Annexe II. Les trois lois de Kepler

Johannes Kepler (1571-1630), publie en 1596 son premier ouvrage, Mysterium Cosmographicum. Treize années plus tard, en 1609, il publie Astronomia Nova, dans lequel il énonce ses trois lois, appelée maintenant "Les trois lois de Kepler".
(c.f. http://fr.wikipedia.org/wiki/Kepler et
http://www.astrofiles.net/modules.php?name=News&file=article&sid=22)

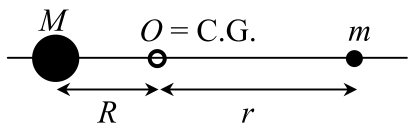
La première loi de Kepler dit que les planètes tournent autour du Soleil en suivant des trajectoires elliptiques et que le Soleil est placé à l'un des foyers de cette ellipse.

L'énoncé n'est pas entièrement correct, car le Soleil n'est pas placé à l'un des foyers, mais théoriquement c'est le centre de gravité des deux astres, Soleil et planète concernée. Pratiquement, Ce centre de gravité est à l'intérieur du Soleil car il est beaucoup plus massif que les planètes. D'autre part, le Soleil est perturbé principalement par Jupiter. Pour les autres planètes le centre du Soleil peut pratiquement être pris comme foyer de l'ellipse.

Un grand succès de la mécanique d'Isaac Newton (1642-1727), a été d'établir trois lois de base de la mécanique, ainsi que de la loi de la gravitation universelle, puis de démontrer les trois lois de Kepler à partir de ses lois de bases. Toutes les observations faites à son époque ont put être expliquées à partir des trois lois de bases de la mécanique et de la loi de la gravitation universelle.

Montrons la première loi de Kepler

Premièrement, l'origine O sera placée au centre de masse du Soleil de masse M et de la planète de masse m.
Notons r la distance entre le centre de gravité O et la planète de masse m.
Notons R la distance entre le centre de gravité O et le Soleil de masse M.
Les deux astres sont disposés sur une droite passant par O, un de chaques côtés de O.



En conséquence : $m \cdot r = M \cdot R$, donc $R = \frac{m}{M} \cdot r$

Donc $R + r = \left(\frac{m}{M} + 1\right) \cdot r$.

La loi de la gravitation universelle dit que
la force d'attraction des planètes est :

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{(R+r)^2} = G \cdot \frac{M \cdot m}{(\alpha \cdot r)^2}, \text{ où } \underline{\underline{\alpha = \left(\frac{m}{M} + 1\right)}}.$$

Par intégration, on obtient l'énergie potentielle de la planète.

$$E_{pot}(r) = \int_{\infty}^{r} F \cdot dr = \int_{\infty}^{r} G \cdot \frac{M \cdot m}{\alpha^2 \cdot r^2} \cdot dr = G \cdot \frac{M \cdot m}{\alpha^2} \cdot \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2} \cdot dr$$

$$E_{pot}(r) = G \cdot \frac{M \cdot m}{\alpha^2} \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{\alpha^2 \cdot r}$$

Donc $\boxed{E_{pot}(r) = -G \cdot \frac{M \cdot m}{\alpha^2 \cdot r}}$

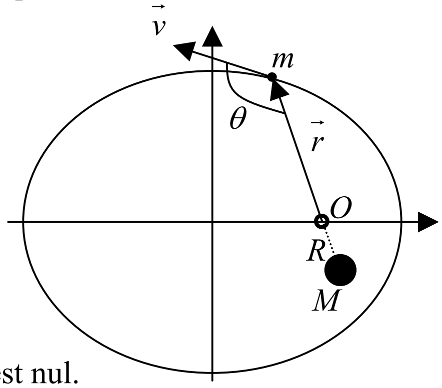
L'énergie cinétique de la planète est : $\boxed{E_{cin}(v) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}$

Le principe de conservation d'énergie permet d'établir : $E_{pot} + E_{cin} = E_{méc} = constante$

Dans le cas de trajectoire elliptique, l'énergie mécanique est négative.

Le premier résultat important est : $\boxed{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \frac{M \cdot m}{\alpha^2 \cdot r} = -\left|E_{méc}\right| = constante < 0}$

Le deuxième résultat important vient de la conservation du moment cinétique en cas de force centrale.



Le moment cinétique est défini par : $\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$.
$\vec{L}$ = m fois le produit vectoriel de $\vec{r}$ avec $\vec{v}$.

En dérivant par rapport au temps, on a : $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = m \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m \cdot \vec{r} \times \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{d\vec{L}}{dt} = m \cdot \vec{v} \times \vec{v} + m \cdot \vec{r} \times \vec{a} = m \cdot \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$

Le terme $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$, car le produit vectoriel d'un vecteur avec lui-même est nul.
Le terme $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$, car la force est centrale, c'est à dire que $\vec{r}$ et $\vec{F}$ sont de même direction et le produit vectoriel de deux directeurs de même direction est nul.

En conséquence, le vecteur $\vec{r}$ reste dans le plan perpendiculaire à $\vec{L} = \overrightarrow{constante}$.
La trajectoire est dans un plan.
Et $\|\vec{L}\| = \|m \cdot \vec{r} \times \vec{v}\| = m \cdot r \cdot v \cdot \sin(\theta) = L_0 =$ constante.

On en déduit le deuxième résultat important : $\boxed{v = \dfrac{L_0}{m \cdot r \cdot \sin(\theta)}}$.

En combinant les deux résultats importants, on trouve une relation entre la distance r du centre de gravité O à la planète, et l'angle θ entre $\vec{r}$ et la tangente à la trajectoire.

On substitue $v^2 = \dfrac{L_0^2}{m^2 \cdot r^2 \cdot \sin^2(\theta)}$ dans $\dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \dfrac{M \cdot m}{\alpha^2 \cdot r} = -|E_{méc}| = constante < 0$,

pour obtenir : $\dfrac{1}{2} \cdot m \cdot \dfrac{L_0^2}{m^2 \cdot r^2 \cdot \sin^2(\theta)} - G \cdot \dfrac{M \cdot m}{\alpha^2 \cdot r} = -|E_{méc}|$

On simplifie : $\dfrac{L_0^2}{2 \cdot |E_{méc}| \cdot m \cdot r^2 \cdot \sin^2(\theta)} - \dfrac{G \cdot m \cdot M}{|E_{méc}| \cdot \alpha^2 \cdot r} = -1$

Ce qui donne : $\boxed{\dfrac{b^2}{r^2 \cdot \sin^2(\theta)} - \dfrac{2 \cdot a}{r} = -1}$, avec : $\boxed{b^2 = \dfrac{L_0^2}{2 \cdot |E_{méc}| \cdot m} \quad \text{et} \quad 2 \cdot a = \dfrac{G \cdot m \cdot M}{|E_{méc}| \cdot \alpha^2}}$.

Ces définitions de a et de b sont naturelles si l'équations est celle d'une ellipse et qu'on la teste sur les 2 intersections de l'équation avec l'axe x. Dans un cas $\theta = 90°$ et $r = a - c$, dans l'autre cas $\theta = 90°$ et $r = a + c$. ($b^2 = a^2 - c^2$)

La partie physique est terminée. Nous avons obtenu une relation entre la distance r du centre de gravité O à la planète, et l'angle θ entre $\vec{r}$ et la tangente à la trajectoire. Il reste à montrer que cette relation décrit une ellipse.

Simplifions un peu cette relation : $\dfrac{b^2}{r^2 \cdot \sin^2(\theta)} = \dfrac{2 \cdot a}{r} - 1 = \dfrac{2 \cdot a - r}{r} = \dfrac{r'}{r}$

$2 \cdot a - r = r'$ = la distance du deuxième foyer à la planète, si a = le grand axe de l'ellipse.
Donc : $\boxed{b^2 = r' \cdot r \cdot \sin^2(\theta)}$.
a = le grand axe de l'ellipse. $(-c\,;\,0)$ et $(c\,;\,0)$ sont les positions des deux foyers.
b = le petit axe de l'ellipse.
r = la distance du premier foyer O à la planète.
r' = la distance du deuxième foyer à la planète.

Le fait que cette relation décrit une ellipse est montré dans le document :
http://www.juggling.ch/gisin/physique/KeplerLois/Ellipse_proprietes.pdf
à la propriété 6. Dans ce document, la lettre L est utilisée au lieu de r.

<u>Remarques sur l'énergie mécanique $E_{méc}$ et le moment cinétique L_0.</u>

Les relations : $b^2 = \dfrac{L_0^2}{2\cdot|E_{méc}|\cdot m}$ et $2\cdot a = \dfrac{G\cdot m\cdot M}{|E_{méc}|\cdot\alpha^2}$ ont été vues ci-dessus.

m = la masse de la planète.

M = la masse du Soleil. $\alpha = \left(\dfrac{m}{M}+1\right)$

$G = 6,67259\cdot 10^{-11}\left[\dfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\right]$ est la constante de la gravitation universelle.

a = le grand axe de l'ellipse.
b = le petit axe de l'ellipse.
$E_{méc}$ = l'énergie mécanique de la planète.
L_0 = le moment cinétique de la planète relativement au centre de gravité O.

Notons $r_{\min} = a - c$ = la distance la plus petite entre la planète et O.
Notons $r_{\max} = a + c$ = la distance la plus grande entre la planète et O.
Notons $v_{\min}$ = la vitesse la plus petite de la planète.
Notons $v_{\max}$ = la vitesse la plus grande de la planète.

Quand $r = r_{\min}$, alors la vitesse $v = v_{\max}$ et l'angle θ entre $\vec{r}$ et $\vec{v}$ égale 90°.
Quand $r = r_{\max}$, alors la vitesse $v = v_{\min}$ et l'angle θ entre $\vec{r}$ et $\vec{v}$ égale 90°.

Donc $\boxed{L_0 = m\cdot r_{\min}\cdot v_{\max} = m\cdot r_{\max}\cdot v_{\min}}$; $r_{\max} = r_{\min}\cdot\dfrac{1-e}{1+e}$; $v_{\max} = v_{\min}\cdot\dfrac{1-e}{1+e}$

On en déduit avec $b^2 = \dfrac{L_0^2}{2\cdot|E_{méc}|\cdot m}$ que :

$$|E_{méc}| = \frac{L_0^2}{2\cdot m\cdot b^2} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\frac{L_0\cdot L_0}{m\cdot b\cdot m\cdot b} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\frac{r_{\min}}{b}\cdot\frac{r_{\max}}{b}\cdot v_{\min}\cdot v_{\max}\,. \qquad \boxed{|E_{méc}| = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\frac{r_{\min}}{b}\cdot\frac{r_{\max}}{b}\cdot v_{\min}\cdot v_{\max}}$$

Dans le cas particulier d'une <u>trajectoire circulaire</u>, $r_{\min} = r_{\max} = b\ (= a)$ et $v_{\min} = v_{\max} = v$.

Donc dans ce cas : $|E_{méc}| = \dfrac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 = E_{cin}$.

Plus précisément, $E_{méc} = -E_{cin}$

L'énergie mécanique égale moins l'énergie cinétique, donc
l'énergie potentielle égale moins deux fois l'énergie cinétique. $E_{pot} = -2\cdot E_{cin}$.

Ce résultat se retrouve par un autre chemin.

Pour une trajectoire circulaire, on a : $F_{centripète} = m\cdot\dfrac{v^2}{r}$.

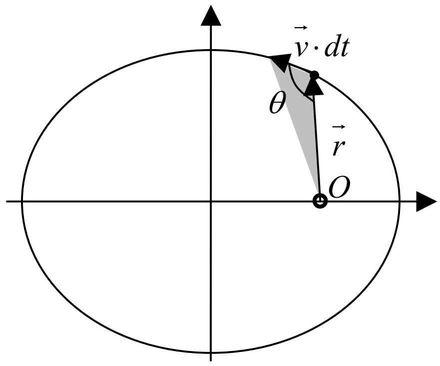
Ici $F_{centripète} = G\cdot\dfrac{m\cdot M}{\alpha^2\cdot r^2}$.

Donc $G\cdot\dfrac{m\cdot M}{\alpha^2\cdot r^2} = m\cdot\dfrac{v^2}{r} \iff \underbrace{G\cdot\dfrac{m\cdot M}{\alpha^2\cdot r}}_{|E_{potentielle}|} = \underbrace{m\cdot v^2}_{2\cdot E_{cinétique}}$.

On retrouve le résultat du cas particulier d'une trajectoire circulaire.

La loi des aires. C'est la deuxième loi de Kepler.

Le vecteur $\vec{r}$ balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.



Ce résultat est immédiat, si on sait que :

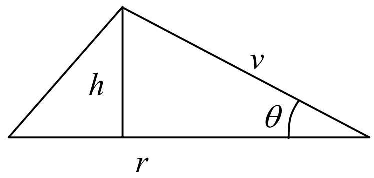
1) L'aire du triangle formé par $\vec{r}$ et $\vec{v}$ égale $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\|\vec{L}\|}{m}$,

   où $\vec{L}$ = le moment cinétique relativement à O.
   $\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$. ($\times =$ produit vectorielle)

2) $\vec{L} = \overrightarrow{constante}$. Ceci a été vu dans la démonstration précédente.

3) L'aire d'un triangle est $Aire = \dfrac{1}{2} \cdot r \cdot v \cdot \sin(\theta)$, où

   r = la longueur d'un côté,
   v = la longueur d'un autre côté,
   θ = l'angle entre les deux côtés.



Montrons la deuxième loi de Kepler

En un très petit temps dt, l'aire balayée par $\vec{r}$ est

Aire = $\dfrac{1}{2} \cdot r \cdot v \cdot dt \cdot \sin(\theta) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\|\vec{L}\|}{m} \cdot dt$ = constante · dt.

$$Aire = \frac{1}{2} \cdot r \cdot h = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \underbrace{v \cdot \sin(\theta)}_{=h}$$

En additionnant beaucoup de petits temps dt, on obtient :

En un temps t, on a : $\boxed{Aire(t) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\|\vec{L}\|}{m} \cdot t}$. CQFD.

Pour un tour complet, on a : $\boxed{\pi \cdot a \cdot b = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\|\vec{L}\|}{m} \cdot T}$

$\pi \cdot a \cdot b$ = l'aire de l'ellipse.
$\vec{L}$ = le moment cinétique relativement à O. $\|\vec{L}\| = L_0$.
m = la masse de la planète.
T = la période = le temps mis par la planète pour faire un tour complet autour du Soleil.

De : $b^2 = \dfrac{L_0^2}{2 \cdot |E_{méc}| \cdot m}$ et $2 \cdot a = \dfrac{G \cdot m \cdot M}{|E_{méc}| \cdot \alpha^2}$ on en déduit : $2 \cdot |E_{méc}| \cdot m = \dfrac{G \cdot m^2 \cdot M}{a \cdot \alpha^2}$ et donc :

$$L_0^2 = b^2 \cdot 2 \cdot |E_{méc}| \cdot m = b^2 \cdot \frac{G \cdot m^2 \cdot M}{a \cdot \alpha^2},$$

Donc le moment cinétique égale : $\boxed{L_0 = \dfrac{b \cdot m}{\alpha} \cdot \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{a}}}$

Troisième loi de Kepler.

$\frac{a^3}{T^2} = constante$, plus précisément : $\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4 \cdot \pi^2 \cdot \alpha^2}}$ où

a = le grand axe de l'ellipse.
T = la période = le temps mis par la planète pour faire un tour complet autour du Soleil.

Montrons la troisième loi de Kepler

Les relations : $b^2 = \frac{L_0^2}{2 \cdot |E_{méc}| \cdot m}$; $2 \cdot a = \frac{G \cdot m \cdot M}{|E_{méc}| \cdot \alpha^2}$ et $\pi \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \frac{\|\vec{L}\|}{m} \cdot T$ ont été vues ci-dessus.

m = la masse de la planète.
M = la masse du Soleil. $\alpha = \left(\frac{m}{M} + 1 \right)$

$G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \left[\frac{N \cdot m^2}{kg^2} \right]$ est la constante de la gravitation universelle.

a = le grand axe de l'ellipse.
b = le petit axe de l'ellipse.
$E_{méc}$ = l'énergie mécanique de la planète.
L_0 = le moment cinétique de la planète relativement au centre de gravité O.

De $2 \cdot a = \frac{G \cdot m \cdot M}{|E_{méc}| \cdot \alpha^2}$ on tire que : $|E_{méc}| = \frac{G \cdot m \cdot M}{2 \cdot a \cdot \alpha^2}$

Avec $b^2 = \frac{L_0^2}{2 \cdot |E_{méc}| \cdot m}$ on en déduit que : $\frac{L_0^2}{m^2} = \frac{G \cdot M}{a \cdot \alpha^2} \cdot b^2 = \frac{\|\vec{L}\|^2}{m^2}$.

En mettant au carré $\pi \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \frac{\|\vec{L}\|}{m} \cdot T$ et en utilisant l'expression pour L_0^2, on a :

$$\pi^2 \cdot a^2 \cdot b^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\|\vec{L}\|^2}{m^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{G \cdot M}{a \cdot \alpha^2} \cdot b^2 \cdot T^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4 \cdot \pi^2 \cdot \alpha^2} \quad \text{CQFD.}$$

Le rapport $\frac{a^3}{T^2}$ dépend légèrement de la masse m de la planète qui se trouve dans $\alpha = \left(\frac{m}{M} + 1 \right)$.
Mais si $m << M$, sont influence est négligeable.

Remarque.
Parfois on décrit l'ellipse formée par la distance $r + R$ ($= \tilde{r}$) entre la planète et le Soleil.
C'est le cas du livre de mécanique de Berkeley, "cours de physique" volume 1.
Dans ce cas, il faut substituer r, a et b de cette présentation à l'aide de :
$r = \tilde{r} \;/\; \alpha$; $a = \tilde{a} \;/\; \alpha$ et $b = \tilde{b} \;/\; \alpha$ pour obtenir les formules de l'autre présentation.
$\tilde{a}$ = grand axe, $\tilde{b}$ = petit axe de l'ellipse décrit par la planète, vue depuis le Soleil.
Par exemple, on a :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4 \cdot \pi^2 \cdot \alpha^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^3 \cdot \alpha^3}{T^2} = \frac{G \cdot M \cdot \alpha}{4 \cdot \pi^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\tilde{a}^3}{T^2} = \frac{G \cdot (m + M)}{4 \cdot \pi^2}.$$

C'est cette dernière égalité qui se trouve dans le cours de mécanique de Berkeley.

Troisième loi de Kepler dans le cas de trajectoire circulaire.

Dans le cas d'une trajectoire circulaire, cette loi est facile à montrer. $\boxed{\dfrac{a^3}{T^2} = \dfrac{G \cdot M}{4 \cdot \pi^2 \cdot \alpha^2}}$

Pour une trajectoire circulaire,

$F_{centripète} = m \cdot \dfrac{v^2}{r}$ et $F_{centripète} = \dfrac{G \cdot M \cdot m}{\alpha^2 \cdot r^2}$; $\alpha = \left(\dfrac{m}{M} + 1\right)$

$v = \dfrac{\text{distance}}{\text{temps}} = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$

$r = a = b =$ rayon, les foyers sont confondus avec l'origine O.
T = la période = le temps mis par la planète pour faire un tour complet autour du Soleil.

En combinant : $F_{centripète} = m \cdot \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{G \cdot M \cdot m}{\alpha^2 \cdot r^2} \Leftrightarrow v^2 = \dfrac{G \cdot M}{\alpha^2 \cdot r}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4 \cdot \pi^2 \cdot a^2}{T^2} = \dfrac{G \cdot M}{\alpha^2 \cdot a} \Leftrightarrow \dfrac{a^3}{T^2} = \dfrac{G \cdot M}{4 \cdot \pi \cdot \alpha^2}$. On retrouve bien la relation attendue.

Changement de référentiel.
Dans ce qui précède, les grandeurs r, a et b sont relatives au centre de gravité O du système planète - Soleil.
Si on prend le Soleil comme origine, tout ce qui précède est correct, lorsqu'on prend les grandeurs $\tilde{r} = \alpha \cdot r$, $\tilde{a} = \alpha \cdot a$ et $\tilde{b} = \alpha \cdot b$ relativement au Soleil.

Il suffit de substituer r ; a et b par $\dfrac{\tilde{r}}{\alpha}$; $\dfrac{\tilde{a}}{\alpha}$ et $\dfrac{\tilde{b}}{\alpha}$.

La trajectoire reste elliptique, la loi des aires reste valable,

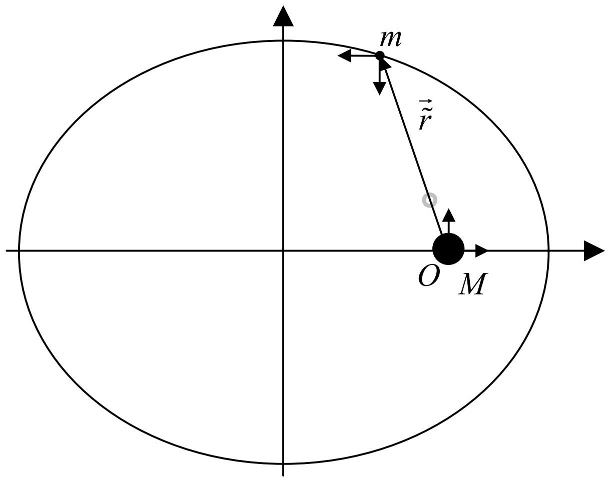
la relation $\dfrac{\tilde{a}^3}{T^2} = \dfrac{G \cdot (m+M)}{4 \cdot \pi^2}$ est correcte.

Ainsi que : $\tilde{b}^2 = \dfrac{\tilde{L}_0^2}{2 \cdot |E_{méc}| \cdot m}$; $2 \cdot \tilde{a} = \dfrac{G \cdot m \cdot M}{|E_{méc}|}$

Et pour un temps t, on a : $\widetilde{Aire}(t) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\|\vec{\tilde{L}}\|}{m} \cdot t$.

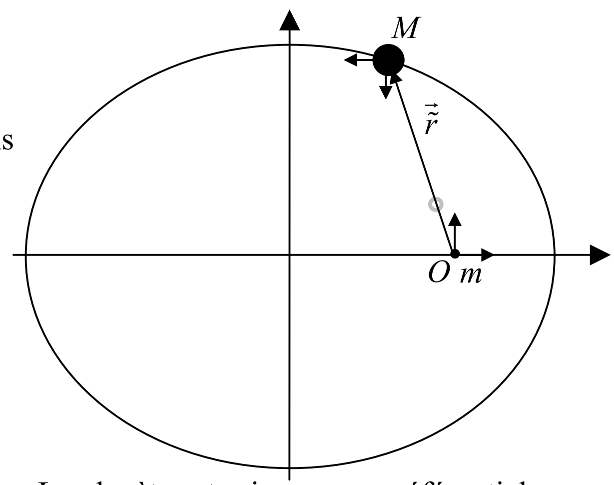
Pour un tour complet, on a : $\pi \cdot \tilde{a} \cdot \tilde{b} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\|\vec{\tilde{L}}\|}{m} \cdot T$.

La période T reste la même, ainsi que les masses.
L'énergie mécanique $|E_{méc}|$ reste celle de la planète.



Le Soleil est pris comme référentiel.

Si on prend la planète comme référentiel, toutes les relations ci-dessus sont valables.
Le Soleil suit la trajectoire elliptique, décrite ci-dessus.
Il faut utiliser les grandeurs
$\tilde{r} = \alpha \cdot r$, $\tilde{a} = \alpha \cdot a$ et $\tilde{b} = \alpha \cdot b$
pour décrire le Soleil vu depuis la planète.



La planète est prise comme référentiel.

L'équation du temps de Kepler.

Revenons au référentiel du centre de gravité. Ce qui suit peut aussi être décrit depuis le Soleil ou la planète.

La loi des aires indique que : $Aire(t) = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{T} \cdot t$

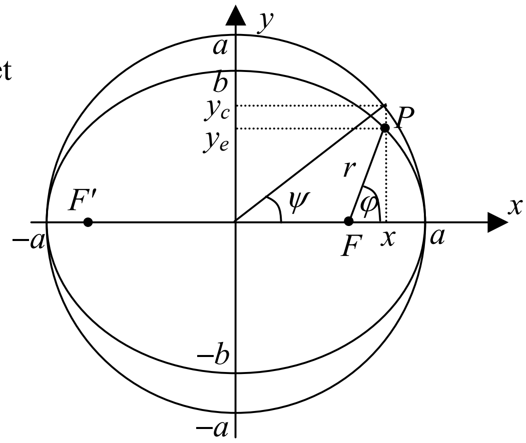
La partie sur les propriétés d'une ellipse montrées dans le document :
http://www.perso.ch/bernard.gisin/physique/KeplerLois/Ellipse_proprietes.pdf
donnent la relation :

$Aire(\psi) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot (\psi - e \cdot \sin(\psi))$ où ψ est l'**anomalie excentrique**.

En conséquence $\frac{\pi \cdot a \cdot b}{T} \cdot t = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot (\psi - e \cdot \sin(\psi)) \Leftrightarrow \boxed{t = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot T \cdot (\psi - e \cdot \sin(\psi))}$

C'est l'équation du temps de Kepler.

L'anomalie excentrique ψ est un angle qui est relié à l'angle φ et à d'autres grandeurs par différentes relations.
Le dessin donne la définition de ψ.



$y_e = \frac{b}{a} \cdot y_c$; $L = a - e \cdot x$;

$\sin(\psi) = \frac{y_c}{a}$; $\cos(\psi) = \frac{x}{a}$; $\tan(\psi) = \frac{y_c}{x}$;

$\sin(\varphi) = \frac{y_e}{L}$; $\cos(\varphi) = \frac{x - c}{L}$; $\tan(\varphi) = \frac{y_e}{x - c}$;

$\tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1+e}{1-e} \cdot \tan^2\left(\frac{\psi}{2}\right)$.

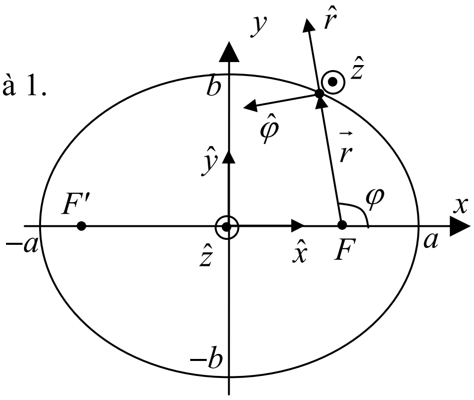
φ s'appelle l'**anomalie vraie**.

Pour plus d'informations, regardez la référence web ci-dessus.

Regardez aussi dans :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Accueil
Equation du temps : http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_du_temps
Anomalie excentrique : http://fr.wikipedia.org/wiki/Anomalie_excentrique
Anomalie vraie : http://fr.wikipedia.org/wiki/Anomalie_vraie
Anomalie moyenne : http://fr.wikipedia.org/wiki/Anomalie_moyenne
Lois de Kepler : http://fr.wikipedia.org/wiki/Lois_de_Kepler

Autre démonstration de la première loi de Kepler, vitesse et hodographe.

Voici une autre approche intéressante pour démontrer la 1ère loi de Kepler, mais en utilisant des mathématiques plus avancées !



Nous utiliserons plusieurs vecteurs unités, c'est-à-dire de norme égale à 1.

$\hat{x} = (1\,;0\,;0)$; $\hat{y} = (0\,;1\,;0)$; $\hat{z} = (0\,;0\,;1)$

Représente la base standard, fixe, indépendante de φ et du temps t.

$\hat{\varphi} = (-\sin(\varphi)\,;\cos(\varphi)\,;0)$; $\hat{r} = (\cos(\varphi)\,;\sin(\varphi)\,;0)$; $\hat{z} = (0\,;0\,;1)$

Représente une base orthonormée pratique, mais qui dépend de φ et du temps t.

On a les relations suivantes :

$\hat{r} = \hat{\varphi} \times \hat{z}$; $\hat{\varphi} = \hat{z} \times \hat{r}$; $\hat{z} = \hat{r} \times \hat{\varphi}$, où $\times$ représente le produit vectoriel.

$\hat{r} \bullet \hat{\varphi} = 0$; $\hat{\varphi} \bullet \hat{\varphi} = 1$; $\hat{y} \bullet \hat{\varphi} = \cos(\varphi)$, où $\bullet$ représente le produit scalaire.

$\dfrac{d\hat{r}}{d\varphi} = \hat{\varphi}$, cela se voit en dérivant $\hat{r} = (\cos(\varphi)\,;\sin(\varphi)\,;0)$ par rapport à φ.

$\vec{r}(t) = r(t)\cdot\hat{r}(t)$, $r\,(t)$ est la norme de $\vec{r}(t)$, c'est la distance du centre de gravité F à la planète.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{dr}{d\varphi}\cdot\hat{r} + r\cdot\frac{d\hat{r}}{d\varphi}\right)\cdot\frac{d\varphi}{dt}, \quad \text{donc} \quad \vec{v} = \left(\frac{dr}{d\varphi}\cdot\hat{r} + r\cdot\hat{\varphi}\right)\cdot\frac{d\varphi}{dt}$$

Passons à la physique.

La loi fondamentale de la dynamique $\overrightarrow{F_{\text{résultante}}} = m\cdot\vec{a} = m\cdot\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ donne ici : $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\dfrac{G\cdot M}{\alpha^2\cdot r^2}\cdot\hat{r}$.

La loi des aires donne : $\dfrac{r^2\cdot d\varphi}{dt} = \dfrac{L_0}{m}$, car $\dfrac{r^2\cdot d\varphi}{2}$ = l'élément d'aire balayé par le vecteur $\vec{r}(t)$ durant la petite durée dt.

$$\frac{m}{L_0}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r^2}.$$

En combinant ces deux relations, on élimine r^2 pour obtenir :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{G\cdot M\cdot m}{\alpha^2\cdot L_0}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\cdot\hat{r}, \quad \text{donc} \quad \frac{d\vec{v}}{d\varphi} = -\frac{G\cdot M\cdot m}{\alpha^2\cdot L_0}\cdot\hat{r} = -\frac{G\cdot M\cdot m}{\alpha^2\cdot L_0}\cdot\left(-\frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi}\right) = \frac{d}{d\varphi}\cdot\left(\frac{G\cdot M\cdot m}{\alpha^2\cdot L_0}\cdot\hat{\varphi}\right)$$

En conséquence : $\vec{v}(\varphi) = \dfrac{G\cdot M\cdot m}{\alpha^2\cdot L_0}\cdot\hat{\varphi}(\varphi) + \overrightarrow{cte}$

En utilisant $\hat{\varphi}(0) = \hat{y}$ et $\vec{v}(0) = v_{\max}\cdot\hat{y}$, on obtient : $\overrightarrow{cte} = \left(v_{\max} - \dfrac{G\cdot M\cdot m}{\alpha^2\cdot L_0}\right)\cdot\hat{y}$

En utilisant $\hat{\varphi}(\pi) = -\hat{y}$ et $\vec{v}(\pi) = v_{\min}\cdot(-\hat{y})$, on obtient : $\overrightarrow{cte} = \left(\dfrac{G\cdot M\cdot m}{\alpha^2\cdot L_0} - v_{\min}\right)\cdot\hat{y}$

En additionnant : $\overrightarrow{cte} = \dfrac{v_{\max} - v_{\min}}{2}\cdot\hat{y}$

En soustrayant : $\dfrac{G\cdot M\cdot m}{\alpha^2\cdot L_0} = \dfrac{v_{\max} + v_{\min}}{2}$ $\left(G = 6,67259\cdot10^{-11}\left[\dfrac{m^3}{s^2\cdot kg}\right]\right)$

Donc : $\boxed{\vec{v}(\varphi)-\frac{v_{max}-v_{min}}{2}\cdot\hat{y}=\frac{v_{max}+v_{min}}{2}\cdot\hat{\varphi}(\varphi)}$ et $\boxed{\vec{v}(\varphi)-\frac{G\cdot M\cdot m\cdot e}{\alpha^2\cdot L_0}\cdot\hat{y}=\frac{G\cdot M\cdot m}{\alpha^2\cdot L_0}\cdot\hat{\varphi}(\varphi)}$

En norme : $\left\|\vec{v}(\varphi)-\frac{v_{max}-v_{min}}{2}\cdot\hat{y}\right\|=\frac{v_{max}+v_{min}}{2}=\text{constante}$

De $L_o=m\cdot v_{max}\cdot(a-c)=m\cdot v_{min}\cdot(a+c)$ et $\frac{G\cdot M\cdot m}{\alpha^2\cdot L_0}=\frac{v_{max}+v_{min}}{2}$, on en tire que :

$v_{max}=\frac{G\cdot M\cdot m}{\alpha^2\cdot L_0}\cdot(1+e)$ et $v_{min}=\frac{G\cdot M\cdot m}{\alpha^2\cdot L_0}\cdot(1-e)$ et $\frac{v_{max}-v_{min}}{2}=\frac{G\cdot M\cdot m\cdot e}{\alpha^2\cdot L_0}$

Par d'autres considérations, on a : $v_{max}^2=\frac{1+e}{1-e}.\frac{G\cdot M}{\alpha^2\cdot a}$ et $v_{min}^2=\frac{1-e}{1+e}.\frac{G\cdot M}{\alpha^2\cdot a}$

Première conclusion :

Ce qui précède signifie que l'hodographe est un cercle de rayon $\frac{v_{max}+v_{min}}{2}$ centré sur l'axe des y en $\left(0\,;\frac{v_{max}-v_{min}}{2}\,;0\right)$. Ceci s'appelle "le théorème de Hermann, Laplace, Runge, Lenz, Hamilton".

L'**hodographe** est la courbe décrite par l'ensemble des points se trouvant à l'extrémité de la flèche représentée par le vecteur vitesse. Une belle démonstration se trouve sur :
http://www.univ-lille1.fr/lal/Documents_pedagogiques/Hodographe.html

On a vu dans la partie mathématique que $\vec{v}=\left(\frac{dr}{d\varphi}\cdot\hat{r}+r\cdot\hat{\varphi}\right)\cdot\frac{d\varphi}{dt}$, donc

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\cdot\hat{r}+r\cdot\hat{\varphi}\right)\cdot\frac{d\varphi}{dt}-\frac{v_{max}-v_{min}}{2}\cdot\hat{y}=\frac{v_{max}+v_{min}}{2}\cdot\hat{\varphi}$$

En faisant le produit scalaire avec $\hat{\varphi}$, cela se simplifie en :

$$r\cdot\frac{d\varphi}{dt}-\frac{v_{max}-v_{min}}{2}\cdot\cos(\varphi)=\frac{v_{max}+v_{min}}{2}$$

La loi des aires donne : $\frac{r^2\cdot d\varphi}{dt}=\frac{L_0}{m}$, donc $r\cdot\frac{d\varphi}{dt}=\frac{L_0}{m\cdot r}$.

En combinant ces relations, on a : $\frac{L_0}{m\cdot r}=\frac{v_{max}-v_{min}}{2}\cdot\cos(\varphi)+\frac{v_{max}+v_{min}}{2}$ qui donne :

$r=\frac{b^2}{a+c\cdot\cos(\varphi)}$, après divers simplifications.

C'est l'équation d'une ellipse et notre deuxième conclusion.

On peut aussi écrire : $r=\frac{2\cdot r_{min}\cdot r_{max}}{r_{max}+r_{min}+(r_{max}-r_{min})\cdot\cos(\varphi)}$; $r_{min}=a-c$; $r_{max}=a+c$

Par conservation du moment cinétique, on sait que : $r_{min}\cdot v_{max}=r_{max}\cdot v_{min}$.

Autre démonstration et invariant de Runge Lenz

Cette autre démonstration utilise d'autres relations mathématiques, et fait apparaître l'invariant de Runge Lenz.

Faisons le produit vectoriel avec $\frac{\alpha^2 \cdot \vec{L}}{G \cdot M \cdot m}$ des deux côtés de $\vec{v}(\varphi) - \frac{G \cdot M \cdot m \cdot e}{\alpha^2 \cdot L_0} \cdot \hat{y} = \frac{G \cdot M \cdot m}{\alpha^2 \cdot L_0} \cdot \hat{\varphi}(\varphi)$

Puisque $\vec{L}$ est perpendiculaire à $\hat{\varphi}$, $\vec{L} \times \hat{\varphi} = -L_0 \cdot \hat{r}$.

Puisque $\vec{L}$ est perpendiculaire à $\hat{y}$, $\vec{L} \times \hat{y} = -L_0 \cdot \hat{x}$.

Donc : $\frac{\alpha^2}{G \cdot M \cdot m} \cdot \vec{L} \times \vec{v} + e \cdot \hat{x} = -\hat{r}$, qui donne : $\boxed{-e \cdot \hat{x} = \hat{r} + \frac{\alpha^2}{G \cdot M \cdot m} \cdot \vec{L} \times \vec{v}}$

Le vecteur de gauche $-e \cdot \hat{x}$ est constant, de norme égale à e.
Il s'appelle le **vecteur d'excentricité**.

Donc la somme $\hat{r} + \frac{\alpha^2}{G \cdot M \cdot m} \cdot \vec{L} \times \vec{v}$ donne un vecteur constant de norme égale à $e = \frac{c}{a}$.

Cette somme s'appelle l'**invariant de Runge Lenz**.
C.f. http://fr.wikipedia.org/wiki/Invariant_de_Runge_Lenz

Faisons le produit scalaire avec $\vec{r}$ des deux côtés de $-e \cdot \hat{x} = \hat{r} + \frac{\alpha^2}{G \cdot M \cdot m} \cdot \vec{L} \times \vec{v}$.

$$-e \cdot r \cdot \cos(\varphi) = r + \frac{\alpha^2}{G \cdot M \cdot m} \cdot \left(\vec{r} \bullet (\vec{L} \times \vec{v})\right) \overset{\text{math !}}{=} r + \frac{\alpha^2}{G \cdot M \cdot m} \cdot \left(-\vec{L} \bullet (\vec{r} \times \vec{v})\right) = r + \frac{\alpha^2}{G \cdot M \cdot m} \cdot \left(-\vec{L} \bullet \frac{\vec{L}}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \quad r \cdot (1 + e \cdot \cos(\varphi)) = \frac{\alpha^2 \cdot L_0^2}{G \cdot M \cdot m^2} \overset{\text{déf.}}{=} p$$

C'est l'équation d'une ellipse : $r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\varphi)}$.

Bernard Gisin août 2006 (http://www.perso.ch/bernard.gisin/physique/physique.html)