Le but de la théorie qui suit est de montrer comment résoudre numériquement une équation différentielle $y(t)' = f(t, y(t))$, avec condition initiale $y(0) = y_0$.

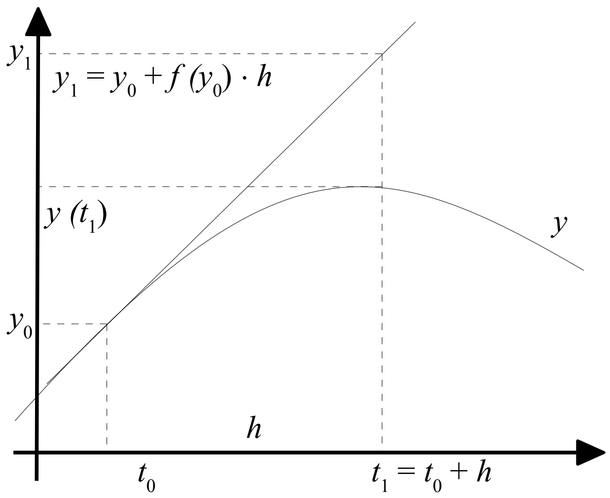
Pour simplifier, nous limiterons la théorie à l'équation : $\boldsymbol{y(t)' = f(y(t))}$, $\boldsymbol{y(0) = y_0}$

Notons $y(t)$ la solution exacte de notre équation différentielle.
T = un temps à atteindre
h = le pas d'intégration. On le note également Δt .
$N = \dfrac{T}{h}$ = le nombre de pas d'intégration. Donc $\boxed{T = N \cdot h}$
$t_k = k \cdot h$ $t_0 = 0$ $y(t_0) = y_0$

La méthode d'Euler

On sait que : $\dfrac{y(t_k+h)-y(t_k)}{h} \approx y'(t_k) = f(y(t_k))$.
On en déduit que : $y(t_k+h) \approx y(t_k) + f(y(t_k)) \cdot h$
Définissons : $\boxed{y_1 = y_0 + f(y_0) \cdot h}$
C'est **la méthode d'Euler** sur un pas.

Illustration graphique ce la méthode d'Euler :



Étudions sa précision :

$$y_1 = y(t_0) + y'(t_0) \cdot h$$

$$y(t_0+h) = y(t_0) + y'(t_0) \cdot h + \frac{1}{2} \cdot y''(\xi) \cdot h^2 \quad \text{où} \quad \xi \in [t_0; t_0+h]$$

Donc, la différence entre la méthode numérique et la solution exacte pour un pas vaut :

$$\boxed{y_1 - y(t_1) = -\frac{1}{2} \cdot y''(\xi) \cdot h^2}$$

Sur un pas, l'erreur est proportionnelle au carré du pas : $\boldsymbol{h^2}$.

En supposant que $y''(\xi)$ ne change pas trop à chaque pas, l'erreur en N pas sera proportionnelle à $N \cdot h^2 = N \cdot h \cdot h = T \cdot h$

Conclusion :
L'erreur de la méthode numérique d'Euler sera proportionnelle à $T \cdot h$.

Pour diminuer l'erreur de moitié, il faut diminuer le pas h de moitié, donc doubler le nombre N de pas !

La méthode de Runge

On sait que : $\dfrac{y(t_k+h)-y(t_k)}{h} \approx y'(t_k+\frac{h}{2}) = f(y(t_k+\frac{h}{2}))$ est une meilleure approximation.

On en déduit que : $y(t_k+h) \approx y(t_k) + f(y(t_k+\frac{h}{2}))\cdot h$

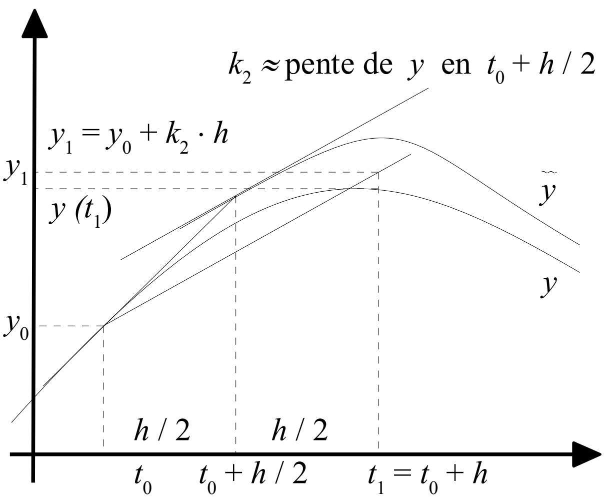
Mais $y\left(t_k+\dfrac{h}{2}\right)$ n'est pas connu. On l'approxime par : $y(t_k+\frac{h}{2}) \approx y_k + f(y_k)\cdot\frac{h}{2}$

Définissons :

$$\boxed{\begin{array}{c} k_1=f(y_0) \\ k_2=f\left(y_0+k_1\cdot\dfrac{h}{2}\right) \\ y_1 = y_0 + k_2\cdot h \end{array}}$$

C'est **la méthode de Runge** sur un pas.

Illustration graphique ce la méthode de Runge :



Étudions sa précision :

$$y_1(t_0+h) = y(t_0) + y_1'(t_0)\cdot h+\frac{1}{2}\cdot y_1''(t_0)\cdot h^2+\frac{1}{6}\cdot y_1'''(\tilde{\xi})\cdot h^3 \quad \text{où} \quad \tilde{\xi} \in [t_0;t_0+h]$$

$$y(t_0+h) = y(t_0) + y'(t_0)\cdot h+\frac{1}{2}\cdot y''(t_0)\cdot h^2+\frac{1}{6}\cdot y'''(\xi)\cdot h^3 \quad \text{où} \quad \xi \in [t_0;t_0+h]$$

$y_1(h) = y(t_0) + f\left(y_0+f(y_0)\cdot\frac{h}{2}\right)\cdot h$, donc $y_1'(t_0) = f(y_0) = y'(t_0)$

Montrez qu'on a également : $y_1''(t_0) = y''(t_0)$

Donc, la différence entre la méthode numérique et la solution exacte pour un pas vaut :

$$\boxed{y_1-y(t_1) = \frac{1}{6}\cdot\left(y_1'''(\tilde{\xi})-y'''(\xi)\right)\cdot h^3}$$

Sur un pas, l'erreur est proportionnelle au cube du pas : h^3 .

En supposant que $y'''(\xi)$ ne change pas trop à chaque pas, l'erreur en N pas sera proportionnelle à $N \cdot h^3 = N \cdot h \cdot h \cdot h = T \cdot h^2$

Conclusion :

$\boxed{\text{L'erreur de la méthode numérique de Runge sera proportionnelle à } T \cdot h^2 .}$

Pour diminuer l'erreur de quatre fois, il faut diminuer le pas h de moitié, donc doubler le nombre N de pas !

Généralisations

En allant dans des méthodes plus sophistiquées, on peut s'arranger pour que l'erreur de la méthode numérique soit proportionnelle à $T \cdot h^p$ où "p" est **l'ordre** de la méthode.

Quelques méthodes pratiques pour résoudre $y(t)' = f(t, y(t))$, $y(0) = y_0$

La méthode de Runge d'ordre 2

$$k_1 = f(t_0, y_0)$$
$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + k_1 \cdot \frac{h}{2}\right)$$
$$y_1 = y_0 + k_2 \cdot h$$

La méthode de Runge d'ordre 3

$$k_1 = f(t_0, y_0)$$
$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + k_1 \cdot \frac{h}{2}\right)$$
$$k_3 = f(t_0 + h, y_0 + k_2 \cdot h)$$
$$k_4 = f(t_0 + h, y_0 + k_3 \cdot h)$$
$$y_1 = y_0 + \left(\frac{1}{6} \cdot k_1 + \frac{2}{3} \cdot k_2 + \frac{1}{6} \cdot k_4\right) \cdot h$$

La méthode de Heun d'ordre 3

$$k_1 = f(t_0, y_0)$$
$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{3}, y_0 + k_1 \cdot \frac{h}{3}\right)$$
$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{2h}{3}, y_0 + k_2 \cdot \frac{2h}{3}\right)$$
$$y_1 = y_0 + (k_1 + 3 \cdot k_3) \cdot \frac{h}{4}$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

$$k_1 = f(t_0, y_0)$$
$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + k_1 \cdot \frac{h}{2}\right)$$
$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + k_2 \cdot \frac{h}{2}\right)$$
$$k_4 = f(t_0 + h, y_0 + k_3 \cdot h)$$
$$y_1 = y_0 + (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \cdot \frac{h}{6}$$

Une des meilleures méthode existante est la méthode de Dormand & Prince d'ordre 4 & 5.
Son étude dépasse le cadre de ce cours.

Référence :

E. Hairer & G. Wanner (1996) :
Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer Series in Comput. Math., vol. 14, 2nd edition. [MA 65/245]

http://www.unige.ch/~hairer/poly/poly.pdf Chapitre III, Équations Différentielles Ordinaires