Résolution de l'équation du 3ème degré : $\boxed{y^3+a\,y^2+b\,y+c=0}$

On commence par poser : $\boxed{y=x-\frac{a}{3}}$.

En substituant, on obtient : $x^3+p\,x+q=0$ , avec $\boxed{p=b-\frac{a^2}{3}}$ et $\boxed{q=\frac{2\,a^3}{27}-\frac{a\,b}{3}+c}$.

On pose $x=u+v$ , pour obtenir : $u^3+v^3+(3\,u\,v+p)\cdot(u+v)+q=0$

Que l'on peut résoudre en posant : $u^3\cdot v^3=-\frac{p^3}{27}$ et $u^3+v^3=-q$ .

En multipliant la deuxième égalité par $u^3$, et en substituant la première égalité on obtient :

$(u^3)^2+q\cdot u^3-\frac{p^3}{27}=0$ de même que $(v^3)^2+q\cdot v^3-\frac{p^3}{27}=0$ .

Ce sont des équations du deuxièmes degrés pour $u^3$ et $v^3$.

$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ et $v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$

Finalement, on obtient une ou des solution(s) : $\boxed{x \;=\; \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \;+\; \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}$

Exemple :

Résolution de : $x^3-2\,x-4=0$ , $a = 0$ ; $p = -2$ ; $q = -4$ ; $\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=\sqrt{4-\frac{8}{27}}=\sqrt{\frac{100}{27}}=\frac{10}{9}\cdot\sqrt{3}$

$x \;=\; \sqrt[3]{2+\frac{10}{9}\cdot\sqrt{3}} \;+\; \sqrt[3]{2-\frac{10}{9}\cdot\sqrt{3}}$ .

Cela n'est pas évident, mais le résultat est $x = 2$.

Cet exemple montre l'inutilité de la formule, qui même dans des cas simples, donne des solutions compliquées.

Méthode itérative plus simple et plus efficace :

$x_0 = 1{,}5$ c'est la partie difficile, trouver une approximation de départ.

$$x_{n+1} \;=\; x_n-\frac{x_n^3-2\,x_n-4}{3\,x_n^2-2}$$

$x_2 = 2{,}2631...$ ; $x_3 = 2{,}0338...$ ; $x_4 = 2{,}000666...$ ; $x_5 = 2{,}000000266...$ ; $x_6 = 2$.

C'est très facile à programmer et à calculer avec une calculatrice ayant la touche "OP1".

Par division polynomiale, on obtient : $x^3-2\,x-4 \;=\; (x-2)\cdot(x^2+2\,x+2)$ .

Les deux autres solutions (complexes) se trouvent en résolvant : $x^2+2\,x+2=0$ . $x=-1\pm i$