Table des Matières.

Introduction

Il y a quelques dizaines d'années, j'ai appris ce que sont les fonctions splines de degrés 3 et j'ai écrit des programmes qui les utilisent pour faire passer une courbe par des points données dans un plan.
J'attends depuis longtemps que de telles courbes soient implémentées dans des logiciels tels qu'Inkscape et FreeCAD.
J'ai vu fin décembre 2022 sur Youtube l'excellente vidéo de Freya Holmér qui se nomme :
« The continuity of Splines. »
C.f. : https://www.youtube.com/watch?v=jvPPXbo87ds
de Freya Holmér c.f. : https://www.youtube.com/@Acegikmo

Malheureusement, la courbe que je nommerai « Math-spline », basées sur les fonctions splines que je décris par la suite et que j'ai implémenté dans la page Web suivante :
https://www.juggling.ch/gisin/bgweb/aprod2000_perso/spline_curve_math.html
n'est pas décrite par Freya Homér ni utilisée dans les logiciels que je connais.

Voici quelques caractéristiques de cette courbe « Math-spline » :
° continu
° de tangentes variant de manières continues le long de la courbe
° de rayons de courbure variant de manières continues le long de la courbe, elle est G^2
° l'influence des points se fait pratiquement sur les 8 segments voisins du point
° est facile à calculer, rapidement
° peut facilement être fermé
° peut avoir des points de brisures, donc où la tangente varie de façon discontinue.
° est invariante par rotation, symétrie et homothétie

Nous supposerons avoir une liste de n = nbPts points $\vec{V}_i = (x_i ; y_i)$ dans le plan, pour i = 1.. nbPts
On désire faire passer une courbe « naturelle » par ces points. Pour cela on définira les intervalles h_i = distance entre $\vec{V}_i$ et $\vec{V}_{i+1}$ = $\|\vec{V}_{i+1} - \vec{V}_i\|$ et les temps $t_i = t_{i-1} + h_i$, avec $t_1 = 0$ et on déterminera deux « splines fonctions » déterminées par les données : (t_i ; x_i) et (t_i ; y_i), pour i = 1.. nbPts.
On verra deux manières de calculer ces « splines fonctions », comment les rendre périodique, comment introduire des brisures dans la courbe et qu'elles sont invariantes par rotation, symétrie et homothétie.
On verra également ce que sont les courbes générées par des « B-splines », comment les générer, dans le cas $t_i = i$ et dans le cas général.
On montrera comment passer des B-splines au Math-splines et vice-versa.
On présentera plusieurs manières de vérifier que si l'implémentation informatique des formules est correcte.

Les calculs sont laissés explicitement dans ce document, pour les curieux.

Mathématique de de calcul de « fonction spline »

Référence : http://www.unige.ch/~hairer/polycop.html
« Polycopies du cours "Analyse Numérique" (June 2005), Chapitre II. Interpolation et Approximation » pages 46 à 52. (http://www.unige.ch/~hairer/poly/chap2.pdf)
C'est la première manière que j'ai apprise, mais il en existe une autre que je préfère. Elle est décrite plus loin en page 11 et c'est celle que j'utilise dans le programme.

Données :
$(t_i\,;\,y_i)$, pour i = 1.. nbPts
Spline passant par les points, cubique par morceau, deux fois continûment dérivable :
$s(t_i) = y_i$, pour i = 1.. nbPts

$h_i = t_{i+1} - t_i \qquad \delta_i = \dfrac{y_{i+1}-y_i}{t_{i+1}-t_i} = \dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$, pour i = 1.. nbPts - 1

Pour i = 1.. nbPts - 1, $t \in [t_i .. t_{i+1}]$

$$s_i(t) = y_i + (t-t_i)\cdot\delta_i + \frac{(t-t_i)\cdot(t-t_{i+1})}{h_i^2}\cdot\left[(p_i-\delta_i)\cdot(t-t_{i+1}) + (p_{i+1}-\delta_i)\cdot(t-t_i)\right]$$

Où p_i est la pente de la spline en $t = t_i$.
Donc $s'(t_i) = p_i$.
Donc $s'_i(t_i) = p_i$ et $s'_i(t_{i+1}) = p_{i+1} = s'_{i+1}(t_{i+1})$.

Vérifications :
$s_i(t_i) = y_i$; $s_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$

$$s_i(t_i+\epsilon) = y_i + \epsilon\cdot\delta_i + \frac{\epsilon\cdot(-h_i)}{h_i^2}\cdot\left[p_i\cdot(-h_i) - \delta_i\cdot(-h_i) + (..)\cdot\epsilon\right]$$

$s_i(t_i+\epsilon) = y_i + \epsilon\cdot p_i$, avec ϵ^2 négligeable, donc p_i est bien la pente en $t = t_i$.

$$s_i(t_{i+1}-\epsilon) = y_i + (h_i-\epsilon)\cdot\delta_i + \frac{h_i\cdot(-\epsilon)}{h_i^2}\cdot\left[(..)\cdot\epsilon + p_{i+1}\cdot(h_i-\epsilon) - \delta_i\cdot(h_i-\epsilon)\right]$$

$s_i(t_{i+1}-\epsilon) = y_{i+1} - \epsilon\cdot p_{i+1}$, avec ϵ^2 négligeable, donc p_{i+1} est bien la pente en $t = t_{i+1}$.

Condition à remplir pour que la dérivée seconde soit continue :

$s''_{i-1}(t_i) = \dfrac{2}{h_{i-1}}\cdot\left[2\,p_i + p_{i-1} - 3\cdot\delta_{i-1}\right]$ et $s''_i(t_i) = \dfrac{2}{h_i}\cdot\left[3\cdot\delta_i - (p_{i+1} + 2\,p_i)\right]$

Il faut que : $s''_{i-1}(t_i) = s''_i(t_i)$

Donc : $\dfrac{2}{h_{i-1}}\cdot\left[2\,p_i + p_{i-1} - 3\cdot\delta_{i-1}\right] = \dfrac{2}{h_i}\cdot\left[3\cdot\delta_i - (p_{i+1} + 2\,p_i)\right]$

Multiplions par $\dfrac{h_{i-1}\cdot h_i}{2}$ et réarrangeons les termes :

$$\boxed{h_i\cdot p_{i-1} + 2\cdot(h_{i-1}+h_i)\cdot p_i + h_{i-1}\cdot p_{i+1} = 3\cdot(h_{i-1}\cdot\delta_i + h_i\cdot\delta_{i-1})}$$

Condition à remplir pour i = 2.. nbPts - 1.
Pour des « Splines naturelles », on a : $s''_1(t_1) = s''_{n-1}(t_n) = 0$, donc
$2\,p_1 + p_2 = 3\cdot\delta_1$, ou aussi : $2\,h_0\cdot p_1 + h_0\cdot p_2 = 3\cdot h_0\cdot\delta_1$ et
$p_{n-1} + 2\,p_n = 3\cdot\delta_{n-1}$, ou aussi : $2\,h_n\cdot p_{n-1} + h_n\cdot p_n = 3\cdot h_n\cdot\delta_{n-1}$ h_0 et h_n sont arbitraires non nuls.

Système d'équation à résoudre pour obtenir la valeur des p_i $i = 1..n$
n = nombre de points = nbPts

$$\begin{pmatrix} 2\cdot h_0 & h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & 2\cdot h_2+2\cdot h_1 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & 2\cdot h_3+2\cdot h_2 & h_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_4 & 2\cdot h_4+2\cdot h_3 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_5 & 2\cdot h_5+2\cdot h_4 & h_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & 2\cdot h_{n-1}+2\cdot h_{n-2} & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_n & 2\cdot h_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_{n-1} \\ q_n \end{pmatrix}$$

$n = 7$ dans l'exemple de la matrice ci-dessus qui est une matrice nxn

$h_0 = h_n = 1$; $h_i = t_{i+1} - t_i$ $\quad \delta_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$, pour $i = 1..$ nbPts - 1

$q_i = 3\cdot\left(h_i\cdot\delta_{i-1} + h_{i-1}\cdot\delta_i\right)$ $\quad i = 2..n\text{-}1$

$q_1 = 3\cdot h_0\cdot\delta_1$ et $q_n = 3\cdot h_n\cdot\delta_{n-1}$.

On a utilisé le cas de la spline « naturel », qui est défini par la caractéristique que sa dérivée seconde aux bords est nulle.

<u>Résolution :</u>

$h_0 = 1$; $h_n = 1$ ($h_0 = \infty$ et $h_n = \infty$ serait naturel)

$diag_1 = 2\cdot h_0$; $diag_n = 2\cdot h_n$;

$diag_i = 2\cdot h_i + 2\cdot h_{i-1}$ Si $diag_i = 0$, alors $diag_i = 1$ $\quad i = 2..n\text{-}1$

$lft_i = h_i$ $\quad i = 0..n$

for i=2 to n do $\quad diag_i = diag_i - \dfrac{lft_i}{diag_{i-1}}\cdot lft_{i-2}$ and $q_i = q_i - \dfrac{lft_i}{diag_{i-1}}\cdot q_{i-1}$ $\quad$ on a : $lft_{i-2} = \text{right}_{i-1}$

$$p_n = \frac{q_n}{diag_n}$$

for i = n-1 downto 1 do $\quad p_i = \dfrac{q_i - lft_{i-1}\cdot p_{i+1}}{diag_i}$ $\quad$ on a : $lft_{i-1} = \text{right}_i$

<u>Changement de paramétrisation de la fonction spline.</u>

Pour $i = 1..$ nbPts - 1, $\ t \in [t_i .. t_{i+1}]$ $\quad t = t_i + \tau\cdot h_i$ $\quad \tau \in [0..1]$

$$s_i(t_i + \tau\cdot h_i) = y_i + \tau\cdot(y_{i+1} - y_i) + \tau\cdot(\tau - 1)\cdot\left[(p_i\cdot h_i - y_{i+1} + y_i)\cdot(\tau - 1) + (p_{i+1}\cdot h_i - y_{i+1} + y_i)\cdot\tau\right]$$

$$s_i(t_i + \tau\cdot h_i) = y_i + b_i\cdot\tau + c_i\cdot\tau^2 + d_i\cdot\tau^3$$

$b_i = p_i\cdot h_i$

$c_i = 3\cdot\left(y_{i+1} - y_i\right) - (p_{i+1} + 2\cdot p_i)\cdot h_i$

$d_i = (p_{i+1} + p_i)\cdot h_i - 2\cdot\left(y_{i+1} - y_i\right)$

Cas de la « fonction spline » ayant les pentes aux bords définies

On suppose donné les pentes aux bords : p_1 = donné ; p_n = donné,

$$\begin{pmatrix} 2\cdot h_2+2\cdot h_1 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & 2\cdot h_3+2\cdot h_2 & h_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_4 & 2\cdot h_4+2\cdot h_3 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_5 & 2\cdot h_5+2\cdot h_4 & h_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2\cdot h_{n-2}+2\cdot h_{n-3} & h_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & 2\cdot h_{n-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_{n-2} \\ p_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}$$

n = 8 dans l'exemple de la matrice ci-dessus

$$q_i = 3\cdot\left(h_i\cdot\delta_{i-1} + h_{i-1}\cdot\delta_i\right) \quad i = 3..n\text{-}2$$

$$q_2 = 3\cdot\left(h_2\cdot\delta_1 + h_1\cdot\delta_2\right) - h_2\cdot p_1 \quad \text{et} \quad q_{n-1} = 3\cdot\left(h_{n-1}\cdot\delta_{n-2} + h_{n-2}\cdot\delta_{n-1}\right) - h_{n-2}\cdot p_n$$

Pour une **spline périodique**, le plus simple est d'augmenter la matrice de 10 points, qui se confondent avec les points pour donner une courbe fermée qui se recoupe, puis de calculer les p_i, puis éliminer les 5 premiers et les 5 derniers.

Le cas de la spline périodique est repris plus loin, après avoir vu une autre approche du calcul de la spline, qui facilitera la tâche.

Étude du cas où un intervalle est de longueur nulle, première approche.
Plus loin après avoir déterminé une autre manières de calculer la « fonction spline », le cas où l'intervalle est de longueur nulle est retraité et est plus simple. Donc ce qui suit peut être sauté.

Prenons le cas où $h_4 = 0$, dans ce cas la matrice devient :

$$\begin{pmatrix} 2\cdot h_2 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & 2\cdot h_2+2\cdot h_1 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & 2\cdot h_3+2\cdot h_2 & h_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot h_3 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_5 & 2\cdot h_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & 2\cdot h_{n-1}+2\cdot h_{n-2} & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2\cdot h_{n-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_n \end{pmatrix}$$

$q_4 = 3\cdot h_3\cdot \delta_4$ et $q_5 = 3\cdot h_5\cdot \delta_4$
Dans ce cas, les lignes 4 et 5 se ramènent à un système de deux équations à deux inconnues :

$2\cdot p_4 + p_5 = 3\cdot \delta_4$ et
$p_4 + 2\cdot p_5 = 3\cdot \delta_4$

Solution : $p_4 = p_5 = \delta_4 = \dfrac{y_5 - y_4}{0}$.
Si $y_4 = y_5$, la valeur de δ_4 est indéterminée.
En la posant égale à 0 ($\delta_4 = 0$), on a l'avantage que le segment allant de t_4 à t_5 reste constant et qu'une brisure peut se faire en ce segment de longueur nulle et constant, confondu avec les points $y_4 = y_5$.

D'autre part, puisque les valeurs de p_4 et p_5 sont connues, la matrice se décompose en deux matrices indépendantes. Cela ne sert pratiquement à rien, mais il fallait le remarquer.

Rappelons que :
$s_i(t_i + \tau\cdot h_i) = y_i + b_i\cdot \tau + c_i\cdot \tau^2 + d_i\cdot \tau^3$
$b_i = p_i\cdot h_i$
$c_i = 3\cdot(y_{i+1} - y_i) - (p_{i+1} + 2\cdot p_i)\cdot h_i$
$d_i = (p_{i+1} + p_i)\cdot h_i - 2\cdot(y_{i+1} - y_i)$

Donc $s_4(t_4 + \tau\cdot 0) = y_4 + 0\cdot \tau + 0\cdot \tau^2 + 0\cdot \tau^3 = y_4$ = constante

$s''_3(t_4) = \dfrac{2}{h_3}\cdot[2\, p_4 + p_3 - 3\cdot \delta_3] = 0 \Rightarrow p_3 + 2\, p_4 = 3\cdot \delta_3$
$s''_5(t_5) = \dfrac{2}{h_5}\cdot[3\cdot \delta_5 - (p_6 + 2\, p_5)] = 0 \Rightarrow 2\, p_5 + p_6 = 3\cdot \delta_5$
On peut remplacer les lignes 4 et 5 par les lignes ci-dessus, pour modifier le système et avoir des conditions naturelles aux bords. Ceci sera plus simple avec l'autre manière de déterminer la « fonction spline ».

Question, la Math-spline est-elle dépendante du choix du référentiel ?

Autrement dit,
si on fait subir une transformation linéaire aux points définissant la Math-spline, puis on détermine la Math-spline à partir de ces points ou
si on détermine la Math-spline à partir des points, puis on lui fait subir la même transformation linéaire,
obtient-on la même courbe ?
Ce qui suit montre que OUI si la transformation est une rotation, une symétrie ou une homothétie.
Ceci a également été vérifié par programme.

Notons : $\begin{pmatrix} 2x2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice 2x2 de transformation linéaire.

Il faudra imaginer deux cas, l'un où la transformation est orthogonale, c'est-à-dire qu'elle préserve les distances et le cas général.

Notons : $\left(\vec{V}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_i & y_i \\ .. & .. \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$ la matrice n x 2 des points définissant la Math-spline.

Notons : $\left(\vec{S}(t)\right) = \begin{pmatrix} Sx_1(t) & Sy_1(t) \\ Sx_i(t) & Sy_i(t) \\ .. & .. \\ Sx_{n-1}(t) & Sy_{n-1}(t) \end{pmatrix}$ la matrice (n-1) x 2 définissant la courbe de la Math-spline.

$\left(\vec{S}(t)\right)$ est une fonction F de t et de $\left(\vec{V}\right)$. Elle sera développée plus loin.

Notons : $\widetilde{\left(\vec{S}(t)\right)} = \left(\vec{S}(t)\right) \circ \begin{pmatrix} 2x2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{Sx}_1(t) & \widetilde{Sy}_1(t) \\ \widetilde{Sx}_i(t) & \widetilde{Sy}_i(t) \\ .. & .. \\ \widetilde{Sx}_{n-1}(t) & \widetilde{Sy}_{n-1}(t) \end{pmatrix}$ la matrice (n-1) x 2 définissant la courbe de la Math-spline après sa transformation linéaire.

Notons : $\widetilde{\left(\vec{V}\right)} = \left(\vec{V}\right) \circ \begin{pmatrix} 2x2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{y}_1 \\ \tilde{x}_i & \tilde{y}_i \\ .. & .. \\ \tilde{x}_n & \tilde{y}_n \end{pmatrix}$ la matrice n x 2 des points définissant la Math-spline, après transformation linéaire.

La question est de savoir si $\widetilde{\left(\vec{S}(t)\right)}$ est obtenu par la même fonction F de t et de $\widetilde{\left(\vec{V}\right)}$?

Explicitons la fonction F .

$$\left(\vec{S}(t)\right) = \left(\vec{A}\right) + \left(\vec{B}\right)\cdot t + \left(\vec{C}\right)\cdot t^2 + \left(\vec{D}\right)\cdot t^3$$

$\left(\vec{A}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_i & y_i \\ .. & .. \\ x_{n-1} & y_{n-1} \end{pmatrix}$ et $\left(\widetilde{\vec{A}}\right) \overbrace{=}^{déf.} \begin{pmatrix} \widetilde{x_1} & \widetilde{y_1} \\ \widetilde{x_i} & \widetilde{y_i} \\ .. & .. \\ \widetilde{x_{n-1}} & \widetilde{y_{n-1}} \end{pmatrix}$. $\left(\widetilde{\vec{A}}\right)$ est le vecteur obtenu à partir de la T.L. des points.

On a vu à la page précédente que : $\left(\widetilde{\vec{A}}\right) = \left(\vec{A}\right) \circ \begin{pmatrix} 2\,x\,2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, car $\left(\widetilde{\vec{V}}\right) = \left(\vec{V}\right) \circ \begin{pmatrix} 2\,x\,2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\vec{B}\right) = \begin{pmatrix} px_1 \cdot h_1 & py_1 \cdot h_1 \\ px_i \cdot h_i & py_i \cdot h_i \\ .. & .. \\ px_{n-1} \cdot h_{n-1} & py_{n-1} \cdot h_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_i & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} px_1 & py_1 \\ px_i & py_i \\ .. & .. \\ px_{n-1} & py_{n-1} \end{pmatrix} = \left(H\ diag\right) \circ \begin{pmatrix} px_1 & py_1 \\ px_i & py_i \\ .. & .. \\ px_{n-1} & py_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} px_1 & py_1 \\ px_i & py_i \\ .. & .. \\ px_n & py_n \end{pmatrix} = \left(H\,1\right)^{-1} \circ \begin{pmatrix} qx_1 & qy_1 \\ qx_i & qy_i \\ .. & .. \\ qx_n & qy_n \end{pmatrix}$ où $\left(H\,1\right)$ est la grande matrice n x n de la page 2.

$\begin{pmatrix} qx_1 & qy_1 \\ qx_i & qy_i \\ .. & .. \\ qx_n & qy_n \end{pmatrix} = \left(H\,2\right) \circ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_i & y_i \\ .. & .. \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$ où

$\left(H\,2\right)$ est une matrice n x n définissant les valeurs des q_i qui sont définis en page 2.
Elle ne dépend que des valeurs des h_i, qui sont soit indépendant des points, soit dépendant uniquement des distances entre les points.

Conséquence :

$$\left(\vec{B}\right) = \left(H\ diag\right) \circ \left(H\,1\right)^{-1} \circ \left(H\,2\,diag\right) \circ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_i & y_i \\ .. & .. \\ x_n & y_n \end{pmatrix} = \left(H\ diag\right) \circ \left(H\,1\right)^{-1} \circ \left(H\,2\,diag\right) \circ \left(\vec{A}\right)$$

et si $\left(\widetilde{\vec{B}}\right)$ est le vecteur obtenu à partir de la T.L. des points, alors

$$\left(\widetilde{\vec{B}}\right) \overbrace{=}^{déf.} \left(H\ diag\right) \circ \left(H\,1\right)^{-1} \circ \left(H\,2\ diag\right) \circ \begin{pmatrix} \widetilde{x_1} & \widetilde{y_1} \\ \widetilde{x_i} & \widetilde{y_i} \\ .. & .. \\ \widetilde{x_n} & \widetilde{y_n} \end{pmatrix} = \left(H\ diag\right) \circ \left(H\,1\right)^{-1} \circ \left(H\,2\,diag\right) \circ \left(\widetilde{\vec{A}}\right)$$

$$= \left(H\ diag\right) \circ \left(H\,1\right)^{-1} \circ \left(H\,2\,diag\right) \circ \left(\vec{A}\right) \circ \begin{pmatrix} 2\,x\,2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\vec{B}\right) \circ \begin{pmatrix} 2\,x\,2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc on a la relation : $\left(\widetilde{\vec{B}}\right) = \left(\vec{B}\right) \circ \begin{pmatrix} 2\,x\,2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$!!!

On peut faire de même pour montrer que :
si $\widetilde{\left(\vec{C}\right)}$ et $\widetilde{\left(\vec{D}\right)}$ sont les vecteurs obtenus à partir des T.L. des points, alors
$\widetilde{\left(\vec{C}\right)} = \left(\vec{C}\right)\circ\begin{pmatrix} 2\,x\,2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{\left(\vec{D}\right)} = \left(\vec{D}\right)\circ\begin{pmatrix} 2\,x\,2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$!!!

Ceci nous permet d'obtenir :
La transformation linéaire de la Math-spline :
$$\left(\vec{S}(t)\right)\circ\begin{pmatrix} 2\,x\,2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\vec{A}\right)\circ\begin{pmatrix} 2\,x\,2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\vec{B}\right)\circ\begin{pmatrix} 2\,x\,2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot t + \left(\vec{C}\right)\circ\begin{pmatrix} 2\,x\,2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot t^2 + \left(\vec{D}\right)\circ\begin{pmatrix} 2\,x\,2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot t^3$$
$$\widetilde{\left(\vec{A}\right)} + \widetilde{\left(\vec{B}\right)}\cdot t + \widetilde{\left(\vec{C}\right)}\cdot t^2 + \widetilde{\left(\vec{D}\right)}\cdot t^3 = \widetilde{\left(\vec{S}(t)\right)}$$
est égale au Math-spline obtenue à partir des points qui ont subi la transformation linéaire.

Ceci montre que si les matrices $(H1)$; $(H2)$; $(H\,diag)$; ...
sont indépendantes des points, alors la courbe de la Math-spline est indépendante du choix du référentiel, car faire subir une transformation linéaire aux points puis calculer la Math-spline ou calculer la Math-spline puis lui faire subir la transformation linéaire revient au même.

Dans le cas où l'on choisit $h_i = 1$ pour tout i, on a bien l'indépendance aux points.

Dans le cas où l'on choisit h_i = distance entre le point V_i et le point V_i+1, l'indépendance n'est vraie que si la transformation linéaire est orthogonale, par exemple une rotation ou une symétrie.

Un premier résumé :

La courbe Math-spline définit par les calculs précédents est :
° continu
° de tangentes variant de manière continue le long de la courbe
° de rayon de courbure variant de manière continue le long de la courbe
° l'influence des points se fait pratiquement sur les 8 segments voisins du point
° est facile à calculer, rapidement
° peut facilement être fermé
° peut avoir des points de brisures, donc où la tangente varie de façon discontinue.

Quelques justifications des affirmations ci-dessus.
Entre deux points, les coordonnées des points de la Math-spline sont donnés par un polynôme cubique, donc entre deux points la courbe est parfaitement lisse, même du point de vue mathématique.

Reste à voir que les affirmations sont correctes aux points de définition de la Math-spline.
La continuité est évidente, car la Math-spline passe par les points donnés.

La manière de construire la courbe spline passe par la construction de deux fonctions deux fois continûment différentiables, sX(t) et sY(t), qui définissent l'équation paramétrique de la Math-spline.
(X ; Y) = (sX(t) ; sY(t)) pour t variant de 0 à t_{nbPts} .

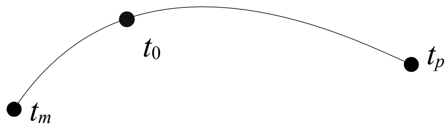
Pente de la tangente en $t\ =\ \dfrac{sY\,'(t)}{sX\,'(t)}$, qui varie continûment.
Lorsque le dénominateur est nul, la pente est simplement verticale.

Le rayon de courbure en $t\ =\ \dfrac{\left(sX\,'^2(t) + sY\,'^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|sX\,'(t)\cdot sY\,''(t) + sX\,''(t)\cdot sY\,'(t)\right|}$, qui varie continûment.
Lorsque le dénominateur est nul, le rayon de courbure est infini.
Il varie de manière continue, car les deux coordonnées sont deux fois continûment dérivables.

Cas G^1 où on ne désire pas l'existence de la dérivée seconde.

Pour simplifier, on peut ne pas désirer que la courbe soit deux fois continûment différentiable, mais juste une fois continûment différentiable. Il faut juste choisir des valeurs raisonnables de p_i.

On désire que p_i approxime « au mieux » la dérivée de la courbe en t_i.



Soit f une fonction C^2, donc deux fois continûment différentiable sur l'intervalle [t_m ; t_p]
$t_m < t_0 < t_p$ donnés.
Avec : $h_p = t_p - t_0$ et $h_m = t_0 - t_m$, positifs tous les deux.

Connaissant $f(t_m)$; $f(t_0)$ et $f(t_p)$, on aimerait approximer « au mieux » $f'(t_0)$.

On a :

$$f(t_p) = f(t_0) + f'(t_0)\cdot h_p + f''(\tau_p)\cdot\frac{h_p}{2} \quad \text{où} \quad \tau_p \in [t_0 ; t_p]$$

$$f(t_m) = f(t_0) - f'(t_0)\cdot h_m + f''(\tau_m)\cdot\frac{h_m}{2} \quad \text{où} \quad \tau_m \in [t_m ; t_0]$$

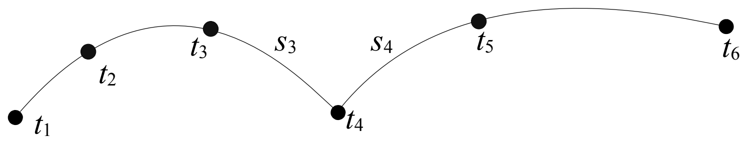
$$\frac{\alpha\cdot\dfrac{f(t_p)-f(t_0)}{h_p} + \beta\cdot\dfrac{f(t_0)-f(t_m)}{h_m}}{\alpha+\beta} = f'(t_0) + \frac{\alpha\cdot h_p\cdot f''(\tau_p) - \beta\cdot h_m\cdot f''(\tau_m)}{2\cdot(\alpha+\beta)}$$

On peut penser que $f''(\tau_m)$ et $f''(\tau_p)$ sont proches, on n'a pas mieux, donc un choix qui me parait raisonnable est : $\alpha = h_m$ et $\beta = h_p$.

Donc on approxime $f'(t_0)$ par : $\boxed{\dfrac{h_m\cdot\dfrac{f(t_p)-f(t_0)}{h_p} + h_p\cdot\dfrac{f(t_0)-f(t_m)}{h_m}}{h_m+h_p}}$

Un choix moins bon, mais plus simple est : $\alpha = h_p$ et $\beta = h_m$. qui approxime $f'(t_0)$ par $\dfrac{f(t_p) - f(t_m)}{t_p - t_m}$.

Cas G[1] et avec discontinuité d'une tangente.



S'il y a une brisure en t_4, s_3 ne dépend que des points en t_2, t_3, et t_4, mais pas en t_5.
S'il y a une brisure en t_4, s_4 ne dépend que des points en t_4, t_5, et t_6, mais pas en t_3.
(S'il y a une brisure en t_3, s_3 ne dépend que des points en t_3, t_4, et t_5, mais pas en t_2.)

Dans le cas d'une brisure en t_4 .

On voudrait avoir $s''_3(t_4) = 0$

$\frac{1}{2} \cdot s''_3(t_4) = c_3 + 3 \cdot d_3 = h_3 \cdot (p_3 + 2\, p_4 - 3\, \delta_3)$, donc : $\boxed{p_4 = \frac{3\, \delta_3 - p_3}{2}}$

Ici on fait référence au p_4 de s_3, qui est différent du p_4 de s_4.

On voudrait avoir $s''_4(t_4) = 0$

$\frac{1}{2} \cdot s''_4(t_4) = c_4 = h_4 \cdot (3\, \delta_4 - p_5 - 2\, p_4)$, donc : $\boxed{p_4 = \frac{3\, \delta_4 - p_5}{2}}$

Ici on fait référence au p_4 de s_4, qui est différent du p_4 de s_3.

Dans le cas d'une brisure en t_3 .

On voudrait avoir $s''_3(t_3) = 0$

$\frac{1}{2} \cdot s''_4(t_3) = c_3 = h_3 \cdot (3\, \delta_3 - p_4 - 2\, p_3)$, donc : $\boxed{p_3 = \frac{3\, \delta_3 - p_4}{2}}$

Ici on fait référence au p_3 de s_3, qui est différent du p_3 de s_2.

Autre manière d'aborder le calcul de la fonction spline, M_i = dérivée seconde.

Référence : « Introduction to numerical analysis » de J. Stoer et R. Bulirsch, Springer-Verlag 1983.
ISBN : 0-387-90420-4 New-York or 3-540-90420-4 Berlin Heidelberg.
Cette manière a des avantages par rapport à celle vue dans les pages précédentes.

Données :
$(t_i\,;\,y_i)$, pour i = 1.. nbPts

Spline passant par les points, cubique par morceau, deux fois continûment dérivable :
$s(t_i) = y_i$, pour i = 1.. nbPts

$h_i = t_{i+1} - t_i \qquad \delta_i = \dfrac{y_{i+1}-y_i}{t_{i+1}-t_i} = \dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$, pour i = 1.. nbPts - 1

Pour i = 1.. nbPts - 1, $t \in [t_i\,..\,t_{i+1}]$

$$s_i(t) = \frac{(t_{i+1}-t)^3}{6\,h_i}\cdot M_i + \frac{(t-t_i)^3}{6\,h_i}\cdot M_{i+1} + \frac{(t_{i+1}-t)}{h_i}\cdot\left(y_i - \frac{h_i^2}{6}\cdot M_i\right) + \frac{(t-t_i)}{h_i}\cdot\left(y_{i+1} - \frac{h_i^2}{6}\cdot M_{i+1}\right)$$

Où M_i est la dérivée seconde de la spline en $t = t_i$.
Donc $s''_i(t_i) = M_i$ et $s''_i(t_{i+1}) = M_{i+1} = s''_{i+1}(t_{i+1})$.
Donc la dérivée seconde de s(t) est continue, sous condition que la dérivée soit continue.

$$s'_i(t) = -\frac{(t_{i+1}-t)^2}{2\,h_i}\cdot M_i + \frac{(t-t_i)^2}{2\,h_i}\cdot M_{i+1} + \frac{-1}{h_i}\cdot\left(y_i - \frac{h_i^2}{6}\cdot M_i\right) + \frac{1}{h_i}\cdot\left(y_{i+1} - \frac{h_i^2}{6}\cdot M_{i+1}\right)$$

Aux bords :

$$s'_{i-1}(t_i) = \frac{h_{i-1}}{2}\cdot M_i - \frac{1}{h_{i-1}}\cdot\left(y_{i-1} - \frac{h_{i-1}^2}{6}\cdot M_{i-1}\right) + \frac{1}{h_{i-1}}\cdot\left(y_i - \frac{h_{i-1}^2}{6}\cdot M_i\right) = \frac{h_{i-1}}{6}\cdot\left(2\,M_i + M_{i-1}\right) + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

$$s'_i(t_i) = -\frac{h_i}{2}\cdot M_i - \frac{1}{h_i}\cdot\left(y_i - \frac{h_i^2}{6}\cdot M_i\right) + \frac{1}{h_i}\cdot\left(y_{i+1} - \frac{h_i^2}{6}\cdot M_{i+1}\right) = \frac{h_i}{6}\cdot\left(-2\,M_i - M_{i+1}\right) + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$$

Condition pour que la dérivée soit continue : $s'_{i-i}(t_i) = s'_i(t_i)$, donc :

$$h_{i-1}\cdot\left(2\,M_i + M_{i-1}\right) + 6\cdot\delta_{i-1} = h_i\cdot\left(-2\,M_i - M_{i+1}\right) + 6\cdot\delta_i$$

Ce qui devient en réarrangent les termes :

$$h_{i-1}\cdot M_{i-1} + 2\,(h_{i-1}+h_i)\cdot M_i + h_i\cdot M_{i+1} = 6\cdot\left(\delta_i - \delta_{i-1}\right) \quad \text{pour } i = 2..\text{ nbPts - 1}$$

Changement de paramétrisation de la courbe.
Pour i = 1.. nbPts - 1, $t \in [t_i\,..\,t_{i+1}] \qquad t = t_i + \tau\cdot h_i \qquad \tau \in [0\,..\,1]$

$$s_i(t_i+\tau\cdot h_i) = (1-\tau)^3\cdot\frac{h_i^2}{6}\cdot M_i + \tau^3\cdot\frac{h_i^2}{6}\cdot M_{i+1} + (1-\tau)\cdot\left(y_i - \frac{h_i^2}{6}\cdot M_i\right) + \tau\cdot\left(y_{i+1} - \frac{h_i^2}{6}\cdot M_{i+1}\right)$$

$$s_i(t_i+\tau\cdot h_i) = y_i + b_i\cdot\tau + c_i\cdot\tau^2 + d_i\cdot\tau^3$$

$b_i = y_{i+1} - y_i - \dfrac{2\,M_i + M_{i+1}}{6}\cdot h_i^2$ avant : $b_i = p_i\cdot h_i$, donc : $\boxed{p_i = \delta_i - \dfrac{2\,M_i + M_{i+1}}{6}\cdot h_i}$

$c_i = \dfrac{h_i^2}{2}\cdot M_i$ avant : $c_i = 3\cdot\left(y_{i+1}-y_i\right) - \left(p_{i+1} + 2\cdot p_i\right)\cdot h_i$, donc : $\boxed{M_i = 6\cdot\dfrac{\delta_i}{h_i} - \dfrac{(2\cdot p_{i+1} + 4\cdot p_i)}{h_i}}$

$d_i = \dfrac{h_i^2}{6}\cdot\left(M_{i+1} - M_i\right)$ avant : $d_i = \left(p_{i+1} + p_i\right)\cdot h_i - 2\cdot\left(y_{i+1}-y_i\right)$

Sous forme matricielle, cela devient
Système d'équation à résoudre pour obtenir la valeur des M_i $i = 2..n$-1
n = nombre de points = nbPts
$M_1 = M_n = 0$
Ces deux égalités correspondent au cas de la spline « naturel », qui est défini par la caractéristique que sa dérivée seconde aux bords est nulle.

$$\begin{pmatrix} 2\cdot(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & 2\cdot(h_2+h_3) & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & 2\cdot(h_3+h_4) & h_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_4 & 2\cdot(h_4+h_5) & h_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_5 & 2\cdot(h_5+h_6) & h_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-3} & 2\cdot(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2\cdot(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_{n-1} \end{pmatrix}$$

n = 9 dans l'exemple de la matrice ci-dessus

$h_i = t_{i+1} - t_i \qquad \delta_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$, pour i = 1.. nbPts - 1

$\delta_i = 0$ si le numérateur est nul, même si le dénominateur est nul aussi. C'est arbitraire, mais pratique.
$r_i = 6\cdot(\delta_i - \delta_{i-1}) \quad i = 2..n$-1

Résolution :
$diag_i = 2\cdot(h_{i-1}+h_i)$; Si $diag_i = 0$, alors $diag_i = 1$ $\quad i = 2..n$-1 La première ligne est i=2
$lft_i = h_{i-1} \quad i = 1..n$-1

for i=3 to n-1 do $diag_i = diag_i - \dfrac{lft_i}{diag_{i-1}} \cdot lft_i$ and $r_i = r_i - \dfrac{lft_i}{diag_{i-1}} \cdot r_{i-1}$ on a : $lft_i = \text{right}_{i-1}$

$$M_{n-1} = \frac{r_{n-1}}{diag_{n-1}}$$

for $i = n$-2 downto 2 do $M_i = \dfrac{r_i - lft_{i+1} \cdot M_{i+1}}{diag_i}$ on a : $lft_{i+1} = \text{right}_i$

Que faire si dans l'algorithme, on divise par 0 ?
Cela ne serait le cas, que si $h_i = 0$ et $h_{i-1} = 0$, donc trois points sont superposés.
Dans ce cas, toute la ligne de la matrice serait nulle, ce qui n'aurait aucune influence, car la longueur du segment à tracer serait nulle aussi. On évite ce problème en rendant égale à 1 les diagonales nulles.

Étudions la situation lorsque les pentes aux bords sont fixés.

On suppose donné p_1 et p_n. Cela influencera les valeurs de M_1 et de M_n.

On a vu que pour i = 1.. nbPts - 1

$s'_i(t_i) = \frac{h_i}{6}\cdot\left(-2M_i - M_{i+1}\right) + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$ et $h_{i-1}\cdot M_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)\cdot M_i + h_i\cdot M_{i+1} = 6\cdot\left(\delta_i - \delta_{i-1}\right)$.

Donc $p_1 = s'_1(t_1) = \frac{h_1}{6}\cdot\left(-2M_1 - M_2\right) + \frac{y_2-y_1}{h_1}$ => $M_1 = 3\cdot\left(\frac{y_2-y_1}{h_1^2} - \frac{p_1}{h_1}\right) - \frac{M_2}{2}$

On doit aussi satisfaire :

$h_1\cdot M_1 + 2(h_1+h_2)\cdot M_2 + h_2\cdot M_3 = 6\cdot\left(\delta_2 - \delta_1\right)$

En combinant, on obtient : $\boxed{\left(\frac{3}{2}h_1+2h_2\right)\cdot M_2 + h_2\cdot M_3 = 6\cdot\delta_2 - 9\cdot\delta_1 + 3\cdot p_1}$.

Ceci change la valeur du premier nombre de la diagonale, ainsi que la valeur de r_2.

Si on a choisi la *situation « naturelle » où* $M_1 = 0$, alors : $\boxed{p_1 = \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{h_1}{6}\cdot M_2}$ ($y_0 = y_1 - p_1$)

Dans tous les cas, on a : $\boxed{p_1 = \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{h_1}{6}\cdot\left(2M_1 + M_2\right)}$ ($V_0 = V_1 - p_1$)

À la fin de la courbe :

On a vu que : $s'_{i-1}(t_i) = \frac{h_{i-1}}{6}\cdot\left(2M_i + M_{i-1}\right) + \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}$

Donc $p_n = s'_{n-1}(t_n) = \frac{h_{n-1}}{6}\cdot\left(2M_n + M_{n-1}\right) + \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}$ => $M_n = 3\cdot\left(\frac{p_n}{h_{n-1}} - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}^2}\right) - \frac{M_{n-1}}{2}$

On doit aussi satisfaire :

$h_{n-2}\cdot M_{n-2} + 2(h_{n-2}+h_{n-1})\cdot M_{n-1} + h_{n-1}\cdot M_n = 6\cdot\left(\delta_{n-1} - \delta_{n-2}\right)$

En combinant, on obtient : $\boxed{\left(\frac{3}{2}h_{n-1}+2h_{n-2}\right)\cdot M_{n-1} + h_{n-2}\cdot M_{n-2} = 9\cdot\delta_{n-1} - 6\cdot\delta_{n-2} - 3\cdot p_n}$.

Ceci change la valeur du dernier nombre de la diagonale, ainsi que la valeur de r_{n-1}.

Si on a choisi la *situation « naturelle » où* $M_n = 0$, alors : $\boxed{p_n = \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{h_{n-1}}{6}\cdot M_{n-1}}$ ($y_{n+1} = y_n + p_n$)

Dans tous les cas, on a : $\boxed{p_n = \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{h_{n-1}}{6}\cdot\left(2M_n + M_{n-1}\right)}$ ($V_{n+1} = V_n + p_n$)

Une autre possibilité est d'augmenter de deux la dimension de la matrice à résoudre.

Dans le cas où les pentes sont données aux bords, voici la matrice à résoudre :

$$\begin{pmatrix} 2\cdot h_1 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2\cdot(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2\cdot(h_2+h_3) & h_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 2\cdot(h_3+h_4) & h_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 & 2\cdot(h_4+h_5) & h_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2\cdot(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & 2\cdot h_{n-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix}$$

$n = 7$ dans l'exemple de la matrice ci-dessus

$h_i = t_{i+1} - t_i \qquad \delta_i = \dfrac{y_{i+1}-y_i}{t_{i+1}-t_i} = \dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$, pour $i = 1..$ nbPts - 1

$\delta_i = 0$ si le numérateur est nul, même si le dénominateur est nul aussi. C'est arbitraire, mais pratique.

$r_i = 6\cdot(\delta_i - \delta_{i-1}) \quad i = 2..n\text{-}1$

$r_1 = 6\cdot(\delta_1 - p_1)$; $r_n = 6\cdot(p_n - \delta_{n-1})$

Résolution :

$h_0 = 0$; $h_n = 0$

$diag_i = 2\cdot(h_{i-1}+h_i)$; Si $diag_i = 0$, alors $diag_i = 1$ $\quad i = 1..n$ La première ligne est i=1

$lft_i = h_{i-1} \quad i = 1..n$

for i=2 to n do $diag_i = diag_i - \dfrac{lft_i}{diag_{i-1}}\cdot lft_i$ and $r_i = r_i - \dfrac{lft_i}{diag_{i-1}}\cdot r_{i-1}$ on a : $lft_i = \text{right}_{i-1}$

$M_n = \dfrac{r_n}{diag_n}$

for $i = n$-1 downto 1 do $M_i = \dfrac{r_i - lft_{i+1}\cdot M_{i+1}}{diag_i}$ on a : $lft_{i+1} = \text{right}_i$

Il y a $n + 2$ points ; n = nb_points - 2.

Étude du cas où un intervalle est de longueur nulle.

Prenons le cas où $h_4 = 0$, dans ce cas la matrice devient :

$$\begin{pmatrix} 2\cdot(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & 2\cdot(h_2+h_3) & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & 2\cdot h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot h_5 & h_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_5 & 2\cdot(h_5+h_6) & h_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-3} & 2\cdot(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2\cdot(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_{n-1} \end{pmatrix}$$

$n = 9$ dans l'exemple de la matrice ci-dessus

$h_i = t_{i+1} - t_i \qquad \delta_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$, pour $i = 1..$ nbPts - 1

$\delta_i = 0$ si le numérateur est nul, même si le dénominateur est nul aussi. C'est arbitraire, mais pratique.

$r_i = 6\cdot(\delta_i - \delta_{i-1}) \quad i = 2..n\text{-}1$

Le système se scinde en deux systèmes indépendants.

$\delta_4 = \dfrac{y_5 - y_4}{h_4} = \dfrac{0}{0}$ est indéterminé.

Donc r_4 et r_5 sont aussi indéterminés.

Il serait pratique et naturel d'avoir $M_4 = M_5 = 0$, donc que la spline se décompose en deux splines naturelles.

On aurait :

$h_2\cdot M_2 + 2\cdot(h_2+h_3)\cdot M_3 = r_3$. L'équation : $h_3\cdot M_3 + 2h_3\cdot M_4 = r_4$ serait remplacée par $M_4 = 0$.

$2\cdot(h_5+h_6)\cdot M_6 + h_6\cdot M_7 = r_6$. L'équation : $2h_5\cdot M_5 + h_5\cdot M_6 = r_5$ serait remplacée par $M_5 = 0$.

Résolution :

$diag_i = 2\cdot(h_{i-1}+h_i)$; Si $diag_i = 0$, alors $diag_i = 1 \quad i = 2..n\text{-}1$ La première ligne est i=2

$lft_i = h_{i-1} \quad i = 1..n\text{-}1$

$lft_4 = lft_5 = lft_6 = 0$ et $r_4 = r_5 = 0$ à rajouter dans l'algorithme.

for i=3 to n-1 do $diag_i = diag_i - \dfrac{lft_i}{diag_{i-1}}\cdot lft_i$ and $r_i = r_i - \dfrac{lft_i}{diag_{i-1}}\cdot r_{i-1}$ on a : $lft_i = \text{right}_{i-1}$

$$M_{n-1} = \frac{r_{n-1}}{diag_{n-1}}$$

for $i = n$-2 downto 2 do $M_i = \dfrac{r_i - lft_{i+1}\cdot M_{i+1}}{diag_i}$ on a : $lft_{i+1} = \text{right}_i$

On a automatiquement les deux égalités désirées : $M_4 = M_5 = 0$.

<u>Prenons le cas où l'on ne désire par de continuité des dérivées en $t = t_4$</u>
Ceci permettrait d'avoir une cassure dans la pente en t_4.
La ligne biffée du système ci-dessous devrait être éliminée, ce qui laisse un degré de liberté.
M_4 du segment s_4 n'a pas besoin d'être égale au M_4 du segment s_5.
Il serait naturel de fixer $M_4 = 0$, pour que la spline se décompose en deux splines naturelles.

$$\begin{pmatrix} 2\cdot(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & 2\cdot(h_2+h_3) & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{h_3} & \cancel{2\cdot(h_3+h_4)} & \cancel{h_4} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & h_4 & 2\cdot(h_4+h_5) & h_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_5 & 2\cdot(h_5+h_6) & h_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-3} & 2\cdot(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2\cdot(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \\ \cancel{r_4} \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_{n-1} \end{pmatrix}$$

$n = 9$ dans l'exemple de la matrice ci-dessus

$h_i = t_{i+1} - t_i \qquad \delta_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$, pour $i = 1..$ nbPts - 1

$\delta_i = 0$ si le numérateur est nul, même si le dénominateur est nul aussi. C'est arbitraire, mais pratique.

$r_i = 6\cdot(\delta_i - \delta_{i-1}) \quad i = 2..n\text{-}1$

<u>Résolution :</u>
On laisse la ligne biffée, i=4, qui donnera automatiquement : $M_4 = 0$.

$diag_i = 2\cdot(h_{i-1}+h_i)$; Si $diag_i = 0$, alors $diag_i = 1 \quad i = 2..n\text{-}1$ La première ligne est i=2

$lft_i = h_{i-1} \quad i = 1..n\text{-}1$

$lft_4 = lft_5 = 0$ et $r_4 = 0$ à rajouter dans l'algorithme.

for i=3 to n-1 do $diag_i = diag_i - \dfrac{lft_i}{diag_{i-1}}\cdot lft_i$ and $r_i = r_i - \dfrac{lft_i}{diag_{i-1}}\cdot r_{i-1}$ on a : $lft_i = \text{right}_{i-1}$

$$M_{n-1} = \frac{r_{n-1}}{diag_{n-1}}$$

for $i = n$-2 downto 2 do $M_i = \dfrac{r_i - lft_{i+1}\cdot M_{i+1}}{diag_i}$ on a : $lft_{i+1} = \text{right}_i$

On a automatiquement l'égalité désirée : $M_4 = 0$.

Cas de spline périodique, correspondantes à des courbes fermées.
Dans ce cas, on approxime la dérivée seconde de la courbe au « point de départ » dans M_1 et la dérivée seconde de la courbe au « point d'arrivée » dans M_{n+10} .
On ajoute 10 points de façon périodique, on élimine les 5 premiers et 5 derniers segments, ce qui nous donne la courbe périodique, car au-delà de 5 points, le segment n'est plus influencé par les points.

Approximation des dérivées secondes au départ et à l'arrivée :
Pour une courbe passant par des points $\vec{v}_i = (x_i ; y_i)$ c'est différent que pour une fonction spline.
Ici on traite le cas de courbe passant par des points.
Donnée : $\vec{v}_i = (x_i ; y_i)$ pour i = 1.. nbPts
On ajoute : $\vec{v}_0 = \vec{v}_n$ et on peut ajouter : $\vec{v}_{n+i} = \vec{v}_i$.

h_i = distance entre $\vec{v}_i$ et $\vec{v}_{i+1}$ $= \|\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i\|$ $\delta_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$ = pente, pour i = 0.. nbPts+10

$M_1 = 2 \cdot \dfrac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0}$ et $M_m = 2 \cdot \dfrac{\delta_m - \delta_{m-1}}{h_m + h_{m-1}}$ n = nbPts et $m = n + 10$

Système d'équation à résoudre pour obtenir la valeur des M_i i = 2..n+10-1
n = nombre de points = nbPts

$$\begin{pmatrix} 2\cdot(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & 2\cdot(h_2+h_3) & h_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & 2\cdot(h_3+h_4) & h_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_4 & 2\cdot(h_4+h_5) & h_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{m-3} & 2\cdot(h_{m-3}+h_{m-2}) & h_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{m-2} & 2\cdot(h_{m-2}+h_{m-1}) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_{m-2} \\ M_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_{m-2} \\ r_{m-1} \end{pmatrix}$$

m = 8 dans l'exemple de la matrice ci-dessus

$r_i = 6 \cdot (\delta_i - \delta_{i-1})$ i = 3..m-2
$r_2 = 6 \cdot (\delta_2 - \delta_1) - h_1 \cdot M_1$ et $r_{m-1} = 6 \cdot (\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) - h_{m-1} \cdot M_m$

Résolution :
$diag_i = 2 \cdot (h_{i-1} + h_i)$; Si $diag_i = 0$, alors $diag_i = 1$ i = 2..m-1 La première ligne est i=2
$lft_i = h_{i-1}$ i = 1..m-1

for i=3 to m-1 do $diag_i = diag_i - \dfrac{lft_i}{diag_{i-1}} \cdot lft_i$ and $r_i = r_i - \dfrac{lft_i}{diag_{i-1}} \cdot r_{i-1}$ on a : $lft_i = \text{right}_{i-1}$

$M_{m-1} = \dfrac{r_{m-1}}{diag_{m-1}}$

for $i = m$-2 downto 2 do $M_i = \dfrac{r_i - lft_{i+1} \cdot M_{i+1}}{diag_i}$ on a : $lft_{i+1} = \text{right}_i$

On ne garde que les valeurs de M_5 à M_{m-5} . Remarque $(M_{m-5} = M_{n+5})$ m=n+10
pour définir les segments de 1 à n.

Cas de spline périodique, correspondantes à des courbes fermées, mais avec cassure.
Dans le cas d'une courbe fermée, avec une cassure en un point, c'est-à-dire avec un point ayant une discontinuité de la tangente, cela correspond à une spline non périodique, avec un début et une fin superposé sur le point ayant la cassure.
Pour les calculs, il faut juste commencer la matrice au point ayant la cassure.

L'autre manière de faire est d'ajouter les conditions suivantes à chaque cassure k :
$lft_k = lft_{k+1} = 0$ et $r_k = 0$ à rajouter dans l'algorithme, avant l'élimination de Gauss et d'ajouter des points, comme décrits précédemment.
C'est plus simple.

Liens avec d'autres courbes splines, décrite dans la vidéo « The continuity of Splines. »

C.f. : https://www.youtube.com/watch?v=jvPPXbo87ds
de Freya Holmér c.f. : https://www.youtube.com/@Acegikmo

Excellente vidéo qui résume différentes approximations par des splines.
Malheureusement, la Math-spline que je décris précédemment ne fait pas partie de la liste des splines décrites dans cette vidéo.

Bézier :

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$$

P_1 et P_2 sont des points de contrôle.
$P(0) = P_0$
$P(1) = P_3$
$P'(0) = -3\,P_0 + 3\,P_1$
$P'(1) = -3\,P_2 + 3\,P_3$

Hermite :

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} P_0 \\ V_0 \\ P_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$$

$P(0) = P_0$
$P(1) = P_1$
$P'(0) = V_0$
$P'(1) = V_1$

Catmull-Rom :

$$P(t) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$$

$P(0) = P_1$
$P(1) = P_2$
$P'(0) = -0.5\,P_0 + 0.5\,P_2$
$P'(1) = -0.5\,P_1 + 0.5\,P_3$

B-Spline :

$$P(t) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$$

$P(0) = (\,P_0 + 4\,P_1 + P_2\,) / 6$
$P(1) = (\,P_1 + 4P_2 + P_3\,) / 6$
$P'(0) = -0.5\,P_0 + 0.5\,P_2$
$P'(1) = -0.5\,P_1 + 0.5\,P_3$

Parties de la vidéo :
21' - 23', amélioration, pour obtenir la Math-spline décrite dans les pages précédentes.
38' Geometrical continuity
43 Hermite Bezier
46' - 47' Cardinal spline
48' Catmull-Rom spline
54' Matrix of B-spline
57' Résumé des 4 splines ci-dessus.

Définition plus précise d'une B-spline et liens avec les Math-splines

Après avoir défini plus précisément la courbe B-spline obtenue par des points de contrôles, nous verrons comment passer des points de contrôles d'une B-spline aux points de contrôles d'une Math-spline et réciproquement.
Les deux courbes sont les mêmes, juste la manière de les contrôler à l'aide de divers points diffèrent.
L'avantage d'une B-spline est que le déplacement d'un point de contrôle ne modifie que les 4 segments adjacents. Son désavantage est de ne pas passer par les points de contrôles.
L'avantage d'une Math-spline est de passer par tous les points de contrôles, sauf le premier et le dernier que nous définirons plus loin. Son désavantage est qu'il modifie théoriquement tous les segments de la courbe, bien que pratiquement il ne modifie que les 8 segments adjacents.

Pour ne pas faire de confusion avec les lettres utilisées précédemment, voici des conventions de notation :
Les points de contrôles de la B-spline seront notés : U_i, pour $i = 0 .. n+1$.
Les points de contrôles de la Math-spline seront notés : V_i, pour $i = 0 .. n+1$.
Les U_i et les V_i sont des points ou des vecteurs de dimension 2 pour un plan et de dimension supérieur pour un espace plus grand. (3 pour notre espace et plus pour un mathématicien.)

La courbe spline sera notée $s(t)$, pour $t = t_1$ à t_n, satisfaisant : $s(t_i) = V_i$, pour $i = 1 .. n$.
Elle est définie par

$$s(t) = s_i(t) = s_i(t_i + \tau \cdot h_i) \quad \text{pour} \quad t \in [t_i .. t_{i+1}] \qquad \tau \in [0 .. 1]$$

$s_i(t)$ est cubique par morceaux.

Simplification pour une première approche.
$t_i = i$ et donc $h_i = 1$ pour tout i.
Cherchons une matrice A rendant la courbe spline deux fois continûment différentiable, pour retrouver la matrice liée à une B-spline.

$$s_i(t_i+\tau) = \begin{pmatrix} 1 & \tau & \tau^2 & \tau^3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & a_{1;3} & a_{1;4} \\ a_{2;1} & a_{2;2} & a_{2;3} & a_{2;4} \\ a_{3;1} & a_{3;2} & a_{3;3} & a_{3;4} \\ a_{4;1} & a_{4;2} & a_{4;3} & a_{4;4} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ U_{i+2} \end{pmatrix}$$

$$s'_i(t_i+\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\tau & 3\tau^2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & a_{1;3} & a_{1;4} \\ a_{2;1} & a_{2;2} & a_{2;3} & a_{2;4} \\ a_{3;1} & a_{3;2} & a_{3;3} & a_{3;4} \\ a_{4;1} & a_{4;2} & a_{4;3} & a_{4;4} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ U_{i+2} \end{pmatrix}$$

$$s''_i(t_i+\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6\tau \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & a_{1;3} & a_{1;4} \\ a_{2;1} & a_{2;2} & a_{2;3} & a_{2;4} \\ a_{3;1} & a_{3;2} & a_{3;3} & a_{3;4} \\ a_{4;1} & a_{4;2} & a_{4;3} & a_{4;4} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ U_{i+2} \end{pmatrix}$$

Pour tout U_i, les conditions à remplir sont :

$$s_i(t_{i+1}) = s_{i+1}(t_{i+1})$$
$$s_i(t_{i+1}) = s_{i+1}(t_{i+1})$$
$$s_i''(t_{i+1}) = s_{i+1}''(t_{i+1})$$

Vous pouvez sauter les calculs de la page suivante, pour ne voir que le résultat.

$s_i(t_{i+1}) = s_{i+1}(t_{i+1})$ impose la condition suivante, qui se décompose en 5 conditions :

$(a_{1;1}+a_{2;1}+a_{3;1}+a_{4;1})\cdot U_{i-1}$ +
$(a_{1;2}+a_{2;2}+a_{3;2}+a_{4;2})\cdot U_i$ +
$(a_{1;3}+a_{2;3}+a_{3;3}+a_{4;3})\cdot U_{i+1}$ +
$(a_{1;4}+a_{2;4}+a_{3;4}+a_{4;4})\cdot U_{i+2}$ =
$a_{1;1}\cdot U_i+a_{1;2}\cdot U_{i+1}+a_{1;3}\cdot U_{i+2}+a_{1;4}\cdot U_{i+3}$

Vu que l'égalité doivent être vraie tout U_i, elle donne 5 équations.

$s'_i(t_{i+1}) = s'_{i+1}(t_{i+1})$ impose la condition suivante, qui se décompose en 5 conditions :

$(a_{2;1}+2a_{3;1}+3a_{4;1})\cdot U_{i-1}$ +
$(a_{2;2}+2a_{3;2}+3a_{4;2})\cdot U_i$ +
$(a_{2;3}+2a_{3;3}+3a_{4;3})\cdot U_{i+1}$ +
$(a_{2;4}+2a_{3;4}+3a_{4;4})\cdot U_{i+2}$ =
$a_{2;1}\cdot U_i+a_{2;2}\cdot U_{i+1}+a_{2;3}\cdot U_{i+2}+a_{2;4}\cdot U_{i+3}$

Vu que l'égalité doivent être vraie tout U_i, elle donne 5 équations.

$s''_i(t_{i+1}) = s''_{i+1}(t_{i+1})$ impose la condition suivante, qui se décompose en 5 conditions :

$(2a_{3;1}+6a_{4;1})\cdot U_{i-1}$ +
$(2a_{3;2}+6a_{4;2})\cdot U_i$ +
$(2a_{3;3}+6a_{4;3})\cdot U_{i+1}$ +
$(2a_{3;4}+6a_{4;4})\cdot U_{i+2}$ =
$2a_{3;1}\cdot U_i+2a_{3;2}\cdot U_{i+1}+2a_{3;3}\cdot U_{i+2}+2a_{3;4}\cdot U_{i+3}$

Vu que l'égalité doivent être vraie tout U_i, elle donne 5 équations.

On obtient 15 équations assez faciles à résoudre, avec une inconnue libre.
Concernant les U_{i+3} on obtient : $a_{1;4} = 0$; $a_{2;4} = 0$; $a_{3;4} = 0$

Concernant les U_{i+2} on obtient :
$2a_{3;4}+6a_{4;4} = 2a_{3;3}$, donc $a_{3;3} = 3a_{4;4}$
$a_{2;4}+2a_{3;4}+3a_{4;4} = a_{2;3}$, donc $a_{2;3} = 3a_{4;4}$
$a_{1;4}+a_{2;4}+a_{3;4}+a_{4;4} = a_{1;3}$, donc $a_{1;3} = a_{4;4}$

Concernant les U_{i+1} on obtient :
$2a_{3;3}+6a_{4;3} = 2a_{3;2}$, donc $a_{3;2} = 3a_{4;4} + 3a_{4;3}$
$a_{2;3}+2a_{3;3}+3a_{4;3} = a_{2;2}$, donc $a_{2;2} = 9a_{4;4} + 3a_{4;3}$
$a_{1;3}+a_{2;3}+a_{3;3}+a_{4;3} = a_{1;2}$, donc $a_{1;2} = 7a_{4;4} + a_{4;3}$

Concernant les U_i on obtient :
$2a_{3;2}+6a_{4;2} = 2a_{3;1}$, donc $a_{3;1} = 3a_{4;4} + 3a_{4;3} + 3a_{4;2}$
$a_{2;2}+2a_{3;2}+3a_{4;2} = a_{2;1}$, donc $a_{2;1} = 15a_{4;4} + 9a_{4;3} + 3a_{4;2}$
$a_{1;2}+a_{2;2}+a_{3;2}+a_{4;2} = a_{1;1}$, donc $a_{1;1} = 19a_{4;4} + 7a_{4;3} + a_{4;2}$

Concernant les U_{i-1} on obtient :
$2a_{3;1}+6a_{4;1} = 0$, donc $a_{3;1} = -3a_{4;1}$
$a_{2;1}+2a_{3;1}+3a_{4;1} = 0$, donc $a_{2;1} = 3a_{4;1}$
$a_{1;1}+a_{2;1}+a_{3;1}+a_{4;1} = 0$, donc $a_{1;1} = -a_{4;1}$

En résolvant 3 équations, on obtient : $a_{4;3} = -3a_{4;4}$ et $a_{4;2} = 3a_{4;4}$ et $a_{4;1} = -a_{4;4}$
Quelle contrainte faut-il encore satisfaite pour fixer $a_{4;4}$?

On obtient :

$$s_i(t_i+\tau) = a_{4;4}\cdot\begin{pmatrix}1 & \tau & \tau^2 & \tau^3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -1 & 3 & -3 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}U_{i-1}\\ U_i\\ U_{i+1}\\ U_{i+2}\end{pmatrix}, \qquad \tau\in[0\,..\,1]$$

On retrouve bien la matrice de la courbe B-spline, avec un paramètre libre, qui correspond à faire subir une homothétie à toute la courbe.
Pour que $s_i(t_i) = a_{4;4}\cdot(U_{i-1} + 4U_i + U_{i+1})$ corresponde à une moyenne pondérée des U_i, il faut choisir la valeur de $a_{4;4} = \frac{1}{6}$. Un autre choix rendrait la courbe dépendante du choix de l'origine du plan. Il faut que si l'on translate tous les U_i de la même manière, que l'on calcule la courbe B-spline, puis qu'on la translate dans l'autre sens, on obtienne la même courbe indépendamment de la translation.

Ainsi on obtient exactement la matrice caractéristique d'une B-spline.

$$\boxed{s_i(t_i+\tau) = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}1 & \tau & \tau^2 & \tau^3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -1 & 3 & -3 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}U_{i-1}\\ U_i\\ U_{i+1}\\ U_{i+2}\end{pmatrix}}$$

En annexe II, je revérifie que la courbe ainsi obtenue est bien deux fois continûment différentiable.

Une première relation entre les points de contrôles de la B-spline et ceux de la Math-spline :

$\boxed{s(t_i) = s_i(t_i) = V_i = \frac{1}{6}\cdot(U_{i-1} + 4U_i + U_{i+1})}$, pour $i = 1\,..\,n$.

Reste les deux points de contrôles V_0 et V_{n+1}.
la Math-spline possède deux degrés de libertés correspondant à la pente de la courbe au départ et à la pente de la courbe à l'arrivée.

$$\begin{aligned} s(t_i+\tau) = \frac{1}{6}\cdot[\quad & U_{i-1} + 4U_i + U_{i+1} + \\ & \tau\cdot(-3U_{i-1} + 3U_{i+1}) + \\ & \tau^2\cdot(3U_{i-1} - 6U_i + 3U_{i+1}) + \\ & \tau^3\cdot(-U_{i-1} + 3U_i - 3U_{i+1} + U_{i+2}) \quad] \end{aligned}$$

Dérivée de s(t).

$$\begin{aligned} s'_i(t_i+\tau) = \frac{1}{6}\cdot[\quad & -3U_{i-1} + 3U_{i+1} + \\ & \tau\cdot(6U_{i-1} - 12U_i + 6U_{i+1}) + \\ & \tau^2\cdot(-3U_{i-1} + 9U_i - 9U_{i+1} + 3U_{i+2}) \quad] \end{aligned}$$

$$s'_i(t_i+\tau) = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\tau & 3\tau^2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -1 & 3 & -3 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}U_{i-1}\\ U_i\\ U_{i+1}\\ U_{i+2}\end{pmatrix}$$

Calculons la dérivée seconde de s(t).

$$\begin{aligned} s''_i(t_i+\tau) = \quad & U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1} + \\ & \tau\cdot(-U_{i-1} + 3U_i - 3U_{i+1} + U_{i+2}) \quad] \end{aligned}$$

Détermination des deux points de contrôles V_0 et V_{n+1} de la Math-spline pour faire coïncider les deux courbes.

Pente au départ = $p_1 = s'(t_1) = s'_1(t_1) = \frac{1}{2}\cdot U_2 - \frac{1}{2}\cdot U_0$.

Pente à l'arrivée = $p_n = s'(t_n) = s'_{n-1}(t_n) = \frac{1}{2}\cdot U_{n+1} - \frac{1}{2}\cdot U_{n-1}$.

Pour la Math-spline, ces deux pentes sont libres de choix.
Reste à définir un lien entre ces deux pentes et les deux valeurs V_0 et V_{n+1} .
On veut que les conditions suivantes soient réalisées :

1) $p_1 = \frac{1}{2}\cdot U_2 - \frac{1}{2}\cdot U_0$
2) $V_0 = \alpha\cdot U_0 + \beta\cdot U_1 + \gamma\cdot U_2$, avec α ; β ; γ libres
3) $V_1 = \frac{1}{6}\cdot U_0 + \frac{4}{6}\cdot U_1 + \frac{1}{6}\cdot U_2$
4) $p_1 = \lambda\cdot V_1 - \mu\cdot V_0$, avec λ ; μ libres

On veut donc exprimer V_0 en fonction de U_0, U_1 et U_2, qui permette de déterminer p_1 qui satisfasse la condition 1), qui décrit la dérivée en début de courbe.

De ces 4 égalités, faisons disparaître p_1, V_0 et V_1 .
1) = 4) et substituons 2) et 3), pour obtenir :

$$\frac{1}{2}\cdot U_2 - \frac{1}{2}\cdot U_0 = \lambda\cdot\frac{1}{6}\cdot U_0 + \lambda\cdot\frac{4}{6}\cdot U_1 + \lambda\cdot\frac{1}{6}\cdot U_2 - \mu\cdot\alpha\cdot U_0 - \mu\cdot\beta\cdot U_1 - \mu\cdot\gamma\cdot U_2$$

En réarrangent les termes et mettant les U_i en évidences :

$$U_0\cdot\left(\frac{1}{2} + \lambda\cdot\frac{1}{6} - \mu\cdot\alpha\right) + U_1\cdot\left(\lambda\cdot\frac{4}{6} - \mu\cdot\beta\right) + U_2\cdot\left(\lambda\cdot\frac{1}{6} - \mu\cdot\gamma - \frac{1}{2}\right) = 0$$

On veut que l'égalité soit vraie quelles que soient les valeurs des U_i , il faut donc que :

$\frac{1}{2} + \lambda\cdot\frac{1}{6} - \mu\cdot\alpha = 0$ et $\qquad \alpha = \frac{1}{2\cdot\mu} + \frac{\lambda}{6\mu}$

$\lambda\cdot\frac{4}{6} - \mu\cdot\beta = 0$ et $\qquad \beta = \frac{4\lambda}{6\mu}$

$\lambda\cdot\frac{1}{6} - \mu\cdot\gamma - \frac{1}{2} = 0 \qquad \gamma = \frac{\lambda}{6\mu} - \frac{1}{2\cdot\mu}$

Un choix naturel est : $\lambda = \mu = 1$. Avec ce choix, on obtient : $p_1 = V_1 - V_0$ et
$\alpha = \frac{4}{6}$; $\beta = \frac{4}{6}$; $\gamma = -\frac{2}{6}$.

Donc : $\boxed{V_0 = \frac{4}{6}\cdot U_0 + \frac{4}{6}\cdot U_1 - \frac{2}{6}\cdot U_2}$

Parenthèse, non retenue.
Un choix agréable pour obtenir une matrice tri-diagonale de passage des U_i aux V_i serait d'avoir
$\gamma = \frac{\lambda}{6\mu} - \frac{1}{2\cdot\mu} = 0$, donc $\lambda = 3\cdot\mu = 3$ et $\mu = 1$
$\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = 2$, $V_0 = \frac{3}{2}\cdot U_0 + 2\cdot U_1$, $p_1 = 3\cdot V_1 - V_0$. Pour p_1 ce n'est pas naturel. BOF.

Faisons des calculs similaires pour déterminer V_{n+1} .

On veut que les conditions suivantes soient réalisées :

1) $p_n = -\frac{1}{2}\cdot U_{n-1} + \frac{1}{2}\cdot U_{n+1}$
2) $V_{n+1} = \alpha\cdot U_{n-1} + \beta\cdot U_n + \gamma\cdot U_{n+1}$, avec α ; β ; γ libres
3) $V_n = \frac{1}{6}\cdot U_{n-1} + \frac{4}{6}\cdot U_n + \frac{1}{6}\cdot U_{n+1}$
4) $p_n = \mu\cdot V_{n+1} - \lambda\cdot V_n$, avec λ ; μ libres

On veut donc exprimer V_{n+1} en fonction de U_{n-1}, U_n et U_{n+1}, qui permette de déterminer p_n qui satisfasse la condition 1), qui décrit la dérivée en fin de courbe.

De ces 4 égalités, faisons disparaître p_n, V_n et V_{n+1} .
1) = 4) et substituons 2) et 3), pour obtenir :

$$\frac{1}{2}\cdot U_{n+1} - \frac{1}{2}\cdot U_{n-1} = \mu\cdot\alpha\cdot U_{n-1} + \mu\cdot\beta\cdot U_n + \mu\cdot\gamma\cdot U_{n+1} - \lambda\cdot\frac{1}{6}\cdot U_{n-1} - \lambda\cdot\frac{4}{6}\cdot U_n - \lambda\cdot\frac{1}{6}\cdot U_{n+1}$$

En réarrangent les termes et mettant les U_i en évidences :

$$U_{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2} - \lambda\cdot\frac{1}{6} + \mu\cdot\alpha\right) + U_n\cdot\left(\mu\cdot\beta - \lambda\cdot\frac{4}{6}\right) + U_{n+1}\cdot\left(\mu\cdot\gamma - \lambda\cdot\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

On veut que l'égalité soit vraie quelles que soient les valeurs des U_i , il faut donc que :

$\frac{1}{2} - \lambda\cdot\frac{1}{6} + \mu\cdot\alpha = 0$ et $\qquad \alpha = \frac{\lambda}{6\mu} - \frac{1}{2\cdot\mu}$

$\mu\cdot\beta - \lambda\cdot\frac{4}{6} = 0$ et $\qquad \beta = \frac{4\lambda}{6\mu}$

$\mu\cdot\gamma - \lambda\cdot\frac{1}{6} - \frac{1}{2} = 0$ $\qquad \gamma = \frac{\lambda}{6\mu} + \frac{1}{2\cdot\mu}$

Un choix naturel est : $\lambda = \mu = 1$. Avec ce choix, on obtient : $p_n = V_{n+1} - V_n$ et
$\alpha = -\frac{2}{6}$; $\beta = \frac{4}{6}$; $\gamma = \frac{4}{6}$.

Donc : $\boxed{V_{n+1} = -\frac{2}{6}\cdot U_{n-1} + \frac{4}{6}\cdot U_n + \frac{4}{6}\cdot U_{n+1}}$

Pour calculer la courbe de la B-spline passant par les points de contrôles :

$$\begin{aligned} s_i(t_i+\tau) = \frac{1}{6}\cdot[\quad & U_{i-1} + 4U_i + U_{i+1} + \\ & \tau\cdot(-3U_{i-1} + 3U_{i+1}) + \\ & \tau^2\cdot(3U_{i-1} - 6U_i + 3U_{i+1}) + \\ & \tau^3\cdot(-U_{i-1} + 3U_i - 3U_{i+1} + U_{i+2}) \quad] \qquad \tau\in[0..1] \end{aligned}$$

Écriture sous forme matricielle du passage des U_i aux V_i.

$$\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_n \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix}$$

Ici, $n = 4$. Il y a 4 points de passage et 6 points de contrôles.

Donc le passage des points de contrôles de la B-spline aux points de contrôles de la Math-spline est :

$$V_0 = \frac{4}{6} \cdot U_0 + \frac{4}{6} \cdot U_1 - \frac{2}{6} \cdot U_2 \quad ; \quad V_{n+1} = -\frac{2}{6} \cdot U_{n-1} + \frac{4}{6} \cdot U_n + \frac{4}{6} \cdot U_{n+1}$$

$$V_i = \frac{1}{6} \cdot U_{i-1} + \frac{4}{6} \cdot U_i + \frac{1}{6} \cdot U_{i+1} \text{ , pour } i = 1..n$$

Passage des points de contrôles de la Math-spline aux points de contrôles de la B-spline.

Le passage des points de contrôles de la Math-spline aux points de contrôles de la B-spline nécessite la résolution du système d'équation. Vu que la matrice est tri-diagonale avec diagonale dominante, le calcul est assez rapide. Les V_i sont donnés, on cherche les U_i.

Pour obtenir une matrice tri-diagonale, combinons les deux premières lignes et les deux dernières.

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} V_0 + 2 V_1 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_n \\ V_{n+1} + 2 V_n \end{pmatrix}$$

Résolution :

$diag_0 = 6$; $diag_{n+1} = 6$;

$diag_i = 4$, pour $i = 1..n$

$q_0 = 6 \cdot (V_0 + 2 \cdot V_1)$, $q_{n+1} = 6 \cdot (V_{n+1} + 2 \cdot V_n)$, $q_i = 6 \cdot V_i$, pour $i = 1..n$

$$diag_1 = diag_1 - \frac{1}{diag_0} \cdot 12 \quad \text{and} \quad q_1 = q_1 - \frac{1}{diag_0} \cdot q_0$$

for i=2 to n do $diag_i = diag_i - \dfrac{1}{diag_{i-1}} \cdot 1$ and $q_i = q_i - \dfrac{1}{diag_{i-1}} \cdot q_{i-1}$

$$diag_{n+1} = diag_{n+1} - \frac{12}{diag_n} \cdot 1 \quad \text{and} \quad q_{n+1} = q_{n+1} - \frac{12}{diag_n} \cdot q_n$$

$$U_{n+1} = \frac{q_{n+1}}{diag_{n+1}}$$

for $i = n$ downto 1 do $U_i = \dfrac{q_i - 1 \cdot U_{i+1}}{diag_i}$ Il y a $n + 2$ points ; n = nb_points - 2.

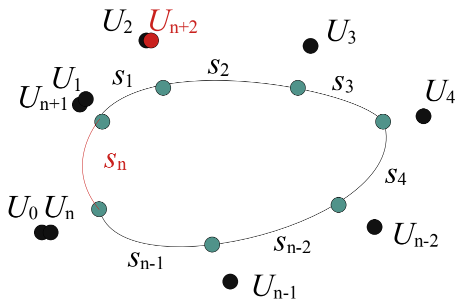
$$U_0 = \frac{q_0 - 12 \cdot U_1}{diag_0}$$

Par curiosité, regardons ce qu'est devenu le système après triangulation par la méthode de Gauss décrite dans la résolution ci-dessus.

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.7142857 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.7307692 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.7319588 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.7320442 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.7320503 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.7846093 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$6 * \begin{pmatrix} V_0+2V_1 \\ 0.666666\cdot V_1-0.166666\cdot V_0 \\ V_2-0.333333\cdot V_1+0.083333\cdot V_0 \\ V_3-0.285714\cdot V_2+0.095238\cdot V_1-0.023810\cdot V_0 \\ V_4-0.269231\cdot V_3+0.076923\cdot V_2-0.025641\cdot V_1+0.006410\cdot V_0 \\ V_5-0.268041\cdot V_4+0.072165\cdot V_3-0.020619\cdot V_2+0.006873\cdot V_1-0.001718\cdot V_0 \\ V_6-0.267955\cdot V_5+0.071823\cdot V_4-0.019337\cdot V_3+0.005525\cdot V_2-0.001842\cdot V_1+0.000460\cdot V_0 \\ V_n-0.267959\cdot V_6+0.071799\cdot V_5-0.019245\cdot V_4+0.005181\cdot V_3-0.001480\cdot V_2+0.000493\cdot V_1-0.000123\cdot V_0 \\ V_{n+1}-0.267959\cdot V_7+0.071799\cdot V_6-0.019228\cdot V_5+0.005157\cdot V_4-0.001388\cdot V_3+0.000397\cdot V_2-0.000132\cdot V_1+0.000033\cdot V_0 \end{pmatrix}$$

On remarque que très vite la diagonale de la matrice converge vers $2+\sqrt{3} = 3.732051$.
On remarque aussi que les V_i n'influencent rapidement plus les U_i éloignés.



Les B-splines fermés.

Dans le cas du dessin, $n = 7$

Le but est de rajouter un segment s_n, pour que la courbe soit fermée.
Pour cela, on va rajouter un point U_{n+2} et le segment s_n associé aux points U_{n+2}, U_{n+1}, U_n et U_{n-1}, et permettre de modifier la position des points U_{n+1}, et U_0.
On veut que ce segment termine sur U_0, soit C^1 et C^2 en U_0.

Les conditions de continuité, de continuité de la dérivée et de la dérivée seconde sont satisfait entre s_{n-1} et s_n si on a comme d'habitude :

$$\begin{aligned} s_n(t_n+\tau) = \frac{1}{6}\cdot\Big[& \quad U_{n-1} + 4U_n + U_{n+1} + \\ & \tau\cdot(-3U_{n-1} + 3U_{n+1}) + \\ & \tau^2\cdot(3U_{n-1} - 6U_i + 3U_{n+1}) + \\ & \tau^3\cdot(-U_{n-1} + 3U_n - 3U_{n+1} + U_{n+2}) \Big] \end{aligned}$$

Par contre, trois nouvelles conditions doivent êtres satisfaites pour avoir la continuité de la courbe, de la dérivée et de la dérivée seconde.
Il faut donc satisfaire :

$s_n(t_{n+1}) = s_1(t_1)$, $(t_{n+1} = t_n + 1)$. Donc $\frac{1}{6}\cdot[U_n + 4U_{n+1} + U_{n+2}] = \frac{1}{6}\cdot[U_0 + 4U_1 + U_2]$ et

$s'_n(t_{n+1}) = s'_1(t_1)$. Donc $\frac{1}{6}\cdot[3U_{n+2} - 3U_n] = \frac{1}{6}\cdot[3U_2 - 3U_0]$

$s''_n(t_{n+1}) = s''_1(t_1)$. Donc $\frac{1}{6}\cdot[U_n - 2U_{n+1} + U_{n+2}] = \frac{1}{6}\cdot[U_0 - 2U_1 + U_2]$

On vérifie qu'elles sont satisfaites si et seulement si :
$U_{n+2} = U_2$ et $U_{n+1} = U_1$ et $U_0 = U_n$

En conclusion, pour fermer une B-spline, il faut ajouter un point U_{n+2}, le placer sur le point U_2 et placer le point U_0 sur U_n et placer le point U_{n+1} sur U_1 .

la Math-spline fermée liée aux points V_0 à V_{n+1} correspondant aux points U_0 à U_{n+1}, donnera la même courbe que la B-spline fermée décrite ci-dessus.
Attention que la B-spline fermée possède un point de plus que la Math-spline fermée !

La modification de la position des points U_0 et U_{n+1} modifiera la position des points V_0 , V_1 , V_n et V_{n+1} , donc la courbe Math-spline. Mais elle ne modifiera pas la position d'autres points.
Pour une Math-spline fermée, les points V_0 et V_{n+1} sont ignorés ou calculés pour satisfaire la périodicité de la courbe.
Ces modifications des points U_0 et U_{n+1} permettent de fermer la courbe en la gardant lisse, sans perturber les segments s_2 à s_{n-2}.

Si une courbe d'une Math-spline est fermée, alors la B-spline correspondante aura automatiquement $U_{n+1} = U_1$ et $U_0 = U_n$. Fermer la B-spline donnera la même courbe que la Math-spline.

Étude du cas générale, où les temps de passages t_i ne sont plus régulier.
Résumons les caractéristiques des B-splines de degré 3.
une B-spline (de degré 3) est caractérisé par la données de :
° points de contrôles de la B-spline seront notés : U_i, pour $i = 0 .. n+1$;
° de temps de passages t_i pour $i = 1 .. n$ et
° de n-1 matrices caractéristiques 4x4 qui seront notées A_i
tel que si on définit :

$$s_i(t) = \begin{pmatrix} 1 & t-t_i & (t-t_i)^2 & (t-t_i)^3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_{i,1;1} & a_{i,1;2} & a_{i,1;3} & a_{i,1;4} \\ a_{i,2;1} & a_{i,2;2} & a_{i,2;3} & a_{i,2;4} \\ a_{i,3;1} & a_{i,3;2} & a_{i,3;3} & a_{i,3;4} \\ a_{i,4;1} & a_{i,4;2} & a_{i,4;3} & a_{i,4;4} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ U_{i+2} \end{pmatrix}$$

La courbe (B-spline) définie par $s(t) = s_i(t)$ pour $t \in [t_i .. t_{i+1}]$,
est deux fois continûment différentiable.

Les U_i sont des points ou des vecteurs de dimension 2 pour un plan et de dimension supérieur pour un espace plus grand. (3 pour notre espace et plus pour un mathématicien.)

Pour faire le lien avec ce qui précède : $s(t_i) = s_i(t_i) = V_i$, pour $i = 1 .. n$.
$s_i(t)$ est donc cubique par morceaux.

La question est de savoir comment déterminer les coefficients $a_{i,j;k}$ ci-dessus pour que la courbe s(t) définie ci-dessus soit toujours deux fois continûment différentiable, quels que soient les points U_i.

Cette fois, les coefficients $a_{i,j;k}$ dépendront de i.
Pour ne pas alourdir l'écriture, la dépendance en i ne sera pour toujours explicite.

Dans les quelques pages qui suivent, il y a beaucoup de calculs ! Ils peuvent être sautés, pour voir le résultat dans le résumé qui suit ces calculs.

Pour cela, partons de la définition d'une B-spline de la page Wikipedia :
https://fr.wikipedia.org/wiki/B-spline
Limitons le cas de B-spline de degré 3, transformons la notation pour l'adapter à celle utilisée précédemment.

Étant donné m+1 nœuds $\tilde{t}_i$ avec $\tilde{t}_0 \leq \tilde{t}_1 \leq .. \leq \tilde{t}_m$
une courbe B-spline de degré 3 est une courbe paramétrique $s(t)$ définie comme suit :

$$s(t) = \sum_{j=0}^{m-4} \tilde{b}_{j;3}(t) \cdot P_j, \quad t \in [\tilde{t}_3, \tilde{t}_{m-3}]$$

où les P_i forment un polygone appelé polygone de contrôle.
Le nombre de points composant ce polygone est égale à m - 3.
Les m-3 fonctions B-splines de degré k sont définies par récurrence sur le degré inférieur :

$$\tilde{b}_{j;0}(t) = \begin{cases} 1 & si \quad \tilde{t}_j \leq t < \tilde{t}_{j+1} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$\tilde{b}_{j;k}(t) = \frac{t - \tilde{t}_j}{\tilde{t}_{j+k} - \tilde{t}_j} \cdot \tilde{b}_{j;k-1}(t) + \frac{\tilde{t}_{j+k+1} - t}{\tilde{t}_{j+k+1} - \tilde{t}_{j+1}} \cdot \tilde{b}_{j+1;k-1}(t)$$

$$\tilde{b}_{j;k}(t) = \frac{t - \tilde{t}_j}{\tilde{h}_{j;k}} \cdot \tilde{b}_{j;k-1}(t) + \frac{\tilde{t}_{j+k+1} - t}{\tilde{h}_{j+1;k}} \cdot \tilde{b}_{j+1;k-1}(t), \text{ avec } \tilde{h}_{j;k} = \tilde{t}_{j+k} - \tilde{t}_j$$

$\tilde{b}_{j;k}(t)$ est nul si $t \notin [\tilde{t}_j, \tilde{t}_{j+k+1}]$

Changement de notations pour correspondre à celle utilisée précédemment.
$U_j = P_j \quad ; \quad t_{j-2} = \widetilde{t}_j$
m - 3 = n + 2 = nombre de points de contrôles
$n = m - 5$; $m = n + 5$
$b_{j-2;k}(t) = \widetilde{b}_{j;k}(t)$

Donc
$$s(t) = \sum_{j=0}^{n+1} b_{j-2;3}(t)\cdot U_j\,, \quad t\in[t_1, t_n]$$

$$b_{j-2;0}(t) = \widetilde{b}_{j;0}(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t_{j-2} \le t < t_{j-1} \\ 0 & sinon \end{cases}$$, reste à définir les valeurs de t_{-2} , t_{-1} et t_0 !?!

$$\boxed{b_{j;0}(t) = \widetilde{b}_{j+2;0}(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t_j \le t < t_{j+1} \\ 0 & sinon \end{cases}}$$

$$\boxed{b_{j;k}(t) = \frac{t - t_j}{h_{j;k}}\cdot b_{j;k-1}(t) + \frac{t_{j+k+1} - t}{h_{j+1;k}}\cdot b_{j+1;k-1}(t)}$$, avec $h_{j;k} = t_{j+k} - t_j$, donc $h_j = h_{j;1} = t_{j+1} - t_j$

$b_{j;k}(t)$ est nul si $t \notin [t_j, t_{j+k+1}]$
$b_{j;3}(t)$ est nul si $t \notin]t_j, t_{j+4}[$ aussi : $b_{j-4;3}(t)$ est nul si $t \notin]t_{j-4}, t_j[$.

$$s_i(t) = \sum_{j=0}^{n+1} b_{j-2;3}(t)\cdot U_j = \sum_{j=i-1}^{j+2} b_{j-2;3}(t)\cdot U_j\,, \quad t\in[t_i, t_{i+1}]$$
Ainsi on voit bien que $s_i(t)$ ne dépend que des points U_{i-1} à U_{i+2}.

Explicitons les $b_{j;k}(t)$.

$$b_{j;1}(t) = \frac{t - t_j}{h_{j;1}}\cdot b_{j;0}(t) + \frac{t_{j+2} - t}{h_{j+1;1}}\cdot b_{j+1;0}(t) \qquad b_{j+1;1}(t) = \frac{t - t_{j+1}}{h_{j+1;1}}\cdot b_{j+1;0}(t) + \frac{t_{j+3} - t}{h_{j+2;1}}\cdot b_{j+2;0}(t)$$

$$b_{j;2}(t) = \frac{t - t_j}{h_{j;2}}\cdot b_{j;1}(t) + \frac{t_{j+3} - t}{h_{j+1;2}}\cdot b_{j+1;1}(t)$$

$$b_{j;2}(t) = \frac{t - t_j}{h_{j;2}}\cdot\left(\frac{t - t_j}{h_{j;1}}\cdot b_{j;0}(t) + \frac{t_{j+2} - t}{h_{j+1;1}}\cdot b_{j+1;0}(t)\right) + \frac{t_{j+3} - t}{h_{j+1;2}}\cdot\left(\frac{t - t_{j+1}}{h_{j+1;1}}\cdot b_{j+1;0}(t) + \frac{t_{j+3} - t}{h_{j+2;1}}\cdot b_{j+2;0}(t)\right)$$

$$b_{j+1;2}(t) = \frac{t - t_{j+1}}{h_{j+1;2}}\cdot\left(\frac{t - t_{j+1}}{h_{j+1;1}}\cdot b_{j+1;0}(t) + \frac{t_{j+3} - t}{h_{j+2;1}}\cdot b_{j+2;0}(t)\right) + \frac{t_{j+4} - t}{h_{j+2;2}}\cdot\left(\frac{t - t_{j+2}}{h_{j+2;1}}\cdot b_{j+2;0}(t) + \frac{t_{j+4} - t}{h_{j+3;1}}\cdot b_{j+3;0}(t)\right)$$

$$b_{j;3}(t) = \frac{t - t_j}{h_{j;3}}\cdot b_{j;2}(t) + \frac{t_{j+4} - t}{h_{j+1;3}}\cdot b_{j+1;2}(t)$$

$$\boxed{b_{j;3}(t) = \frac{t - t_j}{h_{j;3}}\cdot\left(\frac{t - t_j}{h_{j;2}}\cdot\left(\frac{t - t_j}{h_{j;1}}\cdot b_{j;0}(t) + \frac{t_{j+2} - t}{h_{j+1;1}}\cdot b_{j+1;0}(t)\right) + \frac{t_{j+3} - t}{h_{j+1;2}}\cdot\left(\frac{t - t_{j+1}}{h_{j+1;1}}\cdot b_{j+1;0}(t) + \frac{t_{j+3} - t}{h_{j+2;1}}\cdot b_{j+2;0}(t)\right)\right)}$$

$$+ \boxed{\frac{t_{j+4} - t}{h_{j+1;3}}\cdot\left(\frac{t - t_{j+1}}{h_{j+1;2}}\cdot\left(\frac{t - t_{j+1}}{h_{j+1;1}}\cdot b_{j+1;0}(t) + \frac{t_{j+3} - t}{h_{j+2;1}}\cdot b_{j+2;0}(t)\right) + \frac{t_{j+4} - t}{h_{j+2;2}}\cdot\left(\frac{t - t_{j+2}}{h_{j+2;1}}\cdot b_{j+2;0}(t) + \frac{t_{j+4} - t}{h_{j+3;1}}\cdot b_{j+3;0}(t)\right)\right)}$$

Évaluons en $b_{j;3}(t_j)$ pour avoir déjà des coefficients.

Rappelons que : $s_i(t_i) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_{i,1;1} & a_{i,1;2} & a_{i,1;3} & a_{i,1;4} \\ a_{i,2;1} & a_{i,2;2} & a_{i,2;3} & a_{i,2;4} \\ a_{i,3;1} & a_{i,3;2} & a_{i,3;3} & a_{i,3;4} \\ a_{i,4;1} & a_{i,4;2} & a_{i,4;3} & a_{i,4;4} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ U_{i+2} \end{pmatrix}$

$s_i(t_i) = a_{i,1;1} \cdot U_{i-1} + a_{i,1;2} \cdot U_i + a_{i,1;3} \cdot U_{i+1} + a_{i,1;4} \cdot U_{i+2}$

et

$s_i(t_i) = \sum_{j=i-1}^{j+2} b_{j-2;3}(t_i) \cdot U_j$

$s_i(t_i) = b_{i-3;3}(t_i) \cdot U_{i-1} + b_{i-2;3}(t_i) \cdot U_i + b_{i-1;3}(t_i) \cdot U_{i+1} + b_{i;3}(t_i) \cdot U_{i+2}$

Donc il y a un lien direct entre les coefficients de la matrice et les $b_{j;3}(t_i)$

Ils sont explicités ci-dessous.

Rappelons que $b_{j;0}(t)$ est nul si $t \notin [t_j, t_{j+1}]$. $b_{j;0}(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t_j \le t < t_{j+1} \\ 0 & sinon \end{cases}$

$b_{j;0}(t_i) = 1$ seulement si $i = j$. Dans le cas où $t_j = j$, on a $h_{j;k} = k$

$$\boxed{b_{j;3}(t_i) = \frac{t_i - t_j}{h_{j;3}} \cdot \left(\frac{t_i - t_j}{h_{j;2}} \cdot \left(\frac{t_i - t_j}{h_{j;1}} \cdot b_{j;0}(t_i) + \frac{t_{j+2} - t_i}{h_{j+1;1}} \cdot b_{j+1;0}(t_i) \right) + \frac{t_{j+3} - t_i}{h_{j+1;2}} \cdot \left(\frac{t_i - t_{j+1}}{h_{j+1;1}} \cdot b_{j+1;0}(t_i) + \frac{t_{j+3} - t_i}{h_{j+2;1}} \cdot b_{j+2;0}(t_i) \right) \right)}$$

$$+ \boxed{\frac{t_{j+4} - t_i}{h_{j+1;3}} \cdot \left(\frac{t_i - t_{j+1}}{h_{j+1;2}} \cdot \left(\frac{t_i - t_{j+1}}{h_{j+1;1}} \cdot b_{j+1;0}(t_i) + \frac{t_{j+3} - t_i}{h_{j+2;1}} \cdot b_{j+2;0}(t_i) \right) + \frac{t_{j+4} - t_i}{h_{j+2;2}} \cdot \left(\frac{t_i - t_{j+2}}{h_{j+2;1}} \cdot b_{j+2;0}(t_i) + \frac{t_{j+4} - t_i}{h_{j+3;1}} \cdot b_{j+3;0}(t_i) \right) \right)}$$

<u>Premier coefficient :</u>

$a_{i,1;1} = b_{i-3;3}(t_i) =$

$$\frac{t_i - t_{i-3}}{h_{i-3;3}} \cdot \left(\frac{t_i - t_{i-3}}{h_{i-3;2}} \cdot \left(\frac{t_i - t_{i-3}}{h_{i-3;1}} \cdot b_{i-3;0}(t_i) + \frac{t_{i-1} - t_i}{h_{i-2;1}} \cdot b_{i-2;0}(t_i) \right) + \frac{t_i - t_i}{h_{i-2;2}} \cdot \left(\frac{t_i - t_{i-2}}{h_{i-2;1}} \cdot b_{i-2;0}(t_i) + \frac{t_i - t_i}{h_{i-1;1}} \cdot b_{i-1;0}(t_i) \right) \right) +$$

$$\frac{t_{i+1} - t_i}{h_{i-2;3}} \cdot \left(\frac{t_i - t_{i-2}}{h_{i-2;2}} \cdot \left(\frac{t_i - t_{i-2}}{h_{i-2;1}} \cdot b_{i-2;0}(t_i) + \frac{t_i - t_i}{h_{i-1;1}} \cdot b_{i-1;0}(t_i) \right) + \frac{t_{i+1} - t_i}{h_{i-1;2}} \cdot \left(\frac{t_i - t_{i-1}}{h_{i-1;1}} \cdot b_{i-1;0}(t_i) + \frac{t_{i+1} - t_i}{h_{i;1}} \cdot b_{i;0}(t_i) \right) \right)$$

$= a_{i,1;1} =$

$$\frac{t_{i+1} - t_i}{h_{i-2;3}} \cdot \frac{t_{i+1} - t_i}{h_{i-1;2}} \cdot \frac{t_{i+1} - t_i}{h_{i;1}} = \frac{h_{i;1}}{h_{i-2;3}} \cdot \frac{h_{i;1}}{h_{i-1;2}} \cdot \frac{h_{i;1}}{h_{i;1}}$$

Donc $\boxed{a_{i,1;1} = b_{i-3;3}(t_i) = \frac{h_{i;1}}{h_{i-2;3}} \cdot \frac{h_{i;1}}{h_{i-1;2}}}$

Vérification dans le cas équidistant où $t_j = j$, $h_{j;k} = k$:

$a_{i,1;1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{6}$, c’est ce que l’on attendait !

Deuxième coefficient :

Rappelons que $b_{j;3}(t_i) =$

$$\frac{t_i-t_j}{h_{j;3}}\cdot\left(\frac{t_i-t_j}{h_{j;2}}\cdot\left(\frac{t_i-t_j}{h_{j;1}}\cdot b_{j;0}(t_i)+\frac{t_{j+2}-t_i}{h_{j+1;1}}\cdot b_{j+1;0}(t_i)\right)+\frac{t_{j+3}-t_i}{h_{j+1;2}}\cdot\left(\frac{t_i-t_{j+1}}{h_{j+1;1}}\cdot b_{j+1;0}(t_i)+\frac{t_{j+3}-t_i}{h_{j+2;1}}\cdot b_{j+2;0}(t_i)\right)\right)+$$

$$\frac{t_{j+4}-t_i}{h_{j+1;3}}\cdot\left(\frac{t_i-t_{j+1}}{h_{j+1;2}}\cdot\left(\frac{t_i-t_{j+1}}{h_{j+1;1}}\cdot b_{j+1;0}(t_i)+\frac{t_{j+3}-t_i}{h_{j+2;1}}\cdot b_{j+2;0}(t_i)\right)+\frac{t_{j+4}-t_i}{h_{j+2;2}}\cdot\left(\frac{t_i-t_{j+2}}{h_{j+2;1}}\cdot b_{j+2;0}(t_i)+\frac{t_{j+4}-t_i}{h_{j+3;1}}\cdot b_{j+3;0}(t_i)\right)\right)$$

$a_{i,1;2} = b_{i-2;3}(t_i) =$

$$\frac{t_i-t_{i-2}}{h_{i-2;3}}\cdot\left(\frac{t_i-t_{i-2}}{h_{i-2;2}}\cdot\left(\frac{t_i-t_{i-2}}{h_{i-2;1}}\cdot b_{i-2;0}(t_i)+\frac{t_i-t_i}{h_{i-1;1}}\cdot b_{i-1;0}(t_i)\right)+\frac{t_{i+1}-t_i}{h_{i-1;2}}\cdot\left(\frac{t_i-t_{i-1}}{h_{i-1;1}}\cdot b_{i-1;0}(t_i)+\frac{t_{i+1}-t_i}{h_{i;1}}\cdot b_{i;0}(t_i)\right)\right)+$$

$$\frac{t_{i+2}-t_i}{h_{i-1;3}}\cdot\left(\frac{t_i-t_{i-1}}{h_{i-1;2}}\cdot\left(\frac{t_i-t_{i-1}}{h_{i-1;1}}\cdot b_{i-1;0}(t_i)+\frac{t_{i+1}-t_i}{h_{i;1}}\cdot b_{i;0}(t_i)\right)+\frac{t_{i+2}-t_i}{h_{i;2}}\cdot\left(\frac{t_i-t_i}{h_{i;1}}\cdot b_{i;0}(t_i)+\frac{t_{i+2}-t_i}{h_{i+1;1}}\cdot b_{i+1;0}(t_i)\right)\right)$$

$= a_{i,1;2} =$

$$\frac{t_i-t_{i-2}}{h_{i-2;3}}\cdot\frac{t_{i+1}-t_i}{h_{i-1;2}}\cdot\frac{t_{i+1}-t_i}{h_{i;1}}+\frac{t_{i+2}-t_i}{h_{i-1;3}}\cdot\frac{t_i-t_{i-1}}{h_{i-1;2}}\cdot\frac{t_{i+1}-t_i}{h_{i;1}} =$$

$$\frac{h_{i-2;2}}{h_{i-2;3}}\cdot\frac{h_{i;1}}{h_{i-1;2}}\cdot\frac{h_{i;1}}{h_{i;1}}+\frac{h_{i;2}}{h_{i-1;3}}\cdot\frac{h_{i-1;1}}{h_{i-1;2}}\cdot\frac{h_{i;1}}{h_{i;1}} =$$

Donc $\boxed{a_{i,1;2} = b_{i-2;3}(t_i) = \frac{h_{i-2;2}}{h_{i-2;3}}\cdot\frac{h_{i;1}}{h_{i-1;2}}+\frac{h_{i;2}}{h_{i-1;3}}\cdot\frac{h_{i-1;1}}{h_{i-1;2}}}$

Vérification dans le cas équidistant où $t_j = j$, $h_{j;k} = k$:

$a_{i,1;2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{6}$, c'est ce que l'on attendait !

Troisième coefficient :

$a_{i,1;3} = b_{i-1;3}(t_i) =$

$$\frac{t_i-t_{i-1}}{h_{i-1;3}}\cdot\left(\frac{t_i-t_{i-1}}{h_{i-1;2}}\cdot\left(\frac{t_i-t_{i-1}}{h_{i-1;1}}\cdot b_{i-1;0}(t_i)+\frac{t_{i+1}-t_i}{h_{i;1}}\cdot b_{i;0}(t_i)\right)+\frac{t_{i+2}-t_i}{h_{i;2}}\cdot\left(\frac{t_i-t_i}{h_{i;1}}\cdot b_{i;0}(t_i)+\frac{t_{i+2}-t_i}{h_{i+1;1}}\cdot b_{i+1;0}(t_i)\right)\right)+$$

$$\frac{t_{i+3}-t_i}{h_{i;3}}\cdot\left(\frac{t_i-t_i}{h_{i;2}}\cdot\left(\frac{t_i-t_i}{h_{i;1}}\cdot b_{i;0}(t_i)+\frac{t_{i+2}-t_i}{h_{i+1;1}}\cdot b_{i+1;0}(t_i)\right)+\frac{t_{i+3}-t_i}{h_{i+1;2}}\cdot\left(\frac{t_i-t_{i+1}}{h_{i+1;1}}\cdot b_{i+1;0}(t_i)+\frac{t_{i+3}-t_i}{h_{i+2;1}}\cdot b_{i+2;0}(t_i)\right)\right)$$

$= a_{i,1;3} =$

$$\frac{t_i-t_{i-1}}{h_{i-1;3}}\cdot\frac{t_i-t_{i-1}}{h_{i-1;2}}+0 =$$

Donc $\boxed{a_{i,1;3} = \frac{h_{i-1;1}}{h_{i-1;3}}\cdot\frac{h_{i-1;1}}{h_{i-1;2}}}$

Vérification dans le cas équidistant où $t_j = j$, $h_{j;k} = k$:

$a_{i,1;3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, c'est ce que l'on attendait !

<u>Quatrième coefficient :</u>

$a_{i,1;4} = b_{i;3}(t_i) =$

$0 +$

$$\frac{t_{i+4}-t_i}{h_{i+1;3}}\cdot\left(\frac{t_i-t_{i+1}}{h_{i+1;2}}\cdot\left(\frac{t_i-t_{i+1}}{h_{i+1;1}}\cdot b_{i+1;0}(t_i)+\frac{t_{i+3}-t_i}{h_{i+2;1}}\cdot b_{i+2;0}(t_i)\right)+\frac{t_{i+4}-t_i}{h_{i+2;2}}\cdot\left(\frac{t_i-t_{i+2}}{h_{i+2;1}}\cdot b_{i+2;0}(t_i)+\frac{t_{i+4}-t_i}{h_{i+3;1}}\cdot b_{i+3;0}(t_i)\right)\right) = 0$$

Donc $\boxed{a_{i,1;4} = 0}$, c'est ce que l'on attendait

Une <u>vérification plus importante</u> est : $a_{i,1;1} + a_{i,1;2} + a_{i,1;3} + a_{i,1;4} = 1$

Si ce n'était pas le cas, une translation des points de contrôles ne donnerait pas une translation de la courbe. Elle serait donc dépendante du choix de l'origine.

Règle utile pour les simplifications :

$h_{i+k;l} + h_{i+m;k-m} = t_{i+k+l} - t_{i+k} + t_{i+k} - t_{i+m} = h_{i+m;k+l-m2}$

$$a_{i,1;1} + a_{i,2;1} + a_{i,3;1} + a_{i,4;1} = \frac{h_{i;1}}{h_{i-2;3}}\cdot\frac{h_{i;1}}{h_{i-1;2}} + \frac{h_{i-2;2}}{h_{i-2;3}}\cdot\frac{h_{i;1}}{h_{i-1;2}} + \frac{h_{i;2}}{h_{i-1;3}}\cdot\frac{h_{i-1;1}}{h_{i-1;2}} + \frac{h_{i-1;1}}{h_{i-1;3}}\cdot\frac{h_{i-1;1}}{h_{i-1;2}} + 0$$

$$= \frac{h_{i;1}\cdot h_{i;1}\cdot h_{i-1;3} + h_{i-2;2}\cdot h_{i;1}\cdot h_{i-1;3} + h_{i;2}\cdot h_{i-1;1}\cdot h_{i-2;3} + h_{i-1;1}\cdot h_{i-1;1}\cdot h_{i-2;3}}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}\cdot h_{i-1;3}}$$

$$= \frac{h_{i;1}\cdot h_{i-1;3}\cdot(h_{i;1} + h_{i-2;2}) + h_{i-1;1}\cdot h_{i-2;3}\cdot(h_{i;2} + h_{i-1;1})}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}\cdot h_{i-1;3}}$$

$$= \frac{h_{i;1}\cdot h_{i-1;3}\cdot(h_{i-2;3}) + h_{i-1;1}\cdot h_{i-2;3}\cdot(h_{i-1;3})}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}\cdot h_{i-1;3}}$$

$$= \frac{h_{i;1} + h_{i-1;1}}{h_{i-1;2}} \quad = \frac{h_{i-1;2}}{h_{i-1;2}} = 1$$

C'est magique ! Ça marche !

<u>Cherchons les coefficients de la première colonne,</u> $a_{i,4;1}$; $a_{i,3;1}$; $a_{i,2;1}$; $a_{i,1;1}$

Ce sont les coefficients du polynôme de $b_{i-3;3}(t)$, écrit comme polynôme en $(t-t_i)^3$.

Rappelons que :

$$b_{j;3}(t) = \frac{t-t_j}{h_{j;3}}\cdot\left(\frac{t-t_j}{h_{j;2}}\cdot\left(\frac{t-t_j}{h_{j;1}}\cdot b_{j;0}(t)+\frac{t_{j+2}-t}{h_{j+1;1}}\cdot b_{j+1;0}(t)\right)+\frac{t_{j+3}-t}{h_{j+1;2}}\cdot\left(\frac{t-t_{j+1}}{h_{j+1;1}}\cdot b_{j+1;0}(t)+\frac{t_{j+3}-t}{h_{j+2;1}}\cdot b_{j+2;0}(t)\right)\right)$$

$$+ \frac{t_{j+4}-t}{h_{j+1;3}}\cdot\left(\frac{t-t_{j+1}}{h_{j+1;2}}\cdot\left(\frac{t-t_{j+1}}{h_{j+1;1}}\cdot b_{j+1;0}(t)+\frac{t_{j+3}-t}{h_{j+2;1}}\cdot b_{j+2;0}(t)\right)+\frac{t_{j+4}-t}{h_{j+2;2}}\cdot\left(\frac{t-t_{j+2}}{h_{j+2;1}}\cdot b_{j+2;0}(t)+\frac{t_{j+4}-t}{h_{j+3;1}}\cdot b_{j+3;0}(t)\right)\right)$$

et

$s_i(t) = b_{i-3;3}(t)\cdot U_{i-1} + b_{i-2;3}(t)\cdot U_i + b_{i-1;3}(t)\cdot U_{i+1} + b_{i;3}(t)\cdot U_{i+2}$

Donc

$a_{i,4;1}$ est le facteur de $(t-t_i)^3$ de $b_{i-3;3}(t)$

$a_{i,3;1}$ est le facteur de $(t-t_i)^2$ de $b_{i-3;3}(t)$

$a_{i,2;1}$ est le facteur de $(t-t_i)^1$ de $b_{i-3;3}(t)$

$a_{i,1;1}$ est le facteur de $(t-t_i)^0$ de $b_{i-3;3}(t)$

$$b_{i-3;3}(t) = \frac{t-t_{i-3}}{h_{i-3;3}} \cdot \left(\frac{t-t_{i-3}}{h_{i-3;2}} \cdot \left(\frac{t-t_{i-3}}{h_{i-3;1}} \cdot b_{i-3;0}(t) + \frac{t_{i-1}-t}{h_{i-2;1}} \cdot b_{i-2;0}(t) \right) + \frac{t_i-t}{h_{i-2;2}} \cdot \left(\frac{t-t_{i-2}}{h_{i-2;1}} \cdot b_{i-2;0}(t) + \frac{t_i-t}{h_{i-1;1}} \cdot b_{i-1;0}(t) \right) \right)$$

$$+ \frac{t_{i+1}-t}{h_{i-2;3}} \cdot \left(\frac{t-t_{i-2}}{h_{i-2;2}} \cdot \left(\frac{t-t_{i-2}}{h_{i-2;1}} \cdot b_{i-2;0}(t) + \frac{t_i-t}{h_{i-1;1}} \cdot b_{i-1;0}(t) \right) + \frac{t_{i+1}-t}{h_{i-1;2}} \cdot \left(\frac{t-t_{i-1}}{h_{i-1;1}} \cdot b_{i-1;0}(t) + \frac{t_{i+1}-t}{h_{i;1}} \cdot b_{i;0}(t) \right) \right)$$

$t \in [t_i, t_{i+1}]$, donc $b_{j;0}(t) = 1$ seulement si $j = i$.
Cela simplifie :

$$b_{i-3;3}(t) = 0 + \frac{t_{i+1}-t}{h_{i-2;3}} \cdot \left(0 + \frac{t_{i+1}-t}{h_{i-1;2}} \cdot \left(0 + \frac{t_{i+1}-t}{h_{i;1}} \right) \right)$$

$$b_{i-3;3}(t) = -\frac{t - t_{i+1}}{h_{i-2;3}} \cdot \frac{t - t_{i+1}}{h_{i-1;2}} \cdot \frac{t - t_{i+1}}{h_{i;1}}$$

$$b_{i-3;3}(t) = -\frac{(t-t_i) + t_i - t_{i+1}}{h_{i-2;3}} \cdot \frac{(t-t_i) + t_i - t_{i+1}}{h_{i-1;2}} \cdot \frac{(t-t_i) + t_i - t_{i+1}}{h_{i;1}}$$

$$b_{i-3;3}(t) = -\frac{(t-t_i) - h_{i;1}}{h_{i-2;3}} \cdot \frac{(t-t_i) - h_{i;1}}{h_{i-1;2}} \cdot \frac{(t-t_i) - h_{i;1}}{h_{i;1}}$$

$$b_{i-3;3}(t) = -\frac{\left((t-t_i) - h_{i;1}\right)^3}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}}$$

$$b_{i-3;3}(t) =$$

$$- \frac{1}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} \cdot (t-t_i)^3 + \frac{3 h_{i;1}}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} \cdot (t-t_i)^2 - \frac{3 h_{i;1}^2}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} \cdot (t-t_i) + \frac{h_{i;1}^3}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}}$$

$$b_{i-3;3}(t) = - \frac{1}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} \cdot (t-t_i)^3 + \frac{3}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2}} \cdot (t-t_i)^2 - \frac{3 h_{i;1}}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2}} \cdot (t-t_i) + \frac{h_{i;1}^2}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2}}$$

Les 4 facteurs, donnent les 4 coefficients : $a_{i,4;1}$; $a_{i,3;1}$; $a_{i,2;1}$ et $a_{i,1;1}$
On retrouve la valeur de $a_{i,1;1}$
On a donc :

$a_{i,1;1} = \dfrac{h_{i;1}^2}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2}}$ $= \dfrac{1}{6}$ dans le cas équidistant où $t_j = j$, $h_{j;k} = k$

$a_{i,2;1} = -\dfrac{3 h_{i;1}}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2}}$ = -3 dans le cas équidistant

$a_{i,3;1} = \dfrac{3}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2}}$ $= \dfrac{3}{6}$ dans le cas équidistant

$a_{i,4;1} = -\dfrac{1}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}}$ $= -\dfrac{1}{6}$ dans le cas équidistant

<u>Cherchons les coefficients de la deuxième colonne,</u> $a_{i,4;2}$; $a_{i,3;2}$; $a_{i,2;2}$; $a_{i,1;2}$
Ce sont les coefficients du polynôme de $b_{i-2;3}(t)$, écrit comme polynôme en $(t-t_i)^3$.

Rappelons que :

$$b_{j;3}(t) = \frac{t-t_j}{h_{j;3}} \cdot \left(\frac{t-t_j}{h_{j;2}} \cdot \left(\frac{t-t_j}{h_{j;1}} \cdot b_{j;0}(t) + \frac{t_{j+2}-t}{h_{j+1;1}} \cdot b_{j+1;0}(t) \right) + \frac{t_{j+3}-t}{h_{j+1;2}} \cdot \left(\frac{t-t_{j+1}}{h_{j+1;1}} \cdot b_{j+1;0}(t) + \frac{t_{j+3}-t}{h_{j+2;1}} \cdot b_{j+2;0}(t) \right) \right)$$
$$+ \frac{t_{j+4}-t}{h_{j+1;3}} \cdot \left(\frac{t-t_{j+1}}{h_{j+1;2}} \cdot \left(\frac{t-t_{j+1}}{h_{j+1;1}} \cdot b_{j+1;0}(t) + \frac{t_{j+3}-t}{h_{j+2;1}} \cdot b_{j+2;0}(t) \right) + \frac{t_{j+4}-t}{h_{j+2;2}} \cdot \left(\frac{t-t_{j+2}}{h_{j+2;1}} \cdot b_{j+2;0}(t) + \frac{t_{j+4}-t}{h_{j+3;1}} \cdot b_{j+3;0}(t) \right) \right)$$

et

$$s_i(t) = b_{i-3;3}(t) \cdot U_{i-1} + b_{i-2;3}(t) \cdot U_i + b_{i-1;3}(t) \cdot U_{i+1} + b_{i;3}(t) \cdot U_{i+2}$$

Donc
$a_{i,4;2}$ est le facteur de $(t-t_i)^3$ de $b_{i-2;3}(t)$
$a_{i,3;2}$ est le facteur de $(t-t_i)^2$ de $b_{i-2;3}(t)$
$a_{i,2;2}$ est le facteur de $(t-t_i)^1$ de $b_{i-2;3}(t)$
$a_{i,1;2}$ est le facteur de $(t-t_i)^0$ de $b_{i-2;3}(t)$

$$b_{i-2;3}(t) = \frac{t-t_{i-2}}{h_{i-2;3}} \cdot \left(\frac{t-t_{i-2}}{h_{i-2;2}} \cdot \left(\frac{t-t_{i-2}}{h_{i-2;1}} \cdot b_{i-2;0}(t) + \frac{t_i-t}{h_{i-1;1}} \cdot b_{i-1;0}(t) \right) + \frac{t_{i+1}-t}{h_{i-1;2}} \cdot \left(\frac{t-t_{i-1}}{h_{i-1;1}} \cdot b_{i-1;0}(t) + \frac{t_{i+1}-t}{h_{i;1}} \cdot b_{i;0}(t) \right) \right)$$
$$+ \frac{t_{i+2}-t}{h_{i-1;3}} \cdot \left(\frac{t-t_{i-1}}{h_{i-1;2}} \cdot \left(\frac{t-t_{i-1}}{h_{i-1;1}} \cdot b_{i-1;0}(t) + \frac{t_{i+1}-t}{h_{i;1}} \cdot b_{i;0}(t) \right) + \frac{t_{i+2}-t}{h_{i;2}} \cdot \left(\frac{t-t_i}{h_{i;1}} \cdot b_{i;0}(t) + \frac{t_{i+2}-t}{h_{i+1;1}} \cdot b_{i+1;0}(t) \right) \right)$$

$t \in [t_i, t_{i+1}]$, donc $b_{j;0}(t) = 1$ seulement si $j = i$.
Cela simplifie :

$$b_{i-2;3}(t) = \frac{t-t_{i-2}}{h_{i-2;3}} \cdot \frac{t_{i+1}-t}{h_{i-1;2}} \cdot \frac{t_{i+1}-t}{h_{i;1}} + \frac{t_{i+2}-t}{h_{i-1;3}} \cdot \left(\frac{t-t_{i-1}}{h_{i-1;2}} \cdot \frac{t_{i+1}-t}{h_{i;1}} + \frac{t_{i+2}-t}{h_{i;2}} \cdot \frac{t-t_i}{h_{i;1}} \right)$$
$$b_{i-2;3}(t) = \frac{t-t_{i-2}}{h_{i-2;3}} \cdot \frac{t-t_{i+1}}{h_{i-1;2}} \cdot \frac{t-t_{i+1}}{h_{i;1}} + \frac{t-t_{i+2}}{h_{i-1;3}} \cdot \left(\frac{t-t_{i-1}}{h_{i-1;2}} \cdot \frac{t-t_{i+1}}{h_{i;1}} + \frac{t-t_{i+2}}{h_{i;2}} \cdot \frac{t-t_i}{h_{i;1}} \right)$$

$$b_{i-2;3}(t) = \frac{(t-t_i) + t_i - t_{i-2}}{h_{i-2;3}} \cdot \frac{(t-t_i) + t_i - t_{i+1}}{h_{i-1;2}} \cdot \frac{(t-t_i) + t_i - t_{i+1}}{h_{i;1}} +$$
$$\frac{(t-t_i) + t_i - t_{i+2}}{h_{i-1;3}} \cdot \left(\frac{(t-t_i) + t_i - t_{i-1}}{h_{i-1;2}} \cdot \frac{(t-t_i) + t_i - t_{i+1}}{h_{i;1}} + \frac{(t-t_i) + t_i - t_{i+2}}{h_{i;2}} \cdot \frac{(t-t_i) + t_i - t_i}{h_{i;1}} \right)$$

$$b_{i-2;3}(t) = \frac{(t-t_i)+h_{i-2;2}}{h_{i-2;3}} \cdot \frac{(t-t_i)-h_{i;1}}{h_{i-1;2}} \cdot \frac{(t-t_i)-h_{i;1}}{h_{i;1}} + \frac{(t-t_i)-h_{i;2}}{h_{i-1;3}} \cdot \left(\frac{(t-t_i)+h_{i-1;1}}{h_{i-1;2}} \cdot \frac{(t-t_i)-h_{i;1}}{h_{i;1}} + \frac{(t-t_i)-h_{i;2}}{h_{i;2}} \cdot \frac{(t-t_i)}{h_{i;1}} \right)$$

$$\begin{aligned} b_{i-2;3}(t) = {} & (t-t_i)^3 \cdot \left(\frac{1}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{1}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{1}{h_{i-1;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}} \right) \\ & + (t-t_i)^2 \cdot \left(\frac{h_{i-2;2} - h_{i;1} - h_{i;1}}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i-1;1} - h_{i;2} - h_{i;1}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} - \frac{h_{i;2} + h_{i;2}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}} \right) \\ & + (t-t_i) \cdot \left(\frac{h_{i;1}^2 - 2\, h_{i;1} \cdot h_{i-2;2}}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i;2} \cdot h_{i;1} - h_{i;2} \cdot h_{i-1;1} - h_{i-1;1} \cdot h_{i;1}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i;2}^2}{h_{i-1;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}} \right) \\ & + \frac{h_{i-2;2}}{h_{i-2;3}} \cdot \frac{h_{i;1}}{h_{i-1;2}} + \frac{h_{i;2}}{h_{i-1;3}} \cdot \frac{h_{i-1;1}}{h_{i-1;2}} \end{aligned}$$

Les 4 facteurs, donnent les 4 coefficients : $a_{i,4;2}$; $a_{i,3;2}$; $a_{i,2;2}$ et $a_{i,1;2}$
On retrouve la valeur de $a_{i,1;2}$
On a donc :

$$a_{i,1;2} = \frac{h_{i-2;2}}{h_{i-2;3}} \cdot \frac{h_{i;1}}{h_{i-1;2}} + \frac{h_{i;2}}{h_{i-1;3}} \cdot \frac{h_{i-1;1}}{h_{i-1;2}} \qquad = \frac{4}{6} \text{ dans le cas équidistant où } t_j = j\,,\ h_{j;k} = k$$

$$a_{i,2;2} = \frac{h_{i;1} - 2\, h_{i-2;2}}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2}} + \frac{h_{i;2} \cdot h_{i;1} - h_{i;2} \cdot h_{i-1;1} - h_{i-1;1} \cdot h_{i;1}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i;2}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i;1}} \quad = 0 \text{ si équidistant}$$

$$a_{i,3;2} = \frac{h_{i-2;2} - h_{i;1} - h_{i;1}}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i-1;1} - h_{i;2} - h_{i;1}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} - \frac{2}{h_{i-1;3} \cdot h_{i;1}} \quad = -\frac{6}{6} \text{ dans le cas équidistant}$$

$$a_{i,4;2} = \frac{1}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{1}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{1}{h_{i-1;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}} \qquad = \frac{3}{6} \text{ dans le cas équidistant}$$

<u>Cherchons les coefficients de la troisième colonne,</u> $a_{i,4;3}$; $a_{i,3;3}$; $a_{i,2;3}$; $a_{i,1;3}$
Ce sont les coefficients du polynôme de $b_{i-1;3}(t)$, écrit comme polynôme en $(t-t_i)^3$.

Rappelons que :

$$b_{j;3}(t)=\frac{t-t_j}{h_{j;3}}\cdot\left(\frac{t-t_j}{h_{j;2}}\cdot\left(\frac{t-t_j}{h_{j;1}}\cdot b_{j;0}(t)+\frac{t_{j+2}-t}{h_{j+1;1}}\cdot b_{j+1;0}(t)\right)+\frac{t_{j+3}-t}{h_{j+1;2}}\cdot\left(\frac{t-t_{j+1}}{h_{j+1;1}}\cdot b_{j+1;0}(t)+\frac{t_{j+3}-t}{h_{j+2;1}}\cdot b_{j+2;0}(t)\right)\right)$$
$$+\frac{t_{j+4}-t}{h_{j+1;3}}\cdot\left(\frac{t-t_{j+1}}{h_{j+1;2}}\cdot\left(\frac{t-t_{j+1}}{h_{j+1;1}}\cdot b_{j+1;0}(t)+\frac{t_{j+3}-t}{h_{j+2;1}}\cdot b_{j+2;0}(t)\right)+\frac{t_{j+4}-t}{h_{j+2;2}}\cdot\left(\frac{t-t_{j+2}}{h_{j+2;1}}\cdot b_{j+2;0}(t)+\frac{t_{j+4}-t}{h_{j+3;1}}\cdot b_{j+3;0}(t)\right)\right)$$

et

$$s_i(t)=b_{i-3;3}(t)\cdot U_{i-1}+b_{i-2;3}(t)\cdot U_i+b_{i-1;3}(t)\cdot U_{i+1}+b_{i;3}(t)\cdot U_{i+2}$$

Donc
$a_{i,4;3}$ est le facteur de $(t-t_i)^3$ de $b_{i-1;3}(t)$
$a_{i,3;3}$ est le facteur de $(t-t_i)^2$ de $b_{i-1;3}(t)$
$a_{i,2;3}$ est le facteur de $(t-t_i)^1$ de $b_{i-1;3}(t)$
$a_{i,1;3}$ est le facteur de $(t-t_i)^0$ de $b_{i-1;3}(t)$

$$b_{i-1;3}(t)=\frac{t-t_{i-1}}{h_{i-1;3}}\cdot\left(\frac{t-t_{i-1}}{h_{i-1;2}}\cdot\left(\frac{t-t_{i-1}}{h_{i-1;1}}\cdot b_{i-1;0}(t)+\frac{t_{i+1}-t}{h_{i;1}}\cdot b_{i;0}(t)\right)+\frac{t_{i+2}-t}{h_{i;2}}\cdot\left(\frac{t-t_i}{h_{i;1}}\cdot b_{i;0}(t)+\frac{t_{i+2}-t}{h_{i+1;1}}\cdot b_{i+1;0}(t)\right)\right)$$
$$+\frac{t_{i+3}-t}{h_{i;3}}\cdot\left(\frac{t-t_i}{h_{i;2}}\cdot\left(\frac{t-t_i}{h_{i;1}}\cdot b_{i;0}(t)+\frac{t_{i+2}-t}{h_{i+1;1}}\cdot b_{i+1;0}(t)\right)+\frac{t_{i+3}-t}{h_{i+1;2}}\cdot\left(\frac{t-t_{i+1}}{h_{i+1;1}}\cdot b_{i+1;0}(t)+\frac{t_{i+3}-t}{h_{i+2;1}}\cdot b_{i+2;0}(t)\right)\right)$$

$t\in[t_i,t_{i+1}]$, donc $b_{j;0}(t)=1$ seulement si $j=i$.
Cela simplifie :

$$b_{i-1;3}(t)=\frac{t-t_{i-1}}{h_{i-1;3}}\cdot\left(\frac{t-t_{i-1}}{h_{i-1;2}}\cdot\frac{t_{i+1}-t}{h_{i;1}}+\frac{t_{i+2}-t}{h_{i;2}}\cdot\frac{t-t_i}{h_{i;1}}\right)+\frac{t_{i+3}-t}{h_{i;3}}\cdot\frac{t-t_i}{h_{i;2}}\cdot\frac{t-t_i}{h_{i;1}}$$

$$b_{i-1;3}(t)=-\frac{t-t_{i-1}}{h_{i-1;3}}\cdot\left(\frac{t-t_{i-1}}{h_{i-1;2}}\cdot\frac{t-t_{i+1}}{h_{i;1}}+\frac{t-t_{i+2}}{h_{i;2}}\cdot\frac{t-t_i}{h_{i;1}}\right)-\frac{t-t_{i+3}}{h_{i;3}}\cdot\frac{t-t_i}{h_{i;2}}\cdot\frac{t-t_i}{h_{i;1}}$$

$$b_{i-1;3}(t)=-\frac{(t-t_i)+t_i-t_{i-1}}{h_{i-1;3}}\cdot\left(\frac{(t-t_i)+t_i-t_{i-1}}{h_{i-1;2}}\cdot\frac{(t-t_i)+t_i-t_{i+1}}{h_{i;1}}+\frac{(t-t_i)+t_i-t_{i+2}}{h_{i;2}}\cdot\frac{(t-t_i)}{h_{i;1}}\right)$$
$$-\frac{(t-t_i)+t_i-t_{i+3}}{h_{i;3}}\cdot\frac{(t-t_i)}{h_{i;2}}\cdot\frac{(t-t_i)}{h_{i;1}}$$

$$b_{i-1;3}(t)=-\frac{(t-t_i)+h_{i-1;1}}{h_{i-1;3}}\cdot\left(\frac{(t-t_i)+h_{i-1;1}}{h_{i-1;2}}\cdot\frac{(t-t_i)-h_{i;1}}{h_{i;1}}+\frac{(t-t_i)-h_{i;2}}{h_{i;2}}\cdot\frac{(t-t_i)}{h_{i;1}}\right)$$
$$-\frac{(t-t_i)-h_{i;3}}{h_{i;3}}\cdot\frac{(t-t_i)}{h_{i;2}}\cdot\frac{(t-t_i)}{h_{i;1}}$$

$$b_{i-1;3}(t) = (t-t_i)^3 \cdot \left(\frac{-1}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{-1}{h_{i-1;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{-1}{h_{i;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}} \right)$$
$$+ \ (t-t_i)^2 \cdot \left(\frac{h_{i;1} - 2h_{i-1;1}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i;2} - h_{i-1;1}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i;3}}{h_{i;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}} \right)$$
$$+ \ (t-t_i) \cdot \left(\frac{2h_{i-1;1} \cdot h_{i;1} - h_{i-1;1}^2}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i-1;1} \cdot h_{i;2}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}} \right)$$
$$+ \ \left(\frac{h_{i-1;1}^2 \cdot h_{i;1}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} \right)$$

Les 4 facteurs, donnent les 4 coefficients : $a_{i,4;3}$; $a_{i,3;3}$; $a_{i,2;3}$ et $a_{i,1;3}$
On retrouve la valeur de $a_{i,1;3}$
On a donc :

$$a_{i,1;3} = \frac{h_{i-1;1}^2}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2}} \quad = \frac{1}{6}$$ dans le cas équidistant où $t_j = j$, $h_{j;k} = k$

$$a_{i,2;3} = \frac{2h_{i-1;1} \cdot h_{i;1} - h_{i-1;1}^2}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i-1;1}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i;1}} = \frac{3}{6}$$ si équidistant

$$a_{i,3;3} = \frac{h_{i;1} - 2h_{i-1;1}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i;2} - h_{i-1;1}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{1}{h_{i;2} \cdot h_{i;1}} = \frac{3}{6}$$ dans le cas équidistant

$$a_{i,4;3} = \frac{-1}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{-1}{h_{i-1;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{-1}{h_{i;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}} = -\frac{3}{6}$$ dans le cas équidistant

<u>Cherchons les coefficients de la quatrième colonne,</u> $a_{i,4;4}$; $a_{i,3;4}$; $a_{i,2;4}$; $a_{i,1;4}$
Ce sont les coefficients du polynôme de $b_{i;3}(t)$, écrit comme polynôme en $(t-t_i)^3$.

Rappelons que :

$$b_{i;4}(t) = \frac{t-t_i}{h_{i;3}} \cdot \left(\frac{t-t_i}{h_{i;2}} \cdot \left(\frac{t-t_i}{h_{i;1}} \cdot b_{i;0}(t) + \frac{t_{i+2}-t}{h_{i+1;1}} \cdot b_{i+1;0}(t) \right) + \frac{t_{i+3}-t}{h_{i+1;2}} \cdot \left(\frac{t-t_{i+1}}{h_{i+1;1}} \cdot b_{i+1;0}(t) + \frac{t_{i+3}-t}{h_{i+2;1}} \cdot b_{i+2;0}(t) \right) \right)$$
$$+ \frac{t_{i+4}-t}{h_{i+1;3}} \cdot \left(\frac{t-t_{i+1}}{h_{i+1;2}} \cdot \left(\frac{t-t_{i+1}}{h_{i+1;1}} \cdot b_{i+1;0}(t) + \frac{t_{i+3}-t}{h_{i+2;1}} \cdot b_{i+2;0}(t) \right) + \frac{t_{i+4}-t}{h_{i+2;2}} \cdot \left(\frac{t-t_{i+2}}{h_{i+2;1}} \cdot b_{i+2;0}(t) + \frac{t_{i+4}-t}{h_{i+3;1}} \cdot b_{i+3;0}(t) \right) \right)$$

et

$$s_i(t) = b_{i-3;3}(t) \cdot U_{i-1} + b_{i-2;3}(t) \cdot U_i + b_{i-1;3}(t) \cdot U_{i+1} + b_{i;3}(t) \cdot U_{i+2}$$

$t \in [t_i, t_{i+1}]$, donc $b_{j;0}(t) = 1$ seulement si $j = i$.
Cela simplifie :

$$b_{i;4}(t) = \frac{t-t_i}{h_{i;3}} \cdot \frac{t-t_i}{h_{i;2}} \cdot \frac{t-t_i}{h_{i;1}} \qquad b_{i;4}(t) = (t-t_i)^3 \cdot \left(\frac{1}{h_{i;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}} \right)$$

$a_{i,4;4}$ est le facteur de $(t-t_i)^3$ de $b_{i;3}(t)$, donc

$a_{i,4;4} = \dfrac{1}{h_{i;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}} \qquad = \dfrac{1}{6}$ dans le cas équidistant où $t_j = j$, $h_{j;k} = k$

$a_{i,3;4} = 0$; $a_{i,2;4} = 0$; $a_{i,1;4} = 0$

Résumé - résultat - conclusion des calculs précédents.

$$s_i(t) = \begin{pmatrix} 1 & t-t_i & (t-t_i)^2 & (t-t_i)^3 \end{pmatrix} \circ A_i \circ \begin{pmatrix} U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ U_{i+2} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A_i = \begin{pmatrix} a_{i,1;1} & a_{i,1;2} & a_{i,1;3} & a_{i,1;4} \\ a_{i,2;1} & a_{i,2;2} & a_{i,2;3} & a_{i,2;4} \\ a_{i,3;1} & a_{i,3;2} & a_{i,3;3} & a_{i,3;4} \\ a_{i,4;1} & a_{i,4;2} & a_{i,4;3} & a_{i,4;4} \end{pmatrix}$$

La courbe (B-spline) définie par $s(t) = s_i(t)$ pour $t \in [t_i .. t_{i+1}]$,
$h_{j;k} = t_{j+k} - t_j$, donc $h_j = h_{j;1} = t_{j+1} - t_j$

$$A_i = \begin{pmatrix} \frac{h_{i;1}}{h_{i-2;3}} \cdot \frac{h_{i;1}}{h_{i-1;2}} & \frac{h_{i-2;2}}{h_{i-2;3}} \cdot \frac{h_{i;1}}{h_{i-1;2}} + \frac{h_{i;2}}{h_{i-1;3}} \cdot \frac{h_{i-1;1}}{h_{i-1;2}} & \frac{h_{i-1;1}}{h_{i-1;3}} \cdot \frac{h_{i-1;1}}{h_{i-1;2}} & 0 \\ \frac{-3\,h_{i;1}}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2}} & a_{i,2;2} & a_{i,2;3} & 0 \\ \frac{3}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2}} & a_{i,3;2} & a_{i,3;3} & 0 \\ \frac{-1}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} & a_{i,4;2} & a_{i,4;3} & \frac{1}{h_{i;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}} \end{pmatrix}$$

$$a_{i,2;2} = \frac{h_{i;1} - 2h_{i-2;2}}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2}} + \frac{h_{i;2} \cdot h_{i;1} - h_{i;2} \cdot h_{i-1;1} - h_{i-1;1} \cdot h_{i;1}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i;2}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i;1}}$$
$$a_{i,3;2} = \frac{h_{i-2;2} - 2\,h_{i;1}}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i-1;1} - h_{i;2} - h_{i;1}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} - \frac{2}{h_{i-1;3} \cdot h_{i;1}}$$
$$a_{i,4;2} = \frac{1}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{1}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{1}{h_{i-1;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}}$$
$$a_{i,2;3} = \frac{2\,h_{i-1;1} \cdot h_{i;1} - h_{i-1;1}^2}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i-1;1}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i;1}}$$
$$a_{i,3;3} = \frac{h_{i;1} - 2\,h_{i-1;1}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i;2} - h_{i-1;1}}{h_{i-1;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{1}{h_{i;2} \cdot h_{i;1}}$$
$$a_{i,4;3} = \frac{-1}{h_{i-1;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{-1}{h_{i-1;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}} + \frac{-1}{h_{i;3} \cdot h_{i;2} \cdot h_{i;1}}$$

Si on désire avoir $s_i(t_i + \tau \cdot h_i) = \begin{pmatrix} 1 & \tau & \tau^2 & \tau^3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \alpha_{i,1;1} & \alpha_{i,1;2} & \alpha_{i,1;3} & \alpha_{i,1;4} \\ \alpha_{i,2;1} & \alpha_{i,2;2} & \alpha_{i,2;3} & \alpha_{i,2;4} \\ \alpha_{i,3;1} & \alpha_{i,3;2} & \alpha_{i,3;3} & \alpha_{i,3;4} \\ \alpha_{i,4;1} & \alpha_{i,4;2} & \alpha_{i,4;3} & \alpha_{i,4;4} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ U_{i+2} \end{pmatrix}$

On a la relation : $\alpha_{i,j;k} = h_i^{(j-1)} \cdot a_{i,j;k}$ $\quad \tau = \frac{t - t_i}{h_i} \quad i = 1 .. n \;;\; j = 1 .. 4 \;;\; k = 1 .. 4$

Pour $i = 1 .. n$, on a :

$$\boxed{V_i = s(t_i) = s_i(t_i) = a_{i,1;1} \cdot U_{i-1} + a_{i,1;2} \cdot U_i + a_{i,1;3} \cdot U_{i+1}}$$
$$p_i = s'(t_i) = s'_i(t_i) = a_{i,2;1} \cdot U_{i-1} + a_{i,2;2} \cdot U_i + a_{i,2;3} \cdot U_{i+1}$$
$$M_i = s''(t_i) = s''_i(t_i) = a_{i,3;1} \cdot U_{i-1} + a_{i,3;2} \cdot U_i + a_{i,3;3} \cdot U_{i+1}$$

La relation entre les V_i et les U_i peut s'écrire matriciellement, ce qui permet de passer des points de contrôles des B-spline au Math-spline et vice-versa.

Comment déterminer les deux points de contrôles V_0 et V_{n+1} de la Math-spline pour faire coïncider les deux courbes ?
Pente au départ = $p_1 = s'(t_1) = s'_1(t_1) = a_{1,2;1} \cdot U_0 + a_{1,2;2} \cdot U_1 + a_{1,2;3} \cdot U_2$.
Pente à l'arrivée = $p_n = s'(t_n) = s'_n(t_n) = a_{n,2;1} \cdot U_{n-1} + a_{n,2;2} \cdot U_n + a_{n,2;3} \cdot U_{n+1}$.
$s'_n(t)$ n'est définie qu'en $t = t_n$ et $s'_n(t_n)$ est plus facile à calculer que $s'_{n-1}(t_n)$.
Pour la Math-spline, ces deux pentes sont libres de choix.
Reste à définir un lien entre ces deux pentes et les deux valeurs V_0 et V_{n+1} .
On veut que les conditions suivantes soient réalisées :
1) $p_1 = a_{1,2;1} \cdot U_0 + a_{1,2;2} \cdot U_1 + a_{1,2;3} \cdot U_2$
2) $V_0 = \alpha \cdot U_0 + \beta \cdot U_1 + \gamma \cdot U_2$, avec $\alpha \ ; \ \beta \ ; \ \gamma$ libres
3) $V_1 = a_{1,1;1} \cdot U_0 + a_{1,1;2} \cdot U_1 + a_{1,1;3} \cdot U_2$
4) $p_1 = \lambda \cdot V_1 - \mu \cdot V_0$, avec $\lambda \ ; \ \mu$ libres
On veut donc exprimer V_0 en fonction de U_0, U_1 et U_2, qui permette de déterminer p_1 qui satisfasse la condition 1), qui décrit la dérivée en début de courbe.

De ces 4 égalités, faisons disparaître p_1, V_0 et V_1 .
1) = 4) et substituons 2) et 3), pour obtenir :

$$a_{1,2;1} \cdot U_0 + a_{1,2;2} \cdot U_1 + a_{1,2;3} \cdot U_2 = \lambda \cdot a_{1,1;1} \cdot U_0 + \lambda \cdot a_{1,1;2} \cdot U_1 + \lambda \cdot a_{1,1;3} \cdot U_2 - \mu \cdot \alpha \cdot U_0 - \mu \cdot \beta \cdot U_1 - \mu \cdot \gamma \cdot U_2$$

En réarrangent les termes et mettant les U_i en évidences :

$$U_0 \cdot (a_{1,2;1} - \lambda \cdot a_{1,1;1} + \mu \cdot \alpha) + U_1 \cdot (a_{1,2;2} - \lambda \cdot a_{1,1;2} + \mu \cdot \beta) + U_2 \cdot (a_{1,2;3} - \lambda \cdot a_{1,1;3} + \mu \cdot \gamma) = 0$$

On veut que l'égalité soit vraie quelles que soient les valeurs des U_i , il faut donc que :

$a_{1,2;1} - \lambda \cdot a_{1,1;1} + \mu \cdot \alpha = 0$ et $\quad \alpha = \frac{\lambda}{\mu} \cdot a_{1,1;1} - \frac{1}{\mu} \cdot a_{1,2;1}$

$a_{1,2;2} - \lambda \cdot a_{1,1;2} + \mu \cdot \beta = 0$ et $\quad \beta = \frac{\lambda}{\mu} \cdot a_{1,1;2} - \frac{1}{\mu} \cdot a_{1,2;2}$

$a_{1,2;3} - \lambda \cdot a_{1,1;3} + \mu \cdot \gamma = 0$ $\quad \gamma = \frac{\lambda}{\mu} \cdot a_{1,1;3} - \frac{1}{\mu} \cdot a_{1,2;3}$

Un choix naturel est : $\lambda = \mu = 1$. Avec ce choix, on obtient : $p_1 = V_1 - V_0$ et
$\alpha = a_{1,1;1} - a_{1,2;1}$; $\beta = a_{1,1;2} - a_{1,2;2}$; $\gamma = a_{1,1;3} - a_{1,2;3}$.

Donc : $\boxed{V_0 = (a_{1,1;1} - a_{1,2;1}) \cdot U_0 + (a_{1,1;2} - a_{1,2;2}) \cdot U_1 + (a_{1,1;3} - a_{1,2;3}) \cdot U_2}$

Faisons des calculs similaires pour déterminer V_{n+1} .

On veut que les conditions suivantes soient réalisées :
1) $p_n = s'(t_n) = s'_{n-1}(t_n) = s'_n(t_n) = a_{n,2;1} \cdot U_{n-1} + a_{n,2;2} \cdot U_n + a_{n,2;3} \cdot U_{n+1}$
2) $V_{n+1} = \alpha \cdot U_{n-1} + \beta \cdot U_n + \gamma \cdot U_{n+1}$, avec α ; β ; γ libres
3) $V_n = a_{n,1;1} \cdot U_{n-1} + a_{n,1;2} \cdot U_n + a_{n,1;3} \cdot U_{n+1}$
4) $p_n = \mu \cdot V_{n+1} - \lambda \cdot V_n$, avec λ ; μ libres
On veut donc exprimer V_{n+1} en fonction de U_{n-1}, U_n et U_{n+1}, qui permette de déterminer p_n qui satisfasse la condition 1), qui décrit la dérivée en fin de courbe.

De ces 4 égalités, faisons disparaître p_n, V_n et V_{n+1} .
1) = 4) et substituons 2) et 3), pour obtenir :

$$a_{n,2;1} \cdot U_{n-1} + a_{n,2;2} \cdot U_n + a_{n,2;3} \cdot U_{n+1} = \mu \cdot \alpha \cdot U_{n-1} + \mu \cdot \beta \cdot U_n + \mu \cdot \gamma \cdot U_{n+1} - \lambda \cdot a_{n,1;1} \cdot U_{n-1} - \lambda \cdot a_{n,1;2} \cdot U_n - \lambda \cdot a_{n,1;3} \cdot U_{n+1}$$

En réarrangent les termes et mettant les U_i en évidences :

$$U_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2} - \lambda \cdot \frac{1}{6} + \mu \cdot \alpha \right) + U_n \cdot \left(\mu \cdot \beta - \lambda \cdot \frac{4}{6} \right) + U_{n+1} \cdot \left(\mu \cdot \gamma - \lambda \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$U_{n-1} \cdot \left(a_{n,2;1} + \lambda \cdot a_{n,1;1} - \mu \cdot \alpha \right) + U_n \cdot \left(a_{n,2;2} + \lambda \cdot a_{n,1;2} - \mu \cdot \beta \right) + U_{n+1} \cdot \left(a_{n,2;3} + \lambda \cdot a_{n,1;3} - \mu \cdot \gamma \right) = 0$$

On veut que l'égalité soit vraie quelles que soient les valeurs des U_i , il faut donc que :

$a_{n,2;1} + \lambda \cdot a_{n,1;1} - \mu \cdot \alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} \cdot a_{n,1;1} + \frac{1}{\mu} \cdot a_{n,2;1}$

$a_{n,2;2} + \lambda \cdot a_{n,1;2} - \mu \cdot \beta = 0$ et $\beta = \frac{\lambda}{\mu} \cdot a_{n,1;2} + \frac{1}{\mu} \cdot a_{n,2;2}$

$a_{n,2;3} + \lambda \cdot a_{n,1;3} - \mu \cdot \gamma = 0$ $\gamma = \frac{\lambda}{\mu} \cdot a_{n,1;3} + \frac{1}{\mu} \cdot a_{n,2;3}$

Un choix naturel est : $\lambda = \mu = 1$. Avec ce choix, on obtient : $p_n = V_{n+1} - V_n$ et
$\alpha = a_{n,1;1} + a_{n,2;1}$; $\beta = a_{n,1;2} + a_{n,2;2}$; $\gamma = a_{n,1;3} + a_{n,2;3}$.

Donc : $\boxed{V_{n+1} = \left(a_{n,1;1} + a_{n,2;1} \right) \cdot U_{n-1} + \left(a_{n,1;2} + a_{n,2;2} \right) \cdot U_n + \left(a_{n,1;3} + a_{n,2;3} \right) \cdot U_{n+1}}$

Écriture sous forme matricielle du passage des U_i aux V_i.

$$\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_{n-1} \\ V_n \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0,1;1} & a_{0,1;2} & a_{0,1;3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{1,1;1} & a_{1,1;2} & a_{1,1;3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,1;1} & a_{2,1;2} & a_{2,1;3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,1;1} & a_{3,1;2} & a_{3,1;3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1,1;1} & a_{n-1,1;2} & a_{n-1,1;3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n,1;1} & a_{n,1;2} & a_{n,1;3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n+1,1;1} & a_{n+1,1;2} & a_{n+1,1;3} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_{n-1} \\ U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix}$$

Ici, $n = 5$. Il y a 5 points de passage et 7 points de contrôles.

$a_{0,1;1} = a_{1,1;1} - a_{1,2;1}$; $a_{0,1;2} = a_{1,1;2} - a_{1,2;2}$; $a_{0,1;3} = a_{1,1;3} - a_{1,2;3}$

$a_{n+1,1;1} = a_{n,1;1} + a_{n,2;1}$; $a_{n+1,1;2} = a_{n,1;2} + a_{n,2;2}$; $a_{n+1,1;3} = a_{n,1;3} + a_{n,2;3}$

Donc le passage des points de contrôles de la B-spline aux points de contrôles de la Math-spline est :

$V_0 = (a_{1,1;1} - a_{1,2;1})\cdot U_0 + (a_{1,1;2} - a_{1,2;2})\cdot U_1 + (a_{1,1;3} - a_{1,2;3})\cdot U_2$;

$V_{n+1} = (a_{n,1;1} + a_{n,2;1})\cdot U_{n-1} + (a_{n,1;2} + a_{n,2;2})\cdot U_n + (a_{n,1;3} + a_{n,2;3})\cdot U_{n+1}$

$V_i = a_{i,1;1}\cdot U_{i-1} + a_{i,1;2}\cdot U_i + a_{i,1;3}\cdot U_{i+1}$, pour $i = 1..n$

Passage des points de contrôles de la Math-spline aux points de contrôles de la B-spline.

Le passage des points de contrôles de la Math-spline aux points de contrôles de la B-spline nécessite la résolution du système d'équation. Vu que la matrice est tri-diagonale avec diagonale dominante, le calcul est assez rapide. Les V_i sont donnés, on cherche les U_i.

Pour obtenir une matrice tri-diagonale, combinons les deux premières lignes et les deux dernières.
Substitutions :

$a_{0,1;1} = a_{0,1;1} - a_{1,1;1}\cdot\frac{a_{0,1;3}}{a_{1,1;3}}$; $a_{0,1;2} = a_{0,1;2} - a_{1,1;2}\cdot\frac{a_{0,1;3}}{a_{1,1;3}}$; $a_{0,1;3} = 0$; $V_0 = V_0 - V_1\cdot\frac{a_{0,1;3}}{a_{1,1;3}}$

$a_{n+1,1;1} = 0$; $a_{n+1,1;2} = a_{n+1,1;2} - a_{n,1;2}\cdot\frac{a_{n+1,1;1}}{a_{n,1;1}}$; $a_{n+1,1;3} = a_{n+1,1;3} - a_{n,1;3}\cdot\frac{a_{n+1,1;1}}{a_{n,1;1}}$; $V_{n+1} = V_{n+1} - V_n\cdot\frac{a_{n+1,1;1}}{a_{n,1;1}}$

Résolution :

$lft_0 = 0$; $diag_0 = a_{0,1;1}$; $rigt_0 = a_{0,1;2}$; $q_0 = V_0$

$lft_{n+1} = a_{n+1,1;2}$; $diag_{n+1} = a_{n+1,1;3}$; $rigt_{n+1} = 0$; $q_{n+1} = V_{n+1}$ (des valeurs substituées)

$lft_i = a_{i,1;1}$; $diag_i = a_{i,1;2}$; $rigt_{n+1} = 0$; $q_i = V_i$, pour $i = 1..n$

for i=1 to n+1 do $diag_i = diag_i - \frac{lft_i}{diag_{i-1}}\cdot rigt_{i-1}$ and $q_i = q_i - \frac{lft_i}{diag_{i-1}}\cdot q_{i-1}$

$$U_{n+1} = \frac{q_{n+1}}{diag_{n+1}}$$

for $i = n$ downto 0 do $U_i = \frac{q_i - rigt_i\cdot U_{i+1}}{diag_i}$ Il y a $n + 2$ points ; n = nb_points - 2.

Vérifications !

Il est peu probable de faire tous les calculs des pages précédentes sans faire d'erreurs. Il est donc important de faire plusieurs vérifications, qui permettrons de détecter les erreurs.
De même, lors de l'implémentation informatique, les vérifications suivantes permettrons de détecter des erreurs de codage.

On désire qu'une translation des points de contrôles donne la même courbe translatée.
Sinon, la courbe serait dépendante du choix de l'origine.
Cela implique les 4 égalités suivantes :

1) $a_{i,1;1} + a_{i,1;2} + a_{i,1;3} + a_{i,1;4} = 1$, vérification qui a déjà été faite.
2) $a_{i,2;1} + a_{i,2;2} + a_{i,2;3} + a_{i,2;4} = 0$
3) $a_{i,3;1} + a_{i,3;2} + a_{i,3;3} + a_{i,3;4} = 0$
4) $a_{i,4;1} + a_{i,4;2} + a_{i,4;3} + a_{i,4;4} = 0$

Règle utile pour les simplifications :
$h_{i+k;l} + h_{i+m;\boldsymbol{k-m}} = t_{i+k+l} - t_{i+k} + t_{i+k} - t_{i+m} = h_{i+m;k+l-m2}$
$h_{i;2} = h_{i+1} + h_i \quad ; \quad h_{i;3} = h_{i+2} + h_{i+1} + h_i$

2) donne

$$\frac{-3\,h_{i;1}}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}} + \frac{h_{i;1} - 2\,h_{i-2;2}}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}} + \frac{h_{i;2}\cdot h_{i;1} - h_{i;2}\cdot h_{i-1;1} - h_{i-1;1}\cdot h_{i;1}}{h_{i-1;3}\cdot h_{i-1;2}\cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i;2}}{h_{i-1;3}\cdot h_{i;1}}$$
$$+ \frac{2\,h_{i-1;1}\cdot h_{i;1} - h_{i-1;1}^2}{h_{i-1;3}\cdot h_{i-1;2}\cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i-1;1}}{h_{i-1;3}\cdot h_{i;1}}$$

$$= -2\cdot\frac{h_{i;1} + h_{i-2;2}}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}} + \frac{h_{i;2}\cdot h_{i;1} - h_{i;2}\cdot h_{i-1;1} - h_{i-1;1}\cdot h_{i;1}}{h_{i-1;3}\cdot h_{i-1;2}\cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i;2}\cdot h_{i-1;2}}{h_{i-1;3}\cdot h_{i;1}\cdot h_{i-1;2}}$$
$$+ \frac{2\,h_{i-1;1}\cdot h_{i;1} - h_{i-1;1}^2}{h_{i-1;3}\cdot h_{i-1;2}\cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i-1;1}\cdot h_{i-1;2}}{h_{i-1;3}\cdot h_{i;1}\cdot h_{i-1;2}}$$

$$= -2\cdot\frac{h_{i;1} + h_{i-2;2}}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}}$$
$$+ \frac{h_{i;2}\cdot h_{i;1} - h_{i;2}\cdot h_{i-1;1} - h_{i-1;1}\cdot h_{i;1}}{h_{i-1;3}\cdot h_{i-1;2}\cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i;2}\cdot h_{i-1;2}}{h_{i-1;3}\cdot h_{i;1}\cdot h_{i-1;2}} + \frac{2\,h_{i-1;1}\cdot h_{i;1} - h_{i-1;1}^2}{h_{i-1;3}\cdot h_{i-1;2}\cdot h_{i;1}} + \frac{h_{i-1;1}\cdot h_{i-1;2}}{h_{i-1;3}\cdot h_{i;1}\cdot h_{i-1;2}}$$

$$= -2\cdot\frac{h_{i;1} + h_{i-2;2}}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}}$$
$$+ \frac{h_{i;2}\cdot h_i - h_{i;2}\cdot h_{i-1} - h_{i-1}\cdot h_i + h_{i;2}\cdot h_{i-1;2} + 2\,h_i\cdot h_{i-1} - h_{i-1}\cdot h_{i-1} + h_{i-1}\cdot h_{i-1;2}}{h_{i-1;3}\cdot h_i\cdot h_{i-1;2}}$$

$$= -2\cdot\frac{h_{i;1} + h_{i-2;2}}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}}$$
$$+ \frac{h_{i;2}\cdot h_i - h_{i;2}\cdot h_{i-1} + h_{i;2}\cdot h_{i-1;2} + h_i\cdot h_{i-1} - h_{i-1}\cdot h_{i-1} + h_{i-1}\cdot h_{i-1;2}}{h_{i-1;3}\cdot h_i\cdot h_{i-1;2}}$$

$$= -2\cdot\frac{h_{i\,;1} + h_{i-2\,;2}}{h_{i-2\,;3}\cdot h_{i-1\,;2}}$$
$$+ \frac{(h_{i+1}+h_i)\cdot h_i - (h_{i+1}+h_i)\cdot h_{i-1} + (h_{i+1}+h_i)\cdot(h_i+h_{i-1}) + h_i\cdot h_{i-1} - h_{i-1}\cdot h_{i-1} + h_{i-1}\cdot(h_i+h_{i-1})}{h_{i-1\,;3}\cdot h_i\cdot h_{i-1\,;2}}$$

$$= -2\cdot\frac{h_{i\,;1} + h_{i-2\,;2}}{h_{i-2\,;3}\cdot h_{i-1\,;2}}$$
$$+ \frac{h_{i+1}\cdot h_i + h_i\cdot h_i \cancel{- h_{i+1}\cdot h_{i-1}} \cancel{- h_i\cdot h_{i-1}} + h_{i+1}\cdot h_i \cancel{+ h_{i+1}\cdot h_{i-1}} + h_i\cdot h_i + h_i\cdot h_{i-1} \cancel{+ h_i\cdot h_{i-1}} \cancel{- h_{i-1}\cdot h_{i-1}} + h_i\cdot h_{i-1} \cancel{+ h_{i-1}\cdot h_{i-1}}}{h_{i-1\,;3}\cdot h_i\cdot h_{i-1\,;2}}$$

$$= -2\cdot\frac{h_i + h_{i-1} + h_{i-2}}{h_{i-2\,;3}\cdot h_{i-1\,;2}} + \frac{2\,h_{i+1}\cdot h_i + 2\,h_i\cdot h_i + 2\,h_i\cdot h_{i-1}}{h_{i-1\,;3}\cdot h_i\cdot h_{i-1\,;2}}$$

$$= \frac{-2\cdot(h_i + h_{i-1} + h_{i-2})\cdot h_{i-1\,;3}\cdot h_i + (2\,h_{i+1}\cdot h_i + 2\,h_i\cdot h_i + 2\,h_i\cdot h_{i-1})\cdot h_{i-2\,;3}}{h_{i-2\,;3}\cdot h_{i-1\,;3}\cdot h_i\cdot h_{i-1\,;2}}$$

$$= 2\cdot\frac{-(h_i + h_{i-1} + h_{i-2})\cdot(h_{i+1} + h_i + h_{i-1})\cdot h_i + (h_{i+1}\cdot h_i + h_i\cdot h_i + h_i\cdot h_{i-1})\cdot(h_i + h_{i-1} + h_{i-2})}{h_{i-2\,;3}\cdot h_{i-1\,;3}\cdot h_i\cdot h_{i-1\,;2}}$$

$= 0$. C'est long, mais c'est magique.
Il y a peu de chance d'avoir ce résultat avec une erreur dans les coefficients de la matrice !

3) $a_{i,3;1} + a_{i,3;2} + a_{i,3;3} + a_{i,3;4} = 0$
« Cette vérification est laissée en exercice. » On dit cela quand on n'a pas envie de le faire soi-même.

4) $a_{i,4;1} + a_{i,4;2} + a_{i,4;3} + a_{i,4;4} = 0$, cette vérification est facile.

$$\cancel{\frac{-1}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}\cdot h_{i;1}}} + \cancel{\frac{1}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}\cdot h_{i;1}}} + \cancel{\frac{1}{h_{i-1;3}\cdot h_{i-1;2}\cdot h_{i;1}}} + \cancel{\frac{1}{h_{i-1;3}\cdot h_{i;2}\cdot h_{i;1}}} + \cancel{\frac{1}{h_{i;3}\cdot h_{i;2}\cdot h_{i;1}}}$$
$$+ \cancel{\frac{-1}{h_{i-1;3}\cdot h_{i-1;2}\cdot h_{i;1}}} + \cancel{\frac{-1}{h_{i-1;3}\cdot h_{i;2}\cdot h_{i;1}}} + \cancel{\frac{-1}{h_{i;3}\cdot h_{i;2}\cdot h_{i;1}}} = 0$$

Une autre approche est tentée dans les pages suivantes. Elle n'aboutit pas à un résultat final, mais donne plusieurs vérifications possibles.

Cherchons une matrice A rendant la courbe spline deux fois continûment différentiable, pour retrouver la matrice liée à une B-spline.

$$s_i(t) = \begin{pmatrix} 1 & t-t_i & (t-t_i)^2 & (t-t_i)^3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & a_{1;3} & a_{1;4} \\ a_{2;1} & a_{2;2} & a_{2;3} & a_{2;4} \\ a_{3;1} & a_{3;2} & a_{3;3} & a_{3;4} \\ a_{4;1} & a_{4;2} & a_{4;3} & a_{4;4} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ U_{i+2} \end{pmatrix}$$

$$s_i(t_{i+1}) = \begin{pmatrix} 1 & h_i & h_i^2 & h_i^3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & a_{1;3} & a_{1;4} \\ a_{2;1} & a_{2;2} & a_{2;3} & a_{2;4} \\ a_{3;1} & a_{3;2} & a_{3;3} & a_{3;4} \\ a_{4;1} & a_{4;2} & a_{4;3} & a_{4;4} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ U_{i+2} \end{pmatrix} \mathrm{U}$$

$$s_{i+1}(t_{i+1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_{1;1} & b_{1;2} & b_{1;3} & b_{1;4} \\ b_{2;1} & b_{2;2} & b_{2;3} & b_{2;4} \\ b_{3;1} & b_{3;2} & b_{3;3} & b_{3;4} \\ b_{4;1} & b_{4;2} & b_{4;3} & b_{4;4} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} U_i \\ U_{i+1} \\ U_{i+2} \\ U_{i+3} \end{pmatrix}$$

Les $a_{j;k}$ vont dépendre des h_i.
Les $b_{j;k}$ doivent dépendre des h_i de la même manière que les $a_{j;k}$ avec la valeur de i décalée de +1.

Pour tout U_i, les conditions à remplir sont :
$s_i(t_{i+1}) = s_{i+1}(t_{i+1})$
$s_i(t_{i+1}) = s_{i+1}(t_{i+1})$
$s_i''(t_{i+1}) = s_{i+1}''(t_{i+1})$

$s_i(t_{i+1}) = s_{i+1}(t_{i+1})$
L'égalité doivent être vraie tout U_i, elle impose des conditions, qui se décompose en 5 équations :
$a_{1;1} + h_i \cdot a_{2;1} + h_i^2 \cdot a_{3;1} + h_i^3 \cdot a_{4;1} = 0$
$a_{1;2} + h_i \cdot a_{2;2} + h_i^2 \cdot a_{3;2} + h_i^3 \cdot a_{4;2} = b_{1;1}$
$a_{1;3} + h_i \cdot a_{2;3} + h_i^2 \cdot a_{3;3} + h_i^3 \cdot a_{4;3} = b_{1;2}$
$a_{1;4} + h_i \cdot a_{2;4} + h_i^2 \cdot a_{3;4} + h_i^3 \cdot a_{4;4} = b_{1;3}$
$0 = b_{1;4}$, donc aussi : $a_{1;4} = 0$ qui a été vu précédemment.

La première condition se vérifie facilement :

$$\frac{h_{i;1} \cdot h_{i;1}}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2}} + h_i \cdot \frac{-3\, h_{i;1}}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2}} + h_i^2 \cdot \frac{3}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2}} + h_i^3 \cdot \frac{-1}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2} \cdot h_{i;1}}$$
$$= \frac{h_i^2}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2}} + \frac{-3\, h_i^2}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2}} + \frac{3\, h_i^2}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2}} + \frac{-h_i^2}{h_{i-2;3} \cdot h_{i-1;2}} = 0$$

Les autres conditions sont plus compliquées à vérifier.

$s'_i(t_{i+1}) = s'_{i+1}(t_{i+1})$

L'égalité doivent être vraie tout U_i, elle impose des conditions, qui se décompose en 5 équations :

$a_{2;1}+2\,h_i\cdot a_{3;1}+3\,h_i^2\cdot a_{4;1} = 0$

$a_{2;2}+2\,h_i\cdot a_{3;2}+3\,h_i^2\cdot a_{4;2} = b_{2;1}$

$a_{2;3}+2\,h_i\cdot a_{3;3}+3\,h_i^2\cdot a_{4;3} = b_{2;2}$

$a_{2;4}+2\,h_i\cdot a_{3;4}+3\,h_i^2\cdot a_{4;4} = b_{2;3}$

$0 = b_{2;4}$, donc aussi : $a_{2;4} = 0$ qui a été vu précédemment.

La première condition se vérifie facilement :

$$\frac{-3\,h_{i;1}}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}} + 2\,h_i\cdot\frac{3}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}} + 3\,h_i^2\cdot\frac{-1}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}\cdot h_{i;1}}$$
$$= \frac{-3\,h_i}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}} + \frac{6\,h_i}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}} + \frac{-3\,h_i}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}} = 0$$

Les autres conditions sont plus compliquées à vérifier.

$s''_i(t_{i+1}) = s''_{i+1}(t_{i+1})$

L'égalité doivent être vraie tout U_i, elle impose des conditions, qui se décompose en 5 équations :

$2\,a_{3;1}+6\,h_i\cdot a_{4;1} = 0$

$2\,a_{3;2}+6\,h_i\cdot a_{4;2} = 2\,b_{3;1}$

$2\,a_{3;3}+6\,h_i\cdot a_{4;3} = 2\,b_{3;2}$

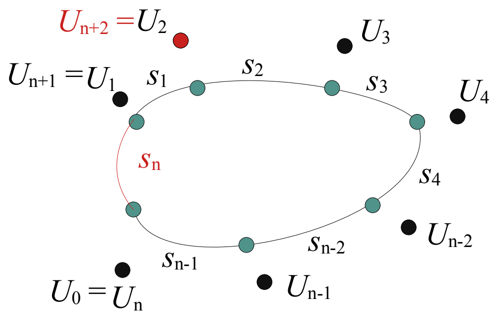
$2\,a_{3;4}+6\,h_i\cdot a_{4;4} = 2\,b_{3;3}$

$0 = b_{3;4}$, donc aussi : $a_{3;4} = 0$ qui a été vu précédemment.

La première condition se vérifie facilement :

$$2\,\frac{3}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}} + 6\,h_i\cdot\frac{-1}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}\cdot h_{i;1}}$$
$$= \frac{2\cdot 3}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}} + \frac{-6}{h_{i-2;3}\cdot h_{i-1;2}} = 0$$

Les autres conditions sont plus compliquées à vérifier.
On peut les vérifier numériquement sur des exemples, cela peut être utile pour vérifier le programme.



<u>Les B-splines fermées dans le cas de temps t_i non réguliers.</u>
Dans le cas du dessin, $n = 7$

Le but est de rajouter un segment s_n, pour que la courbe soit fermée.
Pour cela, on va rajouter un point U_{n+2} et le segment s_n associé aux points U_{n+2}, U_{n+1}, U_n et U_{n-1}, et permettre de modifier la position des points U_{n+1}, et U_0.
On veut que ce segment termine sur U_0, soit C^1 et C^2 en U_0.

Les conditions de continuité, de continuité de la dérivée et de la dérivée seconde sont satisfait entre s_{n-1} et s_n si on a comme d'habitude :
$s_n(t_n + \tau) = ...$

Par contre, trois nouvelles conditions doivent êtres satisfaites pour avoir la continuité de la courbe, de la dérivée et de la dérivée seconde.
Il faut donc satisfaire :
$s_n(t_{n+1}) = s_1(t_1)$, $(t_{n+1} = t_n + 1)$. Donc
$a_{n+1,1;1} \cdot U_n + a_{n+1,1;2} \cdot U_{n+1} + a_{n+1,1;3} \cdot U_{n+2} = a_{1,1;1} \cdot U_0 + a_{1,1;2} \cdot U_1 + a_{1,1;3} \cdot U_2$ et
$s'_n(t_{n+1}) = s'_1(t_1)$. Donc
$a_{n+1,2;1} \cdot U_n + a_{n+1,2;2} \cdot U_{n+1} + a_{n+1,2;3} \cdot U_{n+2} = a_{1,2;1} \cdot U_0 + a_{1,2;2} \cdot U_1 + a_{1,2;3} \cdot U_2$
$s''_n(t_{n+1}) = s''_1(t_1)$. Donc
$a_{n+1,3;1} \cdot U_n + a_{n+1,3;2} \cdot U_{n+1} + a_{n+1,3;3} \cdot U_{n+2} = a_{1,3;1} \cdot U_0 + a_{1,3;2} \cdot U_1 + a_{1,3;3} \cdot U_2$

Dans le cas où l'on a choisi : $h_{n+i} = h_i$, avec par exemple $h_0 = h_n$ = distance entre U_1 et U_n.

On vérifie qu'elles sont satisfaites si et seulement si :
$U_{n+2} = U_2$ et $U_{n+1} = U_1$ et $U_0 = U_n$

En conclusion, pour fermer une B-spline, il faut ajouter un point virtuel U_{n+2}, le placer sur le point U_2 et placer le point U_0 sur U_n et placer le point U_{n+1} sur U_1.

la Math-spline fermée liée aux points V_0 à V_{n+1} correspondant aux points U_0 à U_{n+1}, donnera la même courbe que la B-spline fermée décrite ci-dessus.
Attention que la B-spline fermée possède un point de plus que la Math-spline fermée !

La modification de la position des points U_0 et U_{n+1} modifiera la position des points V_0, V_1, V_n et V_{n+1}, donc la courbe Math-spline. Mais elle ne modifiera pas la position d'autres points.
Pour une Math-spline fermée, les points V_0 et V_{n+1} sont ignorés.
Ces modifications des points U_0 et U_{n+1} permettent de fermer la courbe en la gardant lisse, sans perturber les segments s_2 à s_{n-2}.

Si une courbe d'une Math-spline est fermée, alors la B-spline correspondante aura automatiquement $U_{n+1} = U_1$ et $U_0 = U_n$. Fermer la B-spline donnera la même courbe que la Math-spline.

<u>Tableau de différents cas de comparaisons des B-splines et des Math-splines</u>

Comparons diverses situations de liens entre B-splines et Math-splines

dT = 1

Math-spline \ B-spline	Ouvert	Fermé
Ouvert	B => M OK M => B OK	B => M OK M => B X
Fermé	B => M X M => B OK	B => M OK M => B OK

dT = distance entre points

Math-spline \ B-spline	Ouvert	Fermé
Ouvert	B => M OK M => B OK	B => M OK M => B X
Fermé	B => M X M => B OK	B => M OK M => B OK

« B => M » signifie : « déplacer un point de la B-spline et met à jour les points de la Math-spline »
« M => B » signifie : « déplacer un point de la Math-spline et met à jour les points de la B-spline »

OK signifie que les courbes correspondent après le déplacement de point.
X signifie que les courbes ne correspondent plus forcément après le déplacement de point.

Cas de B-spline ouverte et Math-spline fermée :
° il est normal que déplacer un point de la B-spline ne permette pas d’avoir correspondance des courbes, car pour une courbe fermée, des points de la B-spline doivent se superposer, ce qui n’est pas imposé lorsque la B-spline est ouverte.
° déplacer un point de la Math-spline forcera les superpositions de points de la B-spline pour qu’elle donne une courbe superposée à celle de la Math-spline.

Cas de B-spline fermée et Math-spline ouverte :
° il est normal que déplacer un point de la Math-spline ne permette pas d’avoir correspondance des courbes, car pour une courbe fermée, le premier et le dernier point de la Math-spline sont imposé, ce qui n’est le cas lorsque la Math-spline est ouverte.
° déplacer un point de la B-spline forcera le positionnement du premier et dernier point de la Math-spline pour qu’elle donne une courbe superposée à celle de la B-spline.
En faite, il forcera également un positionnement du deuxième et de l’avant-dernier point.

Dans le cas où les deux sont ouverts, il n’y a pas de contraires qui limite l’adaptation d’une courbe sur l’autre.

Dans le cas où les deux sont fermés, les deux subissent des contraintes qui permettent la superposition d’une courbe sur l’autre.

Annexe I, approximation de la dérivée seconde d'une fonction à partir de 3 points.

Pour calculer une courbe spline périodique, on a approximé la dérivée seconde au début et à la fin de la courbe. Ce qui suit justifie ces approximations.

Soit f une fonction C^2, donc deux fois continûment différentiable sur l'intervalle [t_m ; t_p]
$t_m < t_0 < t_p$ donnés.
Avec : $h_p = t_p - t_0$ et $h_m = t_0 - t_m$, positifs tous les deux.
On a :

$$f(t_p) = f(t_0) + f'(t_0) \cdot h_p + f''(\tau_p) \cdot \frac{h_p}{2} \quad \text{où} \quad \tau_p \in [t_0 ; t_p]$$

$$f(t_m) = f(t_0) - f'(t_0) \cdot h_m + f''(\tau_m) \cdot \frac{h_m}{2} \quad \text{où} \quad \tau_m \in [t_m ; t_0]$$

Montrons que l'expression suivante est une approximation de la dérivée seconde en t_0.

$$\frac{\frac{f(t_p) - f(t_0)}{h_p} - \frac{f(t_0) - f(t_m)}{h_m}}{h_p + h_m} \cdot 2 =$$

$$\frac{2f'(t_0) + h_p \cdot f''(\tau_p) - 2f'(t_0) + h_m \cdot f''(\tau_m)}{h_p + h_m} =$$

$$\frac{h_p \cdot f''(\tau_p) + h_m \cdot f''(\tau_m)}{h_p + h_m}$$ qui est une moyenne pondérée de la dérivée seconde avant t_0 et après t_0.

Cette fraction est plus grande que $Min\left(f''(\tau_p) \; ; \; f''(\tau_m)\right)$ et
plus petite que $Max\left(f''(\tau_p) \; ; \; f''(\tau_m)\right)$
Vu que la dérivée seconde $f''(t)$ est continue, la fraction est donc égale à
$f''(\tau_O)$ pour un $\tau_O \in [\tau_m ; \tau_p]$.
C'est donc une approximation de la dérivée seconde en t_0.

Annexe II.
Vérifications que la courbe obtenue par B-spline est deux fois continûment différentiable.

Rappelons que :

$$\boxed{s_i(t_i+\tau)=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}1 & \tau & \tau^2 & \tau^3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -1 & 3 & -3 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}U_{i-1}\\ U_i\\ U_{i+1}\\ U_{i+2}\end{pmatrix}}$$ Donc

$$\begin{aligned}s(t_i+\tau)=\frac{1}{6}\cdot[\; & U_{i-1}+4U_i+U_{i+1}+\\ & \tau\cdot(-3U_{i-1}+3U_{i+1})+\\ & \tau^2\cdot(3U_{i-1}-6U_i+3U_{i+1})+\\ & \tau^3\cdot(-U_{i-1}+3U_i-3U_{i+1}+U_{i+2})\;]\end{aligned}$$

Calculons la dérivée de s(t).

$$\begin{aligned}s'(t_i+\tau)=\frac{1}{6}\cdot[\; & -3U_{i-1}+3U_{i+1}+\\ & \tau\cdot(6U_{i-1}-12U_i+6U_{i+1})+\\ & \tau^2\cdot(-3U_{i-1}+9U_i-9U_{i+1}+3U_{i+2})\;]\end{aligned}$$

Calculons la dérivée seconde de s(t).

$$\begin{aligned}s''(t_i+\tau)= & \;U_{i-1}-2U_i+U_{i+1}+\\ & \tau\cdot(-U_{i-1}+3U_i-3U_{i+1}+U_{i+2})\;]\end{aligned}$$

Vérification de la continuité en t_i.

$$s_i(t_{i+1})=\frac{1}{6}\cdot[U_i+4U_{i+1}+U_{i+2}]=s_{i+1}(t_{i+1})\quad \text{OK}$$

Vérification de la continuité de la dérivée en t_i.

$$s'_i(t_{i+1})=\frac{1}{6}\cdot[-3U_i+3U_{i+2}]=s'_{i+1}(t_{i+1})\quad \text{OK}$$

Vérification de la continuité de la dérivée seconde en t_i.

$$s''_i(t_{i+1})=\frac{1}{6}\cdot[U_i-2U_{i+1}+U_{i+2}]=s''_{i+1}(t_{i+1})\quad \text{OK}$$

Annexe III, montrons que *s*(*t*) minimise : $\int_{t_1}^{t_{n+1}} (f''(t))^2\,dt$

Définitions :

1) C^k = l'ensemble des fonctions $f:[t_1;t_{n+1}] \to \mathbb{R}$ qui sont *k* fois continûment différentiables.

2) **E** = l'ensemble f des fonctions C^2 qui satisfont la condition : $f(t_i) = y_i$, pour $i = 1 .. n$.

Soit σ la fonction qui minimise la valeur de $\int_{t_1}^{t_{n+1}} (f''(t))^2\,dt$ parmi les fonctions f de **E**.

Cherchons quelles conditions doit satisfaire σ.

Toute fonction f de **E** peut s'écrire sous la forme : $f(t) = \sigma(t)+\epsilon\cdot\phi(t)$ pour une fonction ϕ de C^2 satisfaisant la condition : $\phi(t_i) = 0$, pour $i = 1 .. n$, et un $\epsilon\in\mathbb{R}$.

Considérons une telle fonction $f(t) = \sigma(t)+\epsilon\cdot\phi(t)$. On a :

$$\int_{t_1}^{t_{n+1}} (f''(t))^2\,dt = \int_{t_1}^{t_{n+1}} \left(\sigma''(t)+\epsilon\cdot\phi''(t)\right)^2 dt = \int_{t_1}^{t_{n+1}} (\sigma''(t))^2 dt + 2\cdot\epsilon\cdot\int_{t_1}^{t_{n+1}} \sigma''(t)\cdot\phi''(t)\,dt + \epsilon^2\cdot\int_{t_1}^{t_{n+1}} (\phi''(t))^2\,dt$$

Si l'intégrale du milieu n'est pas nulle, en posant : $\epsilon = -\dfrac{\int_{t_1}^{t_{n+1}} \sigma''(t)\cdot\phi''(t)\,dt}{\int_{t_1}^{t_{n+1}} (\phi''(t))^2\,dt}$

la fonction $f(t) = \sigma(t)+\epsilon\cdot\phi(t)$ minimisera mieux l'intégrale désirée que la fonction $\sigma(t)$, c'est-à-dire que l'on aura : $\int_{t_1}^{t_{n+1}} \left(f''(t)\right)^2 dt < \int_{t_1}^{t_{n+1}} (\sigma''(t))^2\,dt$.

Donc pour que la fonction σ satisfasse le minimum désiré, il faut que : $\int_{t_1}^{t_{n+1}} \sigma''(t)\cdot\phi''(t)\,dt = 0$

Supposons en plus que σ soit C^4 sur chaque intervalle $[t_i .. t_{i+1}]$, $i = 1 .. n$ et intégrons par partie.

$$\int_{t_1}^{t_{n+1}} \sigma''(t)\cdot\phi''(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \underbrace{\sigma''(t)}_{=f}\cdot\underbrace{\phi''(t)}_{=g'}dt =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sigma''(t)}_{=f}\cdot\underbrace{\phi'(t)}_{=g}\Big]_{t_i}^{t_{i+1}} - \sum_{i=1}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \underbrace{\sigma'''(t)}_{=f'}\cdot\underbrace{\phi'(t)}_{=g}dt =$$

$$\sigma''(t_2)\cdot\phi'(t_2) - \sigma''(t_1)\cdot\phi'(t_1) + \sigma''(t_3)\cdot\phi'(t_3) - \sigma''(t_2)\cdot\phi'(t_2) +$$
$$\sigma''(t_4)\cdot\phi'(t_4) - \sigma''(t_3)\cdot\phi'(t_3) + \sigma''(t_5)\cdot\phi'(t_5) - \sigma''(t_4)\cdot\phi'(t_4) + ... +$$
$$\sigma''(t_n)\cdot\phi'(t_n) - \sigma''(t_{n-1})\cdot\phi'(t_{n-1}) + \sigma''(t_{n+1})\cdot\phi'(t_{n+1}) - \sigma''(t_n)\cdot\phi'(t_n) -$$
$$\sum_{i=1}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \underbrace{\sigma'''(t)}_{=f}\cdot\underbrace{\phi'(t)}_{=g'}dt =$$ (Tous les termes se simplifient, sauf celui en t_1 et celui en t_{n+1})

$$\sigma''(t_{n+1})\cdot\phi'(t_{n+1}) - \sigma''(t_1)\cdot\phi'(t_1) + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sigma'''(t)}_{=f}\cdot\underbrace{\phi(t)}_{=g}\Big]_{t_i}^{t_{i+1}} - \sum_{i=1}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \underbrace{\sigma''''(t)}_{=f'}\cdot\underbrace{\phi(t)}_{=g}dt$$

<u>Conséquence :</u>
1) $\sigma''(t_{n+1}) \cdot \phi'(t_{n+1}) - \sigma''(t_1) \cdot \phi'(t_1) = 0$ si $\sigma''(t_{n+1}) = \sigma''(t_1) = 0$

2) $\sum_{i=1}^{n} \sigma'''(t) \cdot \phi(t) \Big]_{t_i}^{t_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n} \sigma'''(t_{i+1}) \cdot \phi(t_{i+1}) - \sigma'''(t_i) \cdot \phi(t_i)$ =0, car $\phi(t_i) = 0$ pour $i = 1 .. n$,

3) $\sum_{i=1}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma''''(t) \cdot \phi(t)\, dt$ =0 si $\sigma(t)$ est un polynôme de degré ≤ 3 sur chaque intervalle $[t_i .. t_{i+1}]$.
Dans ce dernier cas, σ est bien C^4 sur chaque intervalle $[t_i .. t_{i+1}]$.

On voit que la spline naturelle $s(t)$ vue au début de ce document satisfait ces conditions et donc minimise l'intégrale désirée.

Si l'on impose aux fonctions de **E** qu'elles soient aussi périodiques, alors l'expression en 1) est aussi nulle, car toutes les fonctions doivent avoir même valeur, même dérivée et même dérivée seconde aux extrémités.

Dans le cas où l'on impose aux fonctions de **E** qu'elles aient une pente fixée au début et à la fin, on a $\phi(t) = f(t) - \sigma(t)$ pour une fonction f de **E**.
Donc $\phi'(t_1) = f'(t_1) - \sigma'(t_1) = 0$ car les pentes en t_1 sont fixées. De même en t_{n+1}.
Donc dans ce cas, la fonction spline étudiée au début de ce document est de nouveau celle qui minimise l'intégrale $\int_{t_1}^{t_{n+1}} (f''(t))^2\, dt$, parmi toutes les fonctions de **E** satisfaisant les contraintes demandées.

<u>Autre démonstration.</u>
En voici une autre, très similaire.

Soit $s(t)$ la fonction spline étudiée dans ce document et une fonction f de **E**.
On va montrer que : $\int_{t_1}^{t_{n+1}} (f''(t))^2\, dt = \int_{t_1}^{t_{n+1}} s''(t)^2\, dt + \int_{t_1}^{t_{n+1}} (f''(t) - s''(t))^2\, dt$
En conséquence la fonction $s(t)$ est bien celle qui minimise l'intégrale donnée.

Notons : $\phi(t) = f(t) - s(t)$, donc $f(t) = s(t) + \phi(t)$
Calculons : $\int_{t_1}^{t_{n+1}} (f''(t))^2\, dt = \int_{t_1}^{t_{n+1}} (s''(t) + \phi''(t)(t))^2\, dt =$

$$\int_{t_1}^{t_{n+1}} (s''(t))^2\, dt + 2 \cdot \int_{t_1}^{t_{i+n}} s''(t) \cdot \phi''(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_{n+1}} (\phi''(t))^2\, dt$$

Pour conclure, il suffit de montrer que l'intégrale du milieu est nulle.

Cela se fait de la même manière que précédemment, en faisant deux intégrations par partie, en remplaçant la fonction σ par la fonction s.