but de cette série est de s'exercer à effectuer des algorithmes de bases.

Exercice 1 : Somme connue, vérification.
Vous avez tous vus la somme : *Connue* = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100
Calculez cette somme à l'aide de Scilab et vérifiez qu'elle donne bien le résultat attendu.

En allant jusqu'à 1000, cela donne quoi ?

Exercice 2 : Sommes, curieuses coïncidences.
Effectuez les sommes suivantes :
$s_1 = 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + ... + 1/99$ (somme des inverses des entiers positifs de 2 chiffres)
$s_2 = 1/100 + 1/101 + 1/102 + ... + 1/999$ (somme des inverses des entiers positifs de 3 chiffres)
$s_3 = 1/1000 + 1/1001 + 1/1002 + ... + 1/9999$ (somme des inverses des entiers positifs de 4 chiffres)

Plus généralement : $s_n = \sum_{k=10^n}^{10^{n+1}-1} \frac{1}{k}$.
Que constatez-vous ?

Exercice 3 : Une somme convergente.
Effectuez les sommes suivantes :
$s_1 = 1/1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ... + 1/99 - 1/100$
$s_2 = 1/1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ... + 1/99 - 1/100 + 1/101 - 1/102 + ... - 1/998 + 1/999 - 1/1000$

Plus généralement : $s_n = \sum_{k=1}^{10^{n+1}-1} \frac{(-1)^{n+1}}{k}$.
Il y a plusieurs manières de programmer cette somme. Trouvez-en plusieurs.

Vers quelle valeur converge s_n lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 4 : Une somme calculable à la main !
Voici une somme :
$$simple = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+...+\frac{1}{99\cdot 100}$$
Calculez cette somme à l'aide de Scilab.
Avec une astuce, il est simple de calculer cette somme à la main ! Saurez-vous trouver l'astuce ?

Exercice 5 : Curieux produits.
Voici quelques produits curieux. Cherchez vers quels nombres ils tendent.
a) $p_1 = (1 - 1/2^2) \cdot (1 - 1/3^2) \cdot (1 - 1/4^2) \cdot ...$
b) $p_2 = (1 + 1/1) \cdot (1 - 1/2) \cdot (1 + 1/3) \cdot (1 - 1/4) \cdot (1 + 1/5) \cdot (1 - 1/6) \cdot ...$ spécial !
c) $p_3 = (1 - 1/3^2) \cdot (1 - 1/5^2) \cdot (1 - 1/7^2) \cdot (1 - 1/9^2) \cdot ...$
d) $p_4 = (1 - 2 / (2 \cdot 3)) \cdot (1 - 2 / (3 \cdot 4)) \cdot (1 - 2 / (4 \cdot 5)) \cdot (1 - 2 / (5 \cdot 6)) \cdot ...$
e) $p_5 = (1 - 2/(2^3 + 1)) \cdot (1 - 2/(3^3 + 1)) \cdot (1 - 2/(4^3 + 1)) \cdot (1 - 2/(5^3 + 1)) \cdot ...$
f) $p_6 = (1 - 1/3^2) \cdot (1 - 1/5^2) \cdot (1 - 1/7^2) \cdot (1 - 1/9^2) \cdot ...$

Exercice 6 : La suite de Fibonacci, la suite récursive de référence !
La suite de Fibonacci est définie comme suit :
Les deux premiers nombres de la suite sont : 1 et 1.
Les autres se calculent en faisant la somme des deux nombres précédents.
$f_0 = 1$; $f_1 = 1$; $f_2 = f_1 + f_0 = 2$; $f_3 = f_2 + f_1 = 3$; $f_4 = f_3 + f_2 = 5$; $f_5 = f_4 + f_3 = 8$ ...
Donc : $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$
Le début de la suite est : **1 1** 2 3 5 8 13 21 34 55
i) Calculez et affichez les nombres de la suite de Fibonacci.
ii) Calculez et affichez les rapports entre un nombre de la suite et son prédécesseur.
iii) Calculez et affichez la différence entre le résultat du point précédent et le nombre d'or.

Exercice 7 : Calculs itératifs de racines carrées.
Soit un nombre ***a***.
Définissez : *approx = a / 2*
Remplacez *approx* par : *(approx + a / approx) / 2*

i) Dans un premier temps, faites le remplacement ci-dessus 5 fois de suite.
Constatez que *approx* converge vers la racine carrée de ***a***.
ii) Écrivez une boucle ***while*** qui remplace *approx* par : *(approx + a / approx) / 2* tant que la différence entre *approx* et sa valeur précédente est plus grande que 10^{-15}.
Remarquez que la convergence est très rapide, vers racine carrée de ***a***.
iii) Que se passe-t-il si on remplace *approx* par : $(2 \cdot approx + a / approx^2) / 3$

Exercice 8 : Un curieux test.
Initialisez la variable ***e*** à 1. (***e*** = 1)
Dans une boucle ***while*** programmez la séquence suivante :
Tant que (1 + ***e*** *> 1) remplacez* ***e*** *par* ***e*** */ 2.*
Affichez les diverses valeurs de ***e*** obtenues.
° Le programme, sortira-t-il de la boucle ***while*** ?
° Que se passe-t-il si on remplace le test par : *Tant que (****e*** *> 0) remplacez* ***e*** *par* ***e*** */ 2* ?

Exercice 9* : Curiosité, supplément, chiffres des unités de la suite de Fibonacci.
La suite de Fibonacci a été calculée dans un exercice précédent.
Pouvez-vous donner le chiffre des unités du centième nombre de Fibonacci : f_{100} ?
Pouvez-vous donner le chiffre des unités du millième nombre de Fibonacci : $f_{1'000}$?
Pouvez-vous donner le chiffre de : $f_{10'000}$?
Pouvez-vous donner le chiffre de : $f_{100'000}$?
Pouvez-vous donner le chiffre de : $f_{1'000'000}$?

Exercice 10 supplément pour les avancés.**
Effectuez les sommes suivantes :
$s9_1 = 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 \cancel{+ 1/19} + ... + 1/88$
$s9_2 = 1/100 + 1/101 + 1/102 + ... + 1/888$
$s9_3 = 1/1000 + 1/1001 + 1/1002 + ... + 1/8888$
Dans chaque somme, tous les nombres entiers comportant le chiffre "9" sont supprimés
Plus généralement : $s9_n = \sum_{k \in E(n)} \frac{1}{k}$,
E(n) = l'ensemble des nombres entiers positifs de (n+1) chiffres ne comportant pas le chiffre 9.
E(0) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
E(1) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, .., 18, 20, 21, .., 28, 30, 31, .., 38, 40, 41, .., 87, 88}
Que constatez-vous ?