1. Le tire avec frottement de l'air. c.f. ODE_07_o2_d4_Trajectoire_avec_vent.sce

On tire un objet de masse m = 5,00 [kg] depuis la position (0, 0, 0) avec une vitesse initiale $\vec{V}_0=(V_{0x}\ ;\ 0\ ;\ V_{0z})$. Il y a un vent constant de vitesse : $\vec{V}_{vent}=(V_{vent\,x}\ ;\ 0\ ;\ V_{vent\,z})$.

Donc la vitesse relative de l'objet par rapport au vent est :

$\vec{V}_{rel}=\vec{V}-\vec{V}_{vent}=(V_x-V_{vent\,x}\ ;\ 0\ ;\ V_z-V_{vent\,z})$, où $\vec{V}$ est la vitesse de l'objet en fonction du temps.

L'objet est soumit à la force de la pesanteur $\vec{F}_P=m\cdot\vec{g}$ et à une force de frottement proportionnelle à un coefficient "mu" fois le carré de sa vitesse relative au vent, dans le sens opposé à cette vitesse relative. $\vec{F}_{frot}=-\mathrm{mu}\cdot V_{rel}\cdot\vec{V}_{rel}$ $\quad V_{rel}=\sqrt{V_{rel\,x}^2+V_{rel\,z}^2}$

Il y a donc 4 variables qui sont : (x, V_x, z, V_z).

Les lois de la physique permettent décrire l'équation différentielle d'évolution de cet objet.

Les conditions initiales sont : $x_0=0 \quad z_0=0 \quad \vec{V}_0=(V_{0x}\ ;\ 0\ ;\ V_{0z})$ à préciser plus loin.

g = 9.81 [m/s^2].

Donnez vos réponses avec **3 ou 4 chiffres significatifs**.

1.1 Dans le cas où il n'y a pas de frottement, la trajectoire est facile à déterminer.

1.1a Dans ce cas, déterminez littéralement les équations du mouvement $x(t)$, $y(t)$, $V_x(t)$, $V_z(t)$, qui dépendront bien sûr de la vitesse initiale $(V_{0x}\ ;\ 0\ ;\ V_{0z})$.

1.2 Dans Scilab, en utilisant les routines que vous possédez, programmez la résolution de ce système d' équations différentielles avec une méthode d'ordre 2 ou 4, pour répondre aux points suivants :

!!! Indiquez votre démarche, **justifiez**.

1.2a Recopiez sur votre feuille le contenu de la fonction "function z = f(x,y)", jusqu'au "endfunction".

1.2b Posez le coefficient de frottement "mu" égal à zéro et $V_{0x}=10;\quad V_{0z}=15$ (unités [m/s]).
Comparez les résultats de vos simulations numériques avec la théorie.
Indiquez à 20 cm près l'endroit où l'objet retouchera le sol.
Indiquez également 0,02 secondes près quand il touchera le sol.

1.2c Posez le coefficient de frottement "mu" égal à 0.0500 [N · s^2 / m^2], la vitesse du vent égale à $V_{vent\,x}=-9;\quad V_{vent\,z}=0$ et $V_{0x}=10;\quad V_{0z}=15$ (unités [m/s]).
Indiquez à 20 cm près l'endroit où l'objet retouchera le sol.
Indiquez également 0,02 secondes près quand il touchera le sol.

1.2d Posez le coefficient de frottement "mu" égal à 0.0500 [N · s^2 / m^2] et la vitesse initiale : $V_{0x}=10;\quad V_{0z}=15$.
Déterminez une vitesse de vent à 1% près de tel sorte que l'objet retombe sur sont point de départ.

(3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 points) 30 minutes

2. L'oscillateur harmonique amorti. c.f. ODE_06_o2_d2_Oscillateur_harmonique_amorti.sce

Un corps de masse m = 1,00 [kg] est suspendu à un ressort ayant une force de rappel k = 1,00 [N/m]. Le corps subit une force de frottement proportionnelle à sa vitesse. Il subit aussi une force périodique qui entretient le mouvement. En résumé, il subit les trois forces suivantes :

$F_{rappel} = -k\cdot x$ où k = 1,00 [N/m]

$F_{frot} = -f\cdot V$ où f = 0,0500 [N·s/m] ou bien f = 0 [N·s/m] ou bien f = 1,00 [N·s/m].

$F_{entretient}(t) = A\cdot\sin(\omega\cdot t)$ où A = 0,100 [N] ou bien A = 0 [N] et ω est un paramètre variable.

x = la position de la masse, V = sa vitesse.

Conditions initiales : V_0 = 0 [m/s] et x_0 = un paramètre variable.

2.1 Faites un **dessin,** en indiquant votre choix du sens positif de l'axe.

2.2 A partir de la loi fondamental de la dynamique (3ème loi de Newton), écrivez l'équation différentielle qui décrit l'évolution de la vitesse et de la position de l'objet en fonction du temps.

2.3 Dans SciLab, en utilisant les routines que vous possédez, programmez la résolution de cette équation différentielle avec une méthode d'ordre 2 ou 4 pour répondre aux points suivants :

!!! Indiquez votre démarche, **justifiez**.

Donnez des réponses avec une précision d'au moins 1%, avec **3 ou 4 chiffres significatifs**.

2.3a Recopiez sur votre feuille le contenu de la fonction "function z = f(x,y)", jusqu'au "endfunction".

2.3b Dans le cas où f = 0 [N·s/m] et A = 0 [N], testez que la solution de l'équation différentielle est :

$$x(t) = x_0\cdot\cos(\omega_0\cdot t) \quad \text{où} \quad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} .$$

2.3c Dans le cas où f = 0,0500 [N·s/m], x_0 = 1,00 [m] et A = 0 [N], quelles sont les amplitudes maximums vers le bas et vers le haut des trois premières oscillations ?

2.3d Dans le cas où f = 0,0500 [N·s/m], A = 0,100 [N] et ω compris entre 0,5 et 2 [1/s], vérifiez que les amplitudes des oscillations se stabilisent indépendamment de la valeur de x_0.

Déterminez pour quelle valeur de ω ces amplitudes se stabilisent à une valeur maximale.

2.4 Dans le cas où f = 1,00 [N·s/m], A = 0 [N] et x_0 = 1,00 [m], pour un temps variant de 0 à 10 secondes, recopiez le graphique de la position du corps en fonction du temps, en prenant au moins une demi-page.

---

3. La trajectoire d'une étoile filante. c.f. ODE_08_o4_d4_Trajectoire_etoile_filante.sce

Un astéroïde de masse m = 350 [kg] s'approche de la Terre pour lui tomber dessus en se déplaçant dans un plan (x ; z). Il subit deux forces : $\vec{F}_G=-\dfrac{G\cdot m\cdot M_T}{d^3}\cdot\vec{r}$ et $\vec{F}_{frot}=-k_{frot}\cdot V\cdot\vec{V}$

où : $\vec{r}=<x\ ;\ z>$ représente la position de l'astéroïde, $\vec{V}=<V_x\ ;\ V_z>$ sa vitesse,

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ ;\ G=6.6726\cdot 10^{-11}\left[\frac{N\cdot kg^2}{m^2}\right]\ ;\ k_{frot}=2\cdot 10^{-7}\left[\frac{N\cdot s^2}{m^2}\right]$$

$M_T=5.9742\cdot 10^{24}[kg]$. Le rayon de la Terre vaut $R_T=6.371\cdot 10^6[m]$.

3.1 Faites un **dessin,** en indiquant votre choix du sens positif de l'axe.

3.2 A partir de la loi fondamental de la dynamique (3ème loi de Newton), écrivez l'équation différentielle qui décrit l'évolution de la vitesse et de la position de l'objet en fonction du temps.

3.3 Dans Scilab, en utilisant les routines que vous possédez, programmez la résolution de ce système d' équations différentielles avec **une méthode d'ordre 4**, pour répondre aux points suivants :

!!! Indiquez votre démarche, **justifiez**.

3.3a Recopier sur votre feuille le contenu de la fonction "function z = f(x,y)", jusqu'au "endfunction".

3.4 Pour une condition initiale de $\vec{r}_0=<x_0\ ;\ z_0>=<0\ ;\ 3\cdot R_T>$ et $\vec{V}_0=<3000\ ;\ 0>[m/s]$ et un temps variant de 0 à 33'000 secondes, dessinez la trajectoire de cet astéroïde, sur au moins une demi-page.

4. **Le problème à deux corps.** c.f. ODE_10_o4_d8_Probleme_a_deux_corps.sce

Deux corps de masse $3 \cdot 10^{14} [kg]$ chacun sont dans l'espace et ne subissent que l'effet gravitationnelle de l'un sur l'autre. Ils sont isolés de toute autre influence.
Chaque corps ne se déplace que dans un plan (x ; y), la coordonnée z restant fixe.
Il y a donc 8 variables : x_1, v_{x1}, y_1, v_{y1}, x_2, v_{x2}, y_2, v_{y2}.
Le premier corps subit la force : $\vec{F}_1 = -coef \cdot \vec{r}_1$.
Le deuxième corps subit la force : $\vec{F}_2 = -coef \cdot \vec{r}_2$.
Avec : $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; $coef = \dfrac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{d^3}$; $G = 6.6726 \cdot 10^{-11} \left[\dfrac{N \cdot kg^2}{m^2} \right]$;
$\vec{r}_1 = <(x_1 - x_2) \;;\; (y_1 - y_2)>$ et $\vec{r}_2 = <(x_2 - x_1) \;;\; (y_2 - y_1)>$.
Les conditions initiales sont :
$x_1 = -100$ [m] ; $v_{x1} = 1$ [m/s] ; $y_1 = 0$ [m] ; $v_{y1} = 6$ [m/s]
$x_2 = 100$ [m] ; $v_{x2} = 0$ [m/s] ; $y_2 = 0$ [m] ; $v_{y2} = -6$[m/s];

4.1 Faites un **dessin,** en indiquant votre choix du sens positif des axes.
4.2 Les lois de la physique permettent décrire l'équation différentielle d'évolution de cet objet. Ecrivez ces équations différentielles.

4.3 Dans Scilab, en utilisant les routines que vous possédez, programmez la résolution de ce système d' équations différentielles avec **une méthode d'ordre 4**, pour répondre aux points suivants :
!!! Indiquez votre démarche, **justifiez**.
4.3a Recopiez sur votre feuille le contenu de la fonction "function z = f(x,y)", jusqu'au "endfunction".
4.4 Pour un temps variant de 0 à 125 secondes, recopiez la trajectoire de chacun des deux corps, sur un graphique prenant au moins une demi-page. Dessinez chaque trajectoire d'une couleur différente.
