Contexte :
Une matrice est un tableau de nombres.
Un vecteur s'écrit généralement comme une colonne de nombres.
L'objectif de ce qui suit est d'apprendre à traiter les matrices et vecteurs dans SciLab et de voir leur lien avec les systèmes linéaires d'équations.

1. Matrice, vecteur colonne et produit matriciel

Une matrice est un tableau de nombres. En voici une : $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Un vecteur colonne est une colonne nombres. En voici un : $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Par définition, le produit de la matrice A par le vecteur x est :

$$A\cdot x=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+a_{13}\cdot x_3 \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+a_{23}\cdot x_3 \\ a_{31}\cdot x_1+a_{32}\cdot x_2+a_{33}\cdot x_3 \end{pmatrix}$$

Attention, A est à gauche et x à droite, l'ordre compte !
C'est le "**produit ligne - colonne**".
Remarquez que le terme à droite de l'égalité est un vecteur colonne.
Nous allons voir ci-dessous que cette définition du produit matriciel est très pratique.

2. Système linéaire d'équations.

Soit le système d'équations :
$4*x_1 - 2*x_2 + 4*x_3 = 12$
$2*x_1 - 5*x_2 + 7*x_3 = 13$
$3*x_1 - 2*x_2 + 3*x_3 = 8$
On constate un tableau de nombres et un vecteur colonne.
Tapez : A=[4, -2, 4; 2, -5, 7; 3, -2, 3] // les virgules et les point-virgules sont importants !
Tapez : b=[12; 13; 8]
Constatez que la matrice A et le vecteur b ont des similitudes avec le système d'équations.
Tapez : x=[2; 1; 1] (Peut être tapé dans la console)
Tapez : A*x (Peut être tapé dans la console)
Constatez que vous obtenez le vecteur [10, 6, 7], qui est le terme de gauche du système dans lequel les valeurs 2; 1; 1 ont été données aux x_i.

Avec la définition du produit matricielle, remarquez que le système s'écrit : $A*x = b$;
Par analogie avec l'équation $a \cdot x = b$, on espère résoudre le système simplement.
On ne peut pas diviser par une matrice, mais souvent on peut calculer son inverse A^(-1).
Tapez : invA = A^(-1) // rarement utile !
Tapez : A * invA

Remarquez qu'on obtient presque la matrice : $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est la matrice identité.

I*x = x, pour tout vecteur x.

Il est rarement utile de calculer une matrice inverse.
Tapez : **x = A\b**
Vérifiez que vous avez obtenu la solution du système d'équation. Tapez A*x == b

Conclusions, avec SciLab, il est très simple de résoudre un système d'équations.

tournez la feuille...

3. Un plus gros système linéaire d'équations.

Résolvez le système d'équations :

$4*x_1 - 2*x_2 + 4*x_3 + 4*x_4 = 12$
$2*x_1 - 5*x_2 + 7*x_3 - 9*x_4 = 13$
$3*x_1 - 2*x_2 + 3*x_3 + 4*x_4 = 8$
$7*x_1 + 3*x_2 - 3*x_3 + 8*x_4 = 6$

Cela se fait en deux ou trois lignes.
Vérifiez votre résultat.

4. Le cadeau de SciLab, les systèmes sur dimensionnés

Soit le système d'équations : de 4 équations à 3 inconnues.

$4*x_1 - 2*x_2 + 4*x_3 = 12$
$2*x_1 - 5*x_2 + 7*x_3 = 13$
$3*x_1 - 2*x_2 + 3*x_3 = 8$
$2*x_1 - x_2 + 2*x_3 = 6$

AA = [A; 2, -1, 2] // c'est vite tapé !
b = [12; 13; 8; 6]
x = [1; 2; 3]
Tapez : AA*x pour vérifier que vous avez une solution de votre système d'équations.
Tapez : AA\b pour obtenir la solution du système.

Vu qu'il y a plus d'équations que d'inconnues, un tel système n'a pas toujours une solution.
Soit le système dans lequel b = [12; 13; 8; 6] a été remplacé par : bb = [12; 13; 8; 6.1]
Tapez : xx = AA\bb
SciLab vous retourne une solution, alors que AA*xx == bb est faux !

La solution retournée par SciLab est celle qui minimise ||AA*xx – bb||² .
|| ... || est la norme usuelle d'un vecteur.
Dans un certain sens, c'est la solution qui tente de satisfaire au mieux le système.
C'est aussi la solution de AA'*AA*xx = AA'*bb où AA' est la matrice transposée de AA,
Lorsqu'une solution existe, le minimum de ||AA*xx – bb||² vaut 0.

Avec SciLab, la norme d'un vecteur xx s'écrit : **norm**(xx).

5. Utilisation pour déterminer un polynôme d'interpolation

Soient les 5 points définis par : ax=[-2; -1; 0; 1; 2]; ay=sin(ax); // vecteurs colonnes !
On cherche les coefficients c_i, i= 0:4, qui satisfont :

$c_0 + c_1 \cdot ax(k) + c_2 \cdot ax(k)^2 + c_3 \cdot ax(k)^3 + c_4 \cdot ax(k)^4 = ay(k)$, pour k = 1:5

Cela forme donc un système de 5 équations aux 5 inconnues c_i.
! Écrivez sur une feuille le système sous forme matricielle !

Utilisez SciLab pour :

° entrée les données : `ax=[-2; -1; 0; 1; 2];   ay=sin(ax);` // une ligne
° écrire le système d'équation sous forme matricielle // 2 lignes
° résoudre le système pour déterminer les coefficients c_i // 1 ligne
° `plot(ax, ay, 'LineStyle', 'none', 'Marker', 'o');`
Pour afficher les points dans un graphique
°
```
xxx = linspace(min(ax), max(ax), 100);
plot(xxx, poly_f(coef, xxx));
```
Pour dessiner le polynôme et vérifier qu'il passe bien par les points choisis.
Pour ce dernier point, vous devez écrire la fonction `poly_f(coef, xxx))` qui calculera le polynôme de coefficients coef aux points du vecteur xxx. (Moins de 10 lignes, avec commentaires !)
On peut aussi dessiner le polynôme avec l'instruction :
```
plot(xxx, horner(poly(coef, 'x', 'c'), xxx)); // standard dans SciLab
```