

Exercice de la chute d'un corps soumis à un frottement.

- i) Quelle sera la position et la vitesse d'un objet qui tombe dans le champ de la gravitation après une seconde, après 5 secondes, après 10 secondes et après 30 secondes ?
- ii) Quelle sera sa vitesse de stabilisation ?
- iii) Après combien de temps touchera-t-il le sol ?

Données :

$$g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

hauteur de départ = $X(0) = 3'000$ mètres au-dessus du sol.

$$\text{Vitesse initiale} = V(0) = 0 \left[\frac{m}{s} \right].$$

masse de l'objet = $m = 75$ kilogrammes.

Force agissant sur l'objet : $F = 0.115 \cdot V^2 - m \cdot g$ unités : MKSA.

Ce problème peut se résoudre de manière exacte.

Il peut se résoudre en une dimension si on ne traite que la vitesse.
On peut le traiter en dimension 2 également.

Il est instructif de le traiter sous plusieurs points de vue !

Résolution :

L'équation différentielle est : $V' = \frac{0.115}{m} \cdot V^2 - g$

C'est une équation à variable séparables : $\frac{dV}{0.115/m \cdot V^2 - g} = dt$. $V(0) = 0$

Solution :

$$\frac{1}{\sqrt{g \cdot 0.115/m}} \cdot \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{0.115/m}{g}} \cdot V \right) = t$$

$$V(t) = \sqrt{\frac{g}{0.115/m}} \cdot \tanh \left(t \cdot \sqrt{g \cdot 0.115/m} \right)$$

$$\tanh(\infty) = 1, \text{ donc Vitesse limite} = V(\infty) = \sqrt{\frac{9.81}{0.115/75}} = 80.0 \left[\frac{m}{s} \right].$$

$$X(t) = 3'000 - \int_0^t V(\tau) d\tau, \text{ s'intègre mais n'est pas joli !}$$