Contexte :
Soit une fonction "régulière" **fct** donnée sur l'intervalle [0, 1].
Par exemple la fonction fct(x) = sin(x * π / 2); ou la fonction fct(x) = sqrt(1 + 3* x);
Le but est de trouver le "meilleur" polynôme d'un degré donné qui approxime la fonction fct sur l'intervalle [0, 1].
C'est ce "meilleur" polynôme qui est pratiquement utilisé dans une calculatrice et dans un ordinateur.

Définissons :
aaa = 0;
bbb = 1;
nnn = 6; // = le degré du polynôme approximant la fonction

1. L'approximation sur des points régulièrement espacés.
Définissons :
ax = linspace(aaa, bbb, nnn+1)';
ay = fct(ax);
! Déterminez le polynôme de degré nnn passant par les points (ax, ay).
Tracez le graphique de la différence entre le polynôme et la fonction.
C'est souvent bon, mais on peut faire mieux

2. L'approximation sur des points de Chebyshev ou Tchebychev
Les polynômes de Chebyshev sont définis comme suit : $T_n(x)$ = cos(n*arccos(x)), dans [-1, 1].
Tapez : plot(ax, horner(chepol(5, 'x'), ax)); pour voir le 5e polynôme de Chebyshev.
Tracez le graphique d'autre polynôme de la même famille.
Qu'ont-ils de particulier ?
Les zéros de ces polynômes sont : ax(k+1) = cos((2*k+1)*%pi / (2*n)), k = 0:n-1;
Remarquez que c'est simple à vérifier !
Définissons :
kkk = 0:nnn;
ax = (aaa+bbb)/2 + (bbb - aaa)/2 * cos((2*kkk+1)*%pi / (2*nnn+2));
ax = ax'; // pour avoir un vecteur colonne
ay = fct(ax);
! Déterminez le polynôme de degré nnn passant par les points (ax, ay).
Tracez le graphique de la différence entre le polynôme et la fonction.
Remarquez que cette approximation est meilleure que la précédente.

3. L'approximation sur les extremums de Chebyshev
Les extremums des polynômes de Chebyshev sur [-1, 1] sont :
ax(k+1) = cos(k*%pi / n), k = 0:n;
Les deux extrêmes ax(1) = 1 et ax($) = -1. // ax($) = ax(length(ax))
Définissons :
kkk = 0:nnn+1;
ax = (aaa+bbb)/2 + (bbb - aaa)/2 * cos(kkk*%pi / (nnn+1));
ax = ax'; // pour avoir un vecteur colonne
ay = fct(ax);
! Déterminez le polynôme pol de degré nnn satisfaisant :
pol(ax(i)) - fct(ax(i)) = $(-1)^i$ * eee; i=1:nnn+2.
En plus des nnn+1 inconnues, eee est la nnn+2 ème inconnue.
Tracez le graphique de la différence entre le polynôme et la fonction.
Remarquez que cette approximation est encore meilleure que la précédente.

4. L'optimisation de Remez

Si l'approximation qui précède ne vous satisfait pas, il est encore possible de l'améliorer à l'aide de l'algorithme de Remez qui est le suivant :

i) Après avoir déterminé l'approximation sur les extremums de Chebyshev, déterminez les extremums de la différence entre le polynôme obtenu et la fonction fct.
Notez ax le vecteur des extremums. Les deux bornes font partie des extremums.

ii) Comme au point 3, déterminez le polynôme pol de degré nnn satisfaisant :
pol(ax(i)) - fct(ax(i)) = $(-1)^i$ * eee; i=1:nnn+2.
En plus des nnn+1 inconnues, eee est la nnn+2 ème inconnue.
Cela donnera une meilleure approximation, si cela est possible et si les limites de précision de calculs de l'ordinateur n'ont pas été atteintes.
eee correspondra à l'erreur maximale de l'approximation.

Libre à vous de l'écrire en SciLab et de le tester.
Il n'est décrit ici que **pour information**.
Parfois une approximation par fraction rationnelle est meilleure.
D'autres types d'approximations existent également, qui utilisent des fonctions usuelles ou des algorithmes itératifs.