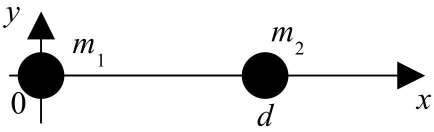
1. $\vec{r}_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$



en projetant sur l'axe Ox : $x_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \dfrac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot d}{m_1 + m_2} = \dfrac{N \cdot m_1 \cdot d}{(N+1) \cdot m_1} = \dfrac{N}{N+1} \cdot d$

Si m_2 est beaucoup plus grand que m_1 ($N >> 1$), alors le centre de masse est presque confondu avec m_2.

---

2. La position de centre de masse des $N = 4$ petites boules est en :

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1 \cdot \langle 1;1 \rangle + 2 \cdot \langle 2;0 \rangle + 3 \cdot \langle 0;-1 \rangle + 4 \cdot \langle -1;2 \rangle}{1+2+3+4} \left[\frac{kg \cdot m}{kg} \right] = \frac{\langle 1;6 \rangle}{10} [m] = \langle\ 0,1;\ 0,6 \rangle [m]$$

---

3. Le centre de masse du système : Terre - Lune est en :

$$x_c = \frac{M_{Terre} \cdot x_{Terre} + M_{Lune} \cdot x_{Lune}}{M_{Terre} + M_{Lune}} = \frac{5,97 \cdot 10^{24} \cdot 0 + 7,35 \cdot 10^{22} \cdot 3,84 \cdot 10^{8}}{5,97 \cdot 10^{24} + 7,35 \cdot 10^{22}} = 4,67 \cdot 10^{6}\ [m].$$

Le centre de masse ce trouve donc à $1,70 \cdot 10^6$ [m] sous la surface terrestre, soit à 1'700 [km] de profondeur.

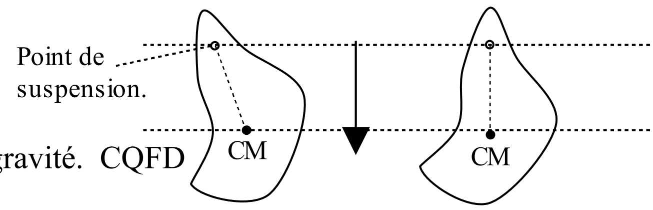
4.1 L'énergie potentielle du système de N masses est :

$$E_{pot} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot g \cdot z_i = g \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot z_i = g \cdot m_{tot} \cdot z_{CM}$$ = énergie potentielle du centre de masse.

où $m_{tot} = \sum_{i=1}^{N} m_i$ est la masse totale du système et

z_i est la hauteur de la ième masse,

$z_{CM} = \dfrac{1}{m_{tot}} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot z_i$ est la hauteur du centre de gravité. CQFD



Le centre de masse CM est plus bas lorsqu'il est à la verticale en dessous du point de suspension.

4.2 Si le centre de masse ne se trouve pas en dessous du point de suspension, alors en faisant tourner légèrement le corps autour du point de suspension, on peut faire descendre le centre de masse et donc diminuer l'énergie du corps solide rigide.
En conséquence, lorsque le centre de masse est à la verticale en dessous du point de suspension, l'énergie du système est minimale.

5.1 $\overrightarrow{V_{CM}} = \dfrac{d}{dt}\overrightarrow{r_{CM}} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{m_{tot}} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i \right) = \dfrac{1}{m_{tot}} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \dfrac{d}{dt} \vec{r}_i = \dfrac{1}{m_{tot}} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{V}_i$ CQFD.

déf. de $\overrightarrow{V_{CM}}$ déf. de $\overrightarrow{r_{CM}}$ propriété de la dérivée déf. de la vitesse.

5.2 $\overrightarrow{a_{CM}} = \dfrac{d}{dt}\overrightarrow{V_{CM}} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{m_{tot}} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{V}_i \right) = \dfrac{1}{m_{tot}} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \dfrac{d}{dt} \vec{V}_i = \dfrac{1}{m_{tot}} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{a}_i$ CQFD.

déf. de $\overrightarrow{a_{CM}}$ c.f. 5.1 propriété de la dérivée déf. de l'accélération.

---

6. En $t = 0$ [s], l'engin explose ; son centre de masse se trouve en < 0 ; 0 ; 50> [m].
Le centre de masse continue en MRUA : $z_{CM}(t) = z_{CM}(0) + V_{CM}(0) \cdot t + 0,5 \cdot g \cdot t^2$
En $t = 4$ [s] : $z_{CM}(4) = 50$ [m] + 10 [m/s] · 4 [s] – 4,9 [m/s^2] · 4^2 [s^2] = 11,6 [m].
Donc, le centre de masse se trouve à $t = 4$ [s] en : $\vec{r}_{CM}(4)$ = < 0 ; 0 ; 11,6 > [m].

$m_1 + m_2 + m_3 = m_{tot} = 6,0$ [kg], donc $m_3 = m_{tot} - m_2 - m_1 = 6,0 - 2,0 - 1,0 = 3,0$ [kg].

Donc, en $t = 4$ [s], on a:

$$x_{CM}(4) = 0 = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \cdot x_i(4)}{m_{tot}} = \frac{m_1 \cdot x_1(4) + m_2 \cdot x_2(4) + m_3 \cdot x_3(4)}{m_{tot}} \Rightarrow x_3(4) = \frac{m_{tot} \cdot x_{CM}(4) - m_1 \cdot x_1(4) - m_2 \cdot x_2(4)}{m_3} = 5\,[\text{m}]$$

$$z_{CM}(4) = 11,6 = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \cdot z_i(4)}{m_{tot}} = \frac{m_1 \cdot z_1(4) + m_2 \cdot z_2(4) + m_3 \cdot z_3(4)}{m_{tot}} \Rightarrow z_3(4) = \frac{m_{tot} \cdot 11,6 - m_1 \cdot 25 - m_2 \cdot 10}{m_3} = 8,2\,[\text{m}]$$

Idem pour $y_3(4)$. On trouve $\underline{y_3(4) = -20\text{ [m]}}$.
Le troisième objet se trouve après quatre secondes en : $\vec{r}_3(4) = \langle 5;\ -20;\ 8,2 \rangle\,[\text{m}]$.