Comment les savants grecs abordaient-ils le calcul de l' aire d'une figure complexe avec le seul concept d'infini potentiel ?

L'exemple d'Archimède et de son traité « La quadrature de la parabole »

1° Quelques éléments de la vie d'Archimède.

2° Quelques mots de la conception que les savants grecs se faisaient de l'infini.

3° Les coniques : état des connaissances à l'époque d'Archimède.

4° Quelques résultats connus et rappelés par Archimède dans son traité *La quadrature de la parabole*.

5° Le travail d'Archimède

a) La préface de son traité
b) L'approche *mécanique*.
c) L'argumentation géométrique.

1° Quelques éléments de la vie d'Archimède.

Archimède serait né en 287 av. J.-C. et mort au cours du siège de Syracuse en 212 av. J.-C. Si l'année de sa mort semble une donnée sûre, celle de sa naissance repose sur un texte d'un poète byzantin du XII^{e} , J. Tzetzes, qui déclare

> *Tzetzes* (XII^{e} siècle ap. J.-C.)[1]
>
> qu'il <Archimède> étudia la géométrie jusqu'à l'âge avancé de soixante quinze ans. (*Chiliad* 2, hist. 35).

[1] Grammairien, poète et commentateur de Constantinople. Il est notamment l'auteur des *Historiarum uariarum chiliades*, recueil de textes sur les personnages de l'antiquité.

2° Quelques mots concernant la conception que les Grecs se faisaient de l'infini.

Nous devons admettre l'infini, car le mouvement est lié à la notion d'*infini* en tant qu'il est continu. Le compromis, chez Aristote, va consister à dire que l'infini est seulement *en puissance* et ne saurait exister en acte : il est « ce en dehors de quoi il y a toujours quelque chose » (*Physique*, III, 6, 206 *b* 33). L'infini est donc synonyme d'imparfait et d'inachevé[2].

Aristote (385-322)

> Mais d'autre part, si l'on nie absolument l'infini, il s'ensuit nombre de conséquences inacceptables, c'est évident : en effet, il devra y avoir un commencement et une fin du temps ; les grandeurs ne seront pas divisibles en grandeurs, et le nombre ne sera pas infini. Puisque, ceci établi, des deux côtés apparaît une impossibilité, il faut un compromis et il est clair que l'infini est en un sens, en un autre non.
>
> Or, l'être se dit et de l'être en puissance et de l'être en acte, et l'infini est par composition et par retranchement. Que la grandeur n'est pas infinie en acte, on l'a dit ; mais elle l'est par division, car il n'est pas difficile de ruiner les lignes insécables ; reste donc que l'infini est en puissance. Mais il ne faut pas prendre l'expression « en puissance », comme dans le cas où l'on dit : ceci est en puissance une statue, c'est-à-dire sera une statue, comme s'il y avait une chose infinie qui dût dans l'avenir être en acte ; mais puisque l'être se prend en plusieurs acceptions, de même que l'existence de la journée et de la lutte est un renouvellement continu, de même aussi l'infini.(*Physique*, III, 6, 206 *a* 9-25, vol. 1, pp. 103-104).

[2] Le mouvement continu, en tant qu'il est susceptible d'une division indéfiniment renouvelable, emporte bien l'infini en puissance ; mais en acte, et à tout moment, il ne renferme qu'un nombre fini de parties finies.

3° Les coniques : état des connaissances à l'époque d'Archimède.

Dans un segment de parabole on appelle *base* du segment la droite qui limite la parabole. Le *sommet* du segment est le point le plus éloigné de la base. La droite qui passe par le milieu de la base et le sommet est appelée *diamètre* du segment de parabole.

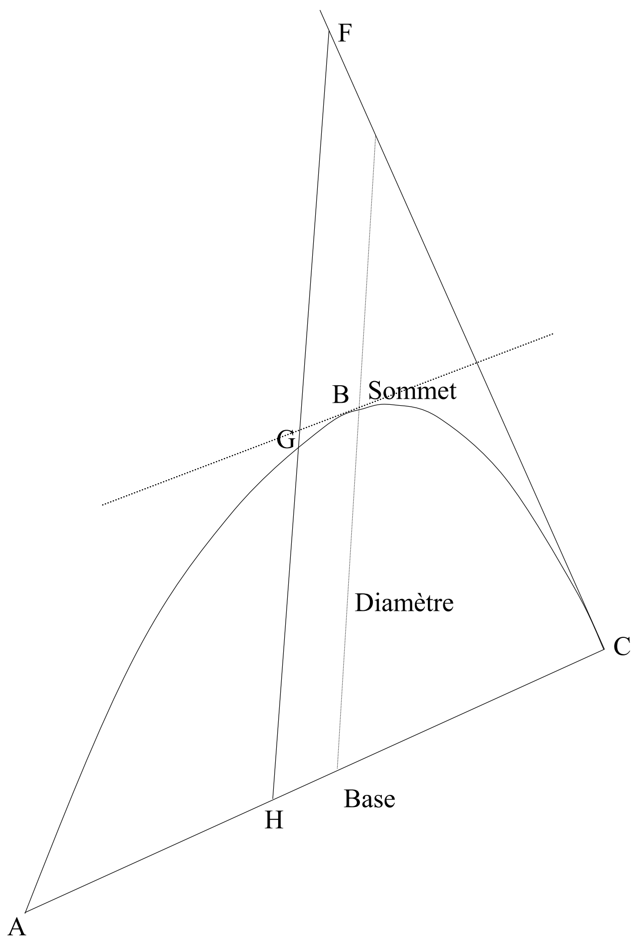
Euclide aurait montré, dans son traité *Les coniques*, aujourd'hui disparu, les résultats ci-après. Ces résultats se trouvent intégrés dans le traité plus tardif d'Appolonius de Perge, intitulé lui aussi, *Les coniques*. Voici les résultats dont se sert Archimède dans son traité, donnés ici sans démonstration.

La tangente au segment de parabole en son sommet est parallèle à la base du segment.

Le sommet d'un segment de parabole se situe à égale distance de l'intersection de la base et du diamètre et l'intersection du diamètre et de la tangente au segment de parabole en une des extrémités de la base.

Si une parallèle au diamètre rencontre la base AC en un point H, le segment de parabole en un point G et la tangente au segment de parabole en l'extrémité C de la base, au point F, alors

$$\frac{FH}{GH} = \frac{AC}{AH}$$



5° Le travail d'Archimède

a) La préface de son traité

Archimède à Dosithée, prospérité !

Quand j'appris que Conon, dont l'amitié ne m'avait jamais fait défaut, était mort, que tu avais été lié avec Conon et que tu es expert en géométrie, je fus affligé de la mort d'un homme qui était à la fois un ami et un esprit remarquable en mathématiques, et je pensai à t'envoyer par écrit, comme j'avais eu l'intention de le faire à Conon, un théorème de géométrie, qui n'avait pas été étudié auparavant, mais que j'ai étudié maintenant, en le démontrant par la géométrie après l'avoir découvert par la mécanique. Certains des géomètres anciens se sont efforcés de montrer par écrit qu'il est possible de trouver une aire rectiligne équivalente à l'aire d'un cercle donné ou à celle d'un segment de cercle donné, après quoi ils ont essayé de carrer l'aire comprise entre une section de cône entier et une droite, en assumant des lemmes inadmissibles, et c'est là la raison pour laquelle la plupart ont jugé que ces propositions n'ont pas été inventées par eux. En ce qui concerne le segment compris entre une droite et une parabole, nous savons qu'aucun des géomètres anciens n'en a cherché la quadrature, que nous avons trouvée maintenant; nous démontrons, en effet, que tout segment compris entre une droite et une parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment. (…)
(*La quadrature de la parabole*, T. 2, pp. 164-65).

b) L'approche *mécanique*

Archimède à Eratosthène, prospérité !

(…)

M'apercevant, comme je te l'ai déjà dit, que tu es studieux, que tu domines d'une manière remarquable les questions de philosophie et que tu sais apprécier à sa valeur l'enquête mathématique sur des problèmes nouveaux qui se présentent, j'ai jugé à propos de te décrire, et de développer dans ce même livre, les propriétés caractéristiques d'une méthode qui te permettra d'aborder certaines propositions mathématiques par le biais de la mécanique. Mais je suis persuadé que cet outillage peut servir même pour la démonstration des théorèmes; certaines propriétés, en effet, qui m'étaient d'abord apparues comme évidentes par la mécanique, ont été démontrées plus tard par la géométrie, parce qu'une étude faite par cette méthode n'est pas susceptible de démonstrations; car il est plus aisé d'édifier la démonstration après avoir acquis préalablement quelque connaissance des objets de la recherche au moyen de cette méthode que de chercher sans la moindre connaissance. (…)

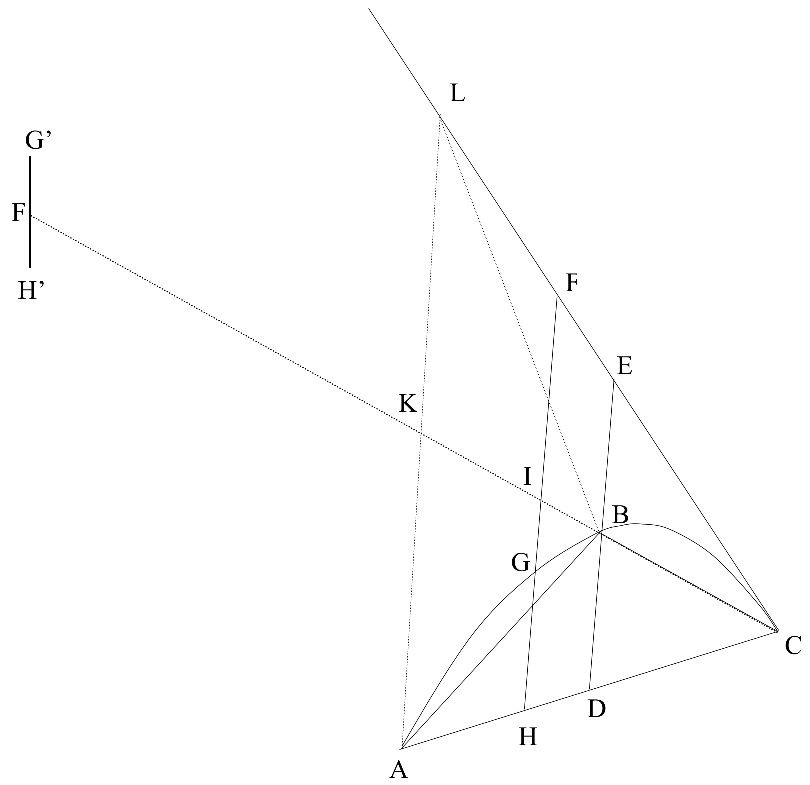
Or il m'arrive que, aussi pour les propositions que je vais exposer maintenant, la découverte m'est venue de la même manière que pour les propositions précédentes; aussi ai-je voulu rédiger et publier cette méthode, à la fois parce que j'en ai parlé antérieurement et que j'ai voulu éviter de paraître à certains avoir proféré de vaines paroles, et parce que je suis convaincu d'apporter une contribution très utile à la recherche mathématique. Je suis persuadé, en effet, que des chercheurs, soit à notre époque, soit de l'avenir, trouveront, par l'application de la méthode que j'aurai fait connaître, encore d'autres propositions qui ne me sont pas encore venues à l'esprit.

Je rédige donc en premier lieu la proposition qui fut aussi la première à m'être révélée par la mécanique, à savoir tout segment de parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur, ensuite une à une les propositions qui ont été consacrée aux démonstrations géométriques des théorèmes dont je t'avais envoyé les énoncés antérieurement.

(*La méthode à Eratosthène*, T.3, pp. 82-84).

Pour réaliser cette approche *mécanique* Archimède va s'appuyer sur une loi des leviers, à savoir : que deux masses, par rapport à un point d'appui, s'équilibrent selon des distances inversement proportionnelles à ces masses. Ainsi un objet quatre fois plus massif qu'un autre objet équilibrera ce dernier s'il est placé à une distance quatre fois moins éloignée du point d'appui.

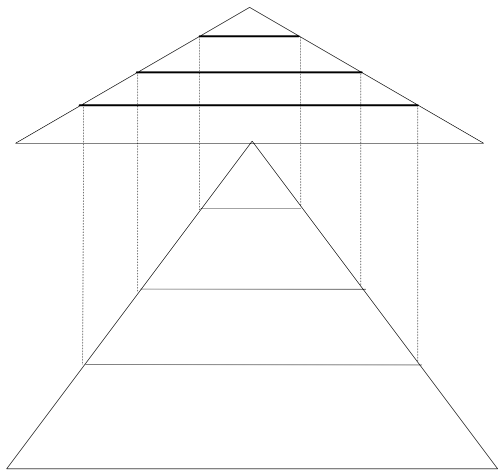
S'appuyant sur ce résultat et sur la proportion connues sur les segments de parabole, Archimède constate que le segment de la parabole, considéré comme une somme de micro-bandes, équilibrent le triangle formé de la base du segment de parabole, la tangente à ce segment au point C et la parallèle au diamètre au point A, autre extrémité de la base.



Comme la masse de ce triangle peut être considérée comme concentrée au centre de gravité du triangle et que ce dernier partage toute médiane dans une proportion 1/3, 2/3 Archimède conclut que la masse du segment de parabole, situé trois fois plus loin du point de levier et 3 fois moins massif que le triangle. Mais le triangle inscrit dans le segment de parabole est le quart, en surface du triangle équilibré par le segment de parabole. Donc le triangle inscrit dans le segment de parabole correspond aux 3/4 de l'aire de ce segment.

Mais comme le fait très justement remarquer Archimède lui-même si « cet outillage peut servir même pour la démonstration des théorèmes; certaines propriétés, en effet, qui m'étaient d'abord apparues comme évidentes par la mécanique, ont été démontrées plus tard par la géométrie, *parce qu'une étude faite par cette méthode n'est pas susceptible de démonstrations* ».

De quoi Archimède se méfiait-il ? En quoi cette approche mécanique n'était-elle pas démonstrative ? La figure ci-dessous permet d'illustrer la difficulté de cette méthode.



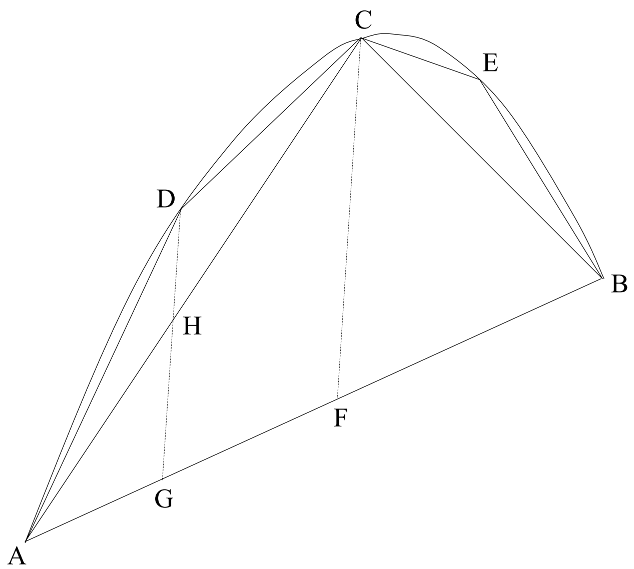
Mais comme Archimède le signale plus loin dans son texte, cette méthode est utile « car il est plus aisé d'édifier la démonstration après avoir acquis préalablement quelque connaissance des objets de la recherche au moyen de cette méthode que de chercher sans la moindre connaissance. » Fort de ce résultat il peut s'attaquer à sa démonstration rigoureuse.

c) L'argumentation géométrique.

Archimède entreprend alors la démonstration géométrique selon une méthode élaborée par un mathématicien qui fréquenta l'Académie de Platon, Eudoxe de Cnide, méthode qu'un mathématicien du milieu du XVII^{e} siècle, Grégoire de St Vincent aurait appelé, méthode d'*exhaustion*, qui littéralement signifie, méthode par épuisement.

Cette méthode de démonstration s'utilise lorsque l'on cherche à démontrer que deux quantités, ici des surfaces, sont égales. On procède en montrant que si l'une des surfaces est soit plus grande, soit plus petite que la seconde on débouche sur une contradiction. Conclusion : ces surfaces ne peuvent être qu'égales. Pour montrer que les deux inégalités entraînent des conclusions absurdes on construit une figure polygonale dont l'aire s'approche indéfiniment de l'aire de la plus grandes des deux surfaces envisagées. Cette aire polygonale, littéralement épuise l'aire de la, supposée, plus grande des surfaces.

Ici, Archimède doit montrer que l'aire du segment de paraboleABCD vaut les 4/3 du triangle ABC.



Il construit une figure polygonale constituée, dans une première étape, de deux triangles construits sur les côtés du triangle ABC. Ces deux triangles sont, comme le triangle ABC, construit sur des segments de parabole, et les sommets D et E de ces triangles sont aussi les sommets des deux segments de parabole. Cette deuxième étape est suivie d'une troisième où l'on reprend le même procédé sur chacune des quatre nouvelles bases pour construire quatre nouveaux triangle et ainsi de suite jusqu'à épuisement de la différence entre cette figure polygonale et le segment de parabole.

Les propriétés de la parabole permettent de vérifier que AF=BF, AG=GF, DG est parallèle à CF, CF=4 DH et CF= 4/3 DG. Par Thalès on a que AH=CH. Comme HG= 2 DH on a que le triangle ADH a une aire moitié du triangle AGH. De là on tire que le triangle ACF est quadruple du triangle ACD, et donc que les deux triangle ACD et BCE, pris ensembles, ont une aire quatre fois moins grande que l'aire du triangle ABC. Ce rapport du ¼ se retrouve à l'étape suivante relativement aux triangles ACD et BCE. On a donc que la surface polygonale, après *n* étapes, a une aire équivalente à

$$ABC + \frac{1}{4}ABC + \left(\frac{1}{4}\right)^2 ABC + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n ABC.$$

Cette série géométrique de raison ¼ peut s'écrire de manière condensée sous la forme

$$\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)}\right) \cdot ABC \text{ ou encore } \left(\frac{4}{3}\right) \cdot ABC - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot ABC.$$

Face à cette expression nous aurions continué le calcul en « passant à la limite » c'est-à-dire en posant

Aire du segment de parabole = $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{4}{3}\right) \cdot ABC - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot ABC\right] = \left(\frac{4}{3}\right) \cdot ABC$ et le tour était joué !!!

Mais ce calcul aurait signifié aux yeux du savant de Syracuse, que le segment de parabole est un infini qui s'actualise, que la suite de ces triangles ajoutés à la figure polygonale précédente finit par s'actualiser dans le segment de parabole, ce qui aux yeux d'Aristote est impossible comme il le précise plus haut : « mais il ne faut pas prendre l'expression « en puissance », comme dans le cas où l'on dit : ceci est en puissance une statue, c'est-à-dire sera une statue, comme s'il y avait une chose infinie qui dût dans l'avenir être en acte »

Archimède va contourner ce passage de la puissance à l'acte en restant dans le cadre d'un infini potentiel en adoptant la méthode par exhaustion. Voici comment il procède.

1° Supposons que l'aire du segment de parabole, S, soit supérieure aux 4/3 ABC, que l'on notera T. En prenant un nombre suffisant d'étape on peut s'assure que l'aire du polygone, P_n est comprise, strictement entre T et S : $T < P_n < S$. Mais comme on l'a vu
$P_n = \left(\frac{4}{3}\right) \cdot ABC - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot ABC = T - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot ABC < T$, ce qui est contradictoire. Donc $S \leq T$.

2° Archimède montre que S<T est également absurde. En effet, considérons un *n*, suffisamment grand pour que $\left(\frac{1}{4}\right)^n ABC < \mathrm{T} - \mathrm{S} = e$. On aurait d'une part

$$\mathrm{T} = ABC + \frac{1}{4}ABC + \left(\frac{1}{4}\right)^2 ABC + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n ABC + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n ABC < P_n + \left(\frac{1}{4}\right)^n ABC < P_n + e$$

et d'autre part T=S+*e* ce qui entraînerait que $P_n > S$, ce qui est évidement absurde, par la construction de P_n.

Conclusion : S=T.

Comment réglons-nous cette question aujourd'hui ?
Considérons la fonction $f : x \mapsto -x^2 + 4$. Calculons l'aire du segment de parabole limité par l'axe horizontal :

$$\int_{-2}^{2} \left(-x^2 + 4\right) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

Ce qui correspond bien aux 4/3 de l'aire du triangle ayant 4 pour base et 4 pour hauteur

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{32}{3} \text{ !!!}$$

Il faudrait certes effectuer, comme l'établit Archimède, le calcul en toute généralité, pour tout segment de parabole. Mais moyennant un déplacement du graphique de la parabole et une utilisation judicieuse du théorème des accroissements finis, on voit que cette généralisation peut être obtenue sans trop de difficultés. Encore fallait-il disposer d'une définition du concept de fonction, de celui de limite d'une fonction en un point, etc. et c'est justement tout ce qu'une réflexion à propos de la mathématisation du mouvement, étalée sur des siècles, a permis de conquérir !