

Exercice d'intégration en utilisant des équations différentielles.

1. Il est possible d'utiliser les routines de résolution d'équation différentielle pour calculer numériquement des intégrales.

$$\text{Si } G(x) = \int_a^x \frac{\sin(t)}{t} dt, \text{ alors } G'(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ avec } G(a)=0.$$

Ceci peut être vu comme une équation différentielle particulièrement simple, car la dérivée de la fonction cherchée ne dépend que de x et pas de la fonction elle-même.

$$y'(x) = f(x, y) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ avec } y(a)=0, \text{ où } y(x)=G(x).$$

- 1.1** Faites un **dessin**, de la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$.
- 1.2** Dans SciLab, en utilisant les routines que vous possédez, programmez la résolution de cette équation différentielle avec une méthode d'ordre 2 ou 4 pour répondre aux questions suivantes :
!!! Indiquez votre démarche, **justifiez**.
Donnez des réponses avec une précision de 1%, avec **3 ou 4 chiffres significatifs**.
- 1.2a** Quelle est la valeur de $G(2) = \int_0^2 \frac{\sin(t)}{t} dt$?
- 1.2b** Quelle est la valeur maximale de $G(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$?
- 1.2c** Quelle est la valeur de la limite : $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$?
- 1.3** Faites un **dessin**, de la fonction $G(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$, pour x variant de 0 à 20.

(3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 points) 30 minutes

2. Il est toujours bon de tester de nouveaux algorithmes sur des problèmes résolubles analytiquement. Faites-le pour le problème suivant :
- Soit la fonction $G(x) = \int_0^x 2 \cdot t \cdot \sin(t^2) dt$.
- 2.1** Faites un **dessin**, de la fonction $x \mapsto 2 \cdot x \cdot \sin(x^2)$.
- 2.2** Calculez analytiquement l'intégrale pour déterminer l'expression algébrique définissant $G(x)$.
- 2.3** Dans SciLab, en utilisant les routines que vous possédez, programmez la résolution de cette équation différentielle avec une méthode d'ordre 2 ou 4 pour répondre aux questions suivantes :
!!! Indiquez votre démarche, **justifiez**.
Donnez des réponses avec une précision de 1%, avec **3 ou 4 chiffres significatifs**.
- 2.3a** Quelle est la valeur de $G(2)$?
- 2.3b** Quelle est la valeur maximale de $G(x)$?
- 2.3c** Comparez la fonction obtenue numériquement avec celle obtenue analytiquement.
- 2.4** Faites un **dessin**, de ces deux fonctions, pour x variant de 0 à 5.
-