Le but de ces exercices est d'utiliser SciLab, pour découvrir certaines curiosités numériques.

Exercice 1 : Précision des calculs.

Déterminer le nombre positif de la forme $e=\frac{1}{2^n}$ tel que :

$$\text{Si} \quad f=1+\frac{e}{2} \quad \text{et} \quad g=1+e \quad \text{alors} \quad f-1=0 \quad \text{mais} \quad g-1\neq 0 .$$

Il est clair que cela n'est pas possible en mathématique, mais en informatique, cela détermine avec quelle précision les calculs sont effectués.

Exercice 2 : Approximation du nombre d'or par la suite de Fibonacci.

Le nombre d'or est défini par : $\text{or}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618033989$.

C'est une des deux solutions de l'équation : $x^2=x+1$.

La suite de Fibonacci est définie comme suit :
On commence avec deux fois le chiffre 1, puis chaque nombre de la suite est la somme des deux précédents. Le début de la suite est : **1 1** 2 3 5 8 13 21 34 55

Notons f_n le $n^{\text{ème}}$ nombre de Fibonacci. $f_0 = 1$; $f_1 = 1$; $f_2 = 2$; $f_3 = 3$; $f_4 = 5$; $f_5 = 8$ ...
Chacun des points ci-dessous peut se faire dans une colonne.

- i) Calculez les nombres de la suite de Fibonacci.
- ii) Calculez les rapports entre un nombre de la suite et son prédécesseur.
- iii) Calculez la différence entre le résultat du point précédent et le nombre d'or.
- iv) Calculez le logarithme en base 10 (LOG()) du résultat précédent.
  Ce nombre représente le nombre de chiffres communs entre le nombre d'or et celui du point précédent.
- v) Affichez un graphique de ce logarithme en fonction de "n", qui représente l'évolution.
  Constatez que l'on obtient quasiment une droite.
- vi) Que se passe-t-il si on modifie un ou les deux chiffres du début de la suite de Fibonacci (**1 1**) ?

Exercice 3 : Chiffres des unités de la suite de Fibonacci.

La suite de Fibonacci a été calculée précédemment.
Pouvez-vous donner le chiffre des unités du centième nombre de Fibonacci : F_{100} ?
Pouvez-vous donner le chiffre des unités du millième nombre de Fibonacci : $F_{1'000}$?
Pouvez-vous donner le chiffre de : $F_{10'000}$?
Pouvez-vous donner le chiffre de : $F_{100'000}$?
Pouvez-vous donner le chiffre de : $F_{1'000'000}$?

Exercice 4 : Les erreurs d'arrondis, qui font diverger une suite convergente.

Le nombre : $r=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\approx-0{,}618033989$ est l'autre solution de l'équation : $x^2=x+1$.

Donc : $r^2=r+1$ et aussi $r^3=r^2+r$ et $r^4=r^3+r^2$ et $r^5=r^4+r^3$ etc.

Expliquez pourquoi !

Définissez la suite suivante : ar(1) = 1 ; ar(2) = r ; ar(n) = ar(n-1) + ar(n-2) pour n ≥ 3.
Justifier pourquoi on devrait avoir ar(n) = r^{n-1} .

La suite devrait tendre vers 0. Au début, c'est bien ce que l'on observe, mais pas après une cinquantaine d'itérations, la tendance s'inverse.
Tentez d'expliquer pourquoi, en vous basant sur un des exercices précédent.
L'explication précise n'est pas simple.

Exercice 5 : Calcul numérique de la racine carrée.
Le but est de calculer la racine carrée d'un nombre, en utilisant uniquement les 4 opérations + - * /

Prenons l'exemple de 7. Pour information, $\sqrt{7}=2{,}645751311...$.

Si on prend une approximation r_1 de la racine cherchée plus petit que la racine, alors $\frac{7}{r_1}$ sera plus grand que la racine cherchée et réciproquement.
Donc r_2 = la moyenne des deux sera une meilleure approximation.

Exemple :

$r_1 = 2{,}6$ $\frac{7}{r_1}=2{,}692307...$ et la moyenne $r_2 = 2{,}6461...$ est une bien meilleure approximation.

$r_2 = 2{,}6461...$ $\frac{7}{r_2}=2{,}6453488...$ et la moyenne $r_3 = 2{,}6465751342...$ est une meilleure approximation.

Rapidement on obtient la meilleure approximation numérique possible.
Écrivez une fonction qui calcule la racine carrée d'un nombre donné, en utilisant que les 4 opérations et des itérations (for ou while).
Tracez le graphique du Log_{10} de l'erreur en fonction du nombre d'itération.
On dit que la convergence est **quadratique**, car l'erreur d'une itération est environ égale au carré de l'erreur de l'itération précédente.

Exercice 6 : Calcul numérique de la racine cubique.
Le but est de calculer la racine cubique d'un nombre, en utilisant uniquement les 4 opérations + - * / et des itérations.

Imaginer une méthode similaire à celle de l'exercice 5, pour calculer la racine cubique d'un nombre.