I. Généralités

En physique, **théorie** et **expérience** coopèrent. Le travail de laboratoire s'impose donc tout naturellement dans l'apprentissage de cette discipline, où la **mesure** joue un rôle prépondérant.
Notre laboratoire a donc pour buts d'aider à la **compréhension des concepts physiques** d'une part et de familiariser les élèves avec la **méthode expérimentale,** d'autre part. L'une des démarches de la méthode expérimentale est la mesure proprement dite ; elle a un caractère instrumental. Une autre démarche est l'exploitation des résultats de mesure qui fait appel aux calculs d'erreur et d'incertitude, que nous développerons dans une section qui suit. Par ailleurs, le travail de laboratoire peut contribuer à démystifier la technique omniprésente, mais souvent inaperçue, qui nous environne.

II. Recommandations

Les manipulations expérimentales, les mesures et les calculs ne peuvent être effectués complètement au laboratoire, pendant l'intervalle de temps imparti, que si les bases de l'expérience sont connues au début de la séance. Cela nécessite que les élèves doivent lire le protocole d'expérience **avant** la séance et préparer, dans leur **cahier**, des tableaux de mesures qui seront complétés pendant la séance de laboratoire.
Un élève qui n'a pas préparé son expérience avant la séance ou qui débarque sans son matériel court le risque d'être renvoyé avec une note de laboratoire réduite à sa plus simple expression !

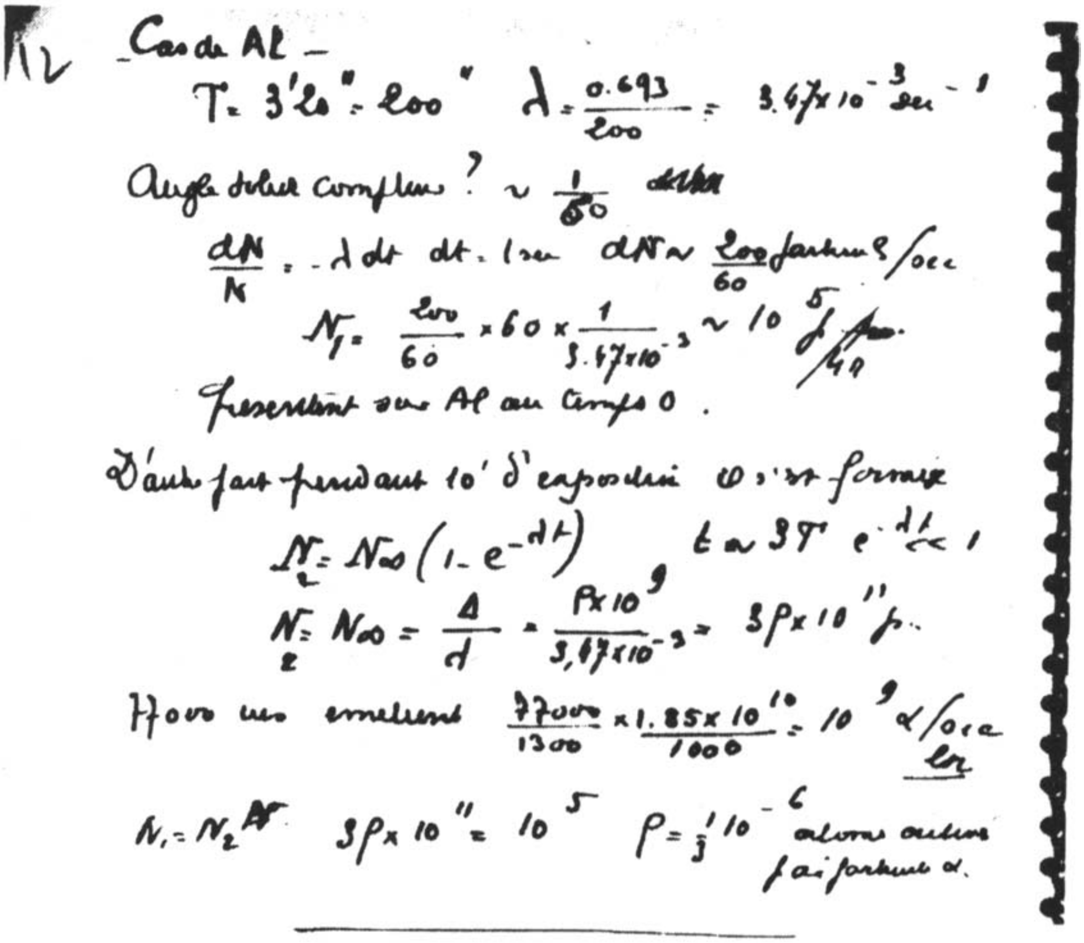
Les qualités requises pour un bon travail et une bonne ambiance de laboratoire sont la **ponctualité**, le **soin** (le matériel est en général délicat et coûteux!), la **propreté** (les tables de travail ne doivent pas être encombrées de vêtements, entre autres), **l'ordre** (en fin de séance, le matériel utilisé doit être rangé et la table de travail reprendre l'apparence qu'elle avait avant l'arrivée des élèves).
Ajoutons que les élèves ne sont pas autorisés à transporter du matériel d'une table à l'autre et à manipuler des appareils ou des instruments attachés à une autre expérience que celle qu'ils sont en train d'effectuer.

III. Présentations des résultats

Chaque groupe, de deux élèves au maximum, doit posséder, outre les protocoles d'expériences et le matériel habituel (instruments de géométrie, calculatrice, table), un **cahier**, qui constitue le **journal de laboratoire**.
Dans le **cahier**, chaque groupe doit consigner, dans l'ordre chronologique, la date de l'expérience réalisée, les schémas et les tableaux (préparés à l'avance, puis remplis pendant la séance), les remarques, les observations, les explications éventuelles du maître ou de l'assistant, tous les calculs et les graphiques.
Pendant l'expérience, le travail relevé sur des feuilles volantes n'est pas accepté.
A la fin de chaque séance, le cahier doit être visé et signé par le maître ou l'assistant.

En général, comme on l'a dit, tous les calculs et les graphiques devraient être terminés à la fin de chaque séance de laboratoire. Si tel n'est pas le cas, **chaque groupe doit terminer son travail, dans le cahier, pour la séance suivante**.
En plus de ce travail régulier consigné dans le cahier, un certain nombre de **rapports** écrits sont demandés en cours d'année.

extrait du journal de laboratoire des époux Joliot-Curie (1934)


Cas de Al —
$T = 3'20'' = 200''$ $\lambda = \frac{0.693}{200} = 3.47 \times 10^{-3}\ sec^{-1}$
Angle solide compteur ? $\sim \frac{1}{50}$ [illegible]
$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$ $dt = 1\ sec$ $dN \sim \frac{200}{60}$ particules/sec
$N_1 = \frac{200}{60} \times 60 \times \frac{1}{3.47 \times 10^{-3}} \sim 10^5$ [illegible]
présents sur Al au temps 0.
D'autre part pendant 10' d'exposition il s'est formé
$N_2 = N_\infty (1 - e^{-\lambda t})$ $t \sim 3T$ $e^{-\lambda t} \ll 1$
$N_2 = N_\infty = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{\rho \times 10^9}{3.47 \times 10^{-3}} = 3\rho \times 10^{11}$ [illegible]
Po [illegible] émettant $\frac{7700}{1300} \times \frac{1.85 \times 10^{10}}{1000} = 10^9$ α/sec
$N_1 = N_2^{Al}$ $3\rho \times 10^{11} = 10^5$ $\rho = \frac{1}{3} 10^{-6}$ alors [illegible] [illegible] faisceaux α.

Tout **rapport** écrit - sur des feuilles "à part" - doit pouvoir être lu et compris par une personne qui n'a pas fait l'expérience et qui désire la réaliser.
Ce rapport doit contenir :

- ➔ une **introduction**, qui met en évidence le (ou les) **but**(s) de l'expérience ;
- ➔ un **résumé rédigé** de l'expérience ;
- ➔ des éléments de **théorie** : dans cette partie, les lois et les relations entre les grandeurs mesurées et les grandeurs à déterminer doivent être clairement formulées; les démonstrations des formules imprimées sur le protocole doivent être effectuées ;
- ➔ les **conditions expérimentales** : cette partie comprend la liste complète du matériel utilisé (appareils, instruments de mesure, etc.) et un (ou des) schéma(s) explicatif(s) ;
- ➔ les **tableaux** complets des résultats de mesure, qui doivent contenir toutes les valeurs mesurées, les moyennes éventuelles et les incertitudes correspondantes ;
- ➔ les **graphiques** demandés ;
- ➔ les **résultats** de l'expérience: il s'agit des résultats numériques avec leur précision, ce qui nécessite un **calcul d'erreur** et un **calcul d'incertitude** (voir plus bas) ;
- ➔ les **commentaires** et les **remarques** générales ;
- ➔ une **conclusion** ;
- ➔ les **références** bibliographiques.

La **note de laboratoire** compte comme un tiers de la note de physique. Elle tient compte du comportement de l'élève au laboratoire, de la qualité de ses mesures, des rapports qu'il a rédigés (contenu et présentation), du contenu du cahier contrôlé régulièrement et des interrogations (écrites et/ou orales).

IV. Introduction aux calculs d'erreurs et d'incertitudes

Mesurer une grandeur physique, c'est la comparer avec une autre grandeur de même nature, fixe et connue, choisie comme unité. Le choix de l'unité est arbitraire. Nous utilisons le système international fondé sur les unités suivantes : le mètre, le kilogramme, la seconde, l'ampère, le kelvin, la candela, la mole, ainsi que leurs multiples et sous-multiples.

Les physiciens travaillent continuellement avec des approximations. Toute mesure d'une grandeur quelconque est donc nécessairement entachée d'une certaine imprécision. En effet, lorsqu'on recommence plusieurs fois la même mesure d'une certaine grandeur, dans les mêmes conditions et avec le même soin, les résultats obtenus sont en général - légèrement - différents les uns des autres. On n'a donc aucune raison d'affirmer que l'un ou l'autre de ces résultats soit la valeur exacte de la grandeur mesurée. La valeur numérique que l'on donne n'est qu'une **valeur approchée**.

On appelle:

Erreur absolue la différence entre la valeur **approchée** d'une grandeur et la valeur **officielle** de cette même grandeur. L'erreur absolue, positive par convention, s'exprime dans la même unité que la grandeur. Si a désigne la valeur mesurée, donc approchée et a_{off} la valeur officielle, on écrit :

$$\text{Err abs} = | a - a_{\text{off}} |$$

Exemple : La valeur officielle du champ de gravitation à Genève vaut : $g_{\text{off}} = 9{,}81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$.

Si on a mesuré $g = 9{,}78 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$, l'erreur absolue est donc :

$$\text{Err abs} = \left| 9{,}78 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right] - 9{,}81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right] \right| = 0{,}03 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$$

On appelle:

Erreur relative, le rapport de l'erreur absolue à la valeur officielle de la grandeur mesurée. Ce rapport, sans unités, est généralement exprimé en pour cent (%), avec un ou deux chiffres significatifs. On écrit :

$$\text{Err rel} = \frac{\text{Err abs}}{|a_{\text{off}}|} = \frac{|a - a_{\text{off}}|}{|a_{\text{off}}|}$$

Reprenons l'exemple précédent : l'erreur relative commise sur g vaut :

$$\text{Err rel} = \frac{\left| 9{,}78 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right] - 9{,}81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right] \right|}{9{,}81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]} = \frac{0{,}03 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]}{9{,}81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]} = 0{,}003 = 0{,}3\%$$

Remarque : Il n'est possible de calculer une erreur que si l'on dispose d'une valeur officielle. Cette dernière, selon les cas, peut être tirée d'une table, donnée par un constructeur ou simplement adoptée par une communauté.

En général, les **erreurs** que nous aurons à envisager seront **accidentelles** (ou **fortuites**); elles dépendent de la fidélité, de la précision des instruments de mesure, de la méthode de mesure utilisée, du modèle (mathématique) employé, de l'expérimentateur (son habileté, la confiance en ses propres moyens,...).
Parfois, pour mieux garantir le caractère objectif d'un résultat et en donner une meilleure précision, il est nécessaire de disposer d'une méthode statistique.
Dans beaucoup de cas en physique expérimentale, on ne possède pas de valeur officielle de référence pour une grandeur mesurée (exemples: mesures de temps, de masses, de températures,...). On ne dispose que de la valeur approchée, déterminée dans certaines conditions expérimentales.
L'analyse de ces conditions permet d'évaluer l'erreur maximum ou l'incertitude que l'on a commis.

L'indication complète du résultat d'une mesure physique comportera donc la valeur a qu'on estime la plus probable - c'est la valeur approchée - et l'intervalle à l'intérieur duquel on est certain que se situe la valeur exacte a_{off}.

La longueur de ce demi intervalle est appelée **l'incertitude absolue** sur la grandeur mesurée. Cette incertitude absolue est positive par convention et s'écrit avec la même unité que la grandeur.
On la note : δa. Le résultat d'une mesure s'écrit toujours sous la forme :

$$A = a \pm \delta a$$

la valeur officielle, si on en dispose, obéit aux inégalités : $a - \delta a \leq a_{\text{off}} \leq a + \delta a$

<u>Exemple :</u> on a mesuré une longueur $L = 42{,}5$ [m] $\pm$ 0,4 [m].
En écrivant cela, on affirme que l'incertitude absolue sur L vaut 0,4 [m] et que la valeur exacte de cette longueur se situe entre les valeurs extrêmes de 42,1 [m] et 42,9 [m].

Comme pour une erreur relative, on introduit une **incertitude relative** définie par le rapport de l'incertitude absolue sur la valeur absolue de la grandeur mesurée. Elle s'écrit :

$$\text{Incertitude rel} = \frac{\delta a}{|a|}$$

Sans unité, l'incertitude est exprimée souvent en pour cent (%), avec 1 ou 2 chiffres significatifs.

Dans l'exemple choisi, on a : $\text{Incertitude rel} = \dfrac{\delta L}{|L|} = \dfrac{0{,}4\,[\text{m}]}{42{,}5\,[\text{m}]} = 0{,}009 = 0{,}9\%$

Si l'on dispose d'une valeur officielle, on doit vérifier que l'erreur correspondante est **inférieure** à l'incertitude.

Comme, en général, nous devrons évaluer des grandeurs physiques qui sont des fonctions d'autres grandeurs mesurées, il faudra effectuer, pour chaque expérience, un **calcul d'incertitude**.

Donnons un exemple, celui de la chute des corps avec vitesse initiale nulle :
A partir de hauteurs h et de durées t de chutes mesurées, on veut évaluer le champ de gravitation g.
L'horaire du mouvement uniformément accéléré du corps en chute libre permet d'écrire : $g = \dfrac{2 \cdot h}{t^2}$
Il s'agit maintenant, à partir des incertitudes de mesure (δh et δt), de calculer les incertitudes absolue et relative sur la grandeur g.

IV.1 Règles de calculs d'incertitudes

<u>Règle 1 :</u>
L'incertitude absolue sur la somme (ou la différence) de deux termes (ou plus) est égale à la somme des incertitudes absolues sur chaque terme. On peut écrire, formellement :

$$\boxed{\delta(a+b)=\delta a+\delta b} \quad \text{et} \quad \boxed{\delta(a-b)=\delta a+\delta b}$$

<u>Exemple d'addition :</u>
On a mesuré deux longueurs $L_1 = (35{,}2 \pm 0{,}2)$ [cm] et $L_2 = (57{,}4 \pm 0{,}3)$ [cm]

On cherche la longueur totale : $L = L_1 + L_2$ et son incertitude δL.

Comme L_1 est comprise entre les valeurs 35,0 [cm] et 35,4 [cm] et que
L_2 est comprise entre les valeurs 57,1 [cm] et 57,7 [cm].
Il est évident que L est compris entre 92,1 [cm] et 93,1 [cm], et on peut écrire :

$$L = (92{,}6 \pm 0{,}5) \text{ [cm]}.$$

On voit que la règle 1 s'applique : $\delta L = \delta L_1 + \delta L_2 = 0{,}2$ [cm] + 0,3 [cm] = 0,5 [cm].

<u>Exemple de soustraction :</u>
On a mesuré deux masses successives : $m_1 = (122{,}4 \pm 0{,}2)$ [g] et $m_2 = (234{,}6 \pm 0{,}2)$ [g]
On désire évaluer la variation de masse : $\Delta m = m_2 - m_1$.
m_1 est comprise entre 122,2 [g] et 122,6 [g] ;
m_2 entre 234,4 [g] et 234,8 [g].
Δm est alors comprise entre (234,4 [g] − 122,6 [g]) = 111,8 [g] et (234,8 [g] − 122,2 [g]) = 112,6 [g].
On peut donc écrire : $\Delta m = (112{,}2 \pm 0{,}4)$ [g];

On voit que la règle 1 s'applique : $\delta(\Delta m) = \delta(\Delta m_1) + \delta(\Delta m_2) = 0{,}2$ [g] + 0,2 [g] = 0,4 [g].

<u>Règle 2 :</u>
L'incertitude relative sur le produit (ou le quotient) de deux facteurs (ou plus) est égale à la somme des incertitudes relative sur chaque facteur. On peut écrire, formellement :

$$\boxed{\frac{\delta(a\cdot b)}{|a\cdot b|}=\frac{\delta a}{|a|}+\frac{\delta b}{|b|}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\delta(a/b)}{|a/b|}=\frac{\delta a}{|a|}+\frac{\delta b}{|b|}}$$

et en générale : $\boxed{\dfrac{\delta(a\cdot b\cdot c\cdot ...)}{|a\cdot b\cdot c\cdot ...|}=\dfrac{\delta a}{|a|}+\dfrac{\delta b}{|b|}+\dfrac{\delta c}{|c|}+...}$

<u>Exemple de produit : incertitude sur l'aire d'un rectangle $S = a \cdot b$.</u>
On a mesuré $a = (17{,}2 \pm 0{,}2)$ [cm] et $b = (13{,}3 \pm 0{,}1)$ [cm].

On cherche l'aire : $S = a \cdot b$ et son incertitude δS.

Première manière, plus intuitive.
$S_{min} = 17{,}0 \text{ [cm}^2] \cdot 13{,}2 \text{ [cm}^2] = 224{,}4 \text{ [cm}^2]$
$S_{max} = 17{,}4 \text{ [cm}^2] \cdot 13{,}4 \text{ [cm}^2] = 233{,}2 \text{ [cm}^2]$

$$S = 17{,}2\,[\text{cm}]\cdot 13{,}3\,[\text{cm}] = 228{,}8\,[\text{cm}^2] = \frac{S_{\min}+S_{\max}}{2} = 228{,}8\,[\text{cm}^2] \quad ;$$

$$\delta S = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{2} = 4,4\,[\mathrm{cm}^2] \quad ; \quad \frac{\delta S}{S} = \frac{4,4\,[\mathrm{cm}^2]}{228,8\,[\mathrm{cm}^2]} = 0,019 = 1,9\%$$

Deuxième manière, qui justifie la règle 2.

$$S \pm \delta S = (a \pm \delta a)\cdot(b \pm \delta b) = \underbrace{a \cdot b}_{=S} \pm \underbrace{\delta a \cdot b + a \cdot \delta b}_{=\delta S} \pm \underbrace{\delta a \cdot \delta b}_{\text{négligeable}}$$

L'incertitude relative vaut : $\frac{\delta S}{S} = \frac{\delta a \cdot b + a \cdot \delta b}{a \cdot b} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} = \frac{0,2\,[\mathrm{cm}]}{17,2\,[\mathrm{cm}]} + \frac{0,1\,[\mathrm{cm}]}{13,3\,[\mathrm{cm}]} = 0,019 = 1,9\%$

L'incertitude absolue vaut : $\delta S = \frac{\delta S}{S} \cdot S = 1,9\% \cdot 228,8\,[\mathrm{cm}^2] = 4,4\,[\mathrm{cm}^2]$.

On retrouve les mêmes résultats que ceux obtenus avec la méthode intuitive. La règle 2 s'applique.

On peut écrire le résultat sous la forme : $\underline{\underline{S = (228,8 \pm 4,4)\,[\mathrm{cm}^2]}}$

<u>Exemple de quotient : incertitude sur la masse volumique $\rho = \frac{m}{V}$</u>

On a mesuré $m = (1,18 \pm 0,02)$ [g] et $V = (1,10 \pm 0,01)$ [dm^3].

On cherche la masse volumique : $\rho = \frac{m}{V}$ et son incertitude $\delta\rho$.

Première manière, plus intuitive.

$$\rho_{\min} = \frac{1,18\,[g] - 0,02[g]}{1,10\,[dm^3] + 0,01\,[dm^3]} = \frac{1,16\,[g]}{1,11\,[dm^3]} = 1,045\left[\frac{g}{dm^3}\right]$$

$$\rho_{\max} = \frac{1,18\,[g] + 0,02[g]}{1,10\,[dm^3] - 0,01\,[dm^3]} = \frac{1,20\,[g]}{1,09\,[dm^3]} = 1,101\left[\frac{g}{dm^3}\right]$$

$$\rho = \frac{1,18\,[g]}{1,10\,[dm^3]} = 1,073\left[\frac{g}{dm^3}\right] = \frac{\rho_{\min} + \rho_{\max}}{2} = 1,073\left[\frac{g}{dm^3}\right] \quad ;$$

$$\delta\rho = \frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{2} = 0,028\left[\frac{g}{dm^3}\right] \quad ; \quad \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{0,028}{1,073} = 0,0226 = 2,6\%$$

Deuxième manière, qui justifie la règle 2.

$$\rho \pm \delta\rho = \frac{m \pm \delta m}{V \pm \delta V} = \frac{m \pm \delta m}{V \pm \delta V} \cdot \frac{V \mp \delta V}{V \mp \delta V} = \frac{m \cdot V \pm m \cdot \delta V \pm V \cdot \delta m - \underbrace{\delta m \cdot \delta V}_{\text{négligeable}}}{V^2 \pm \underbrace{(\delta V)^2}_{\text{négligeable}}} = \frac{m \cdot V \pm (m \cdot \delta V + V \cdot \delta m)}{V^2}$$

$$\rho \pm \delta\rho = \frac{m}{V} \pm \left(\frac{m}{V} \cdot \frac{\delta V}{V} + \frac{m}{V} \cdot \frac{\delta m}{m}\right) = \rho \pm \rho \cdot \left(\frac{\delta V}{V} + \frac{\delta m}{m}\right).$$

L'incertitude relative vaut : $\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta V}{V} + \frac{\delta m}{m} = \frac{0,01}{1,10} + \frac{0,02}{1,18} = 0,026 = 2,6\%$

L'incertitude absolue vaut : $\delta\rho = \frac{\delta\rho}{\rho} \cdot \rho = 2,6\% \cdot 1,101\left[\frac{g}{dm^3}\right] = 0,0286\left[\frac{g}{dm^3}\right]$.

On retrouve les mêmes résultats que ceux obtenus avec la méthode intuitive. La règle 2 s'applique.

On peut écrire le résultat sous la forme : $\underline{\underline{\rho = (1,073 \pm 0,028)\left[\frac{g}{dm^3}\right]}}$. La règle 2 est vérifiée.

<u>Exemple hybride : incertitude sur le champ de gravitation</u> $g = \frac{2 \cdot h}{t^2}$

On a mesuré $h = (0{,}532 \pm 0{,}002)$ [m] et $t = (0{,}330 \pm 0{,}001)$ [s].

On cherche le champ de gravitation : $g = \frac{2 \cdot h}{t^2}$ et son incertitude δg.

$$g = \frac{2 \cdot 0{,}532\,[m]}{(0{,}330\,[s])^2} = 9{,}770 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Comme $g = \frac{2 \cdot h}{t \cdot t}$, on a deux multiplications et une division.

L'incertitude relative vaut : $\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta 2}{2} + \frac{\delta h}{h} + \frac{\delta t}{t} + \frac{\delta t}{t} = 0 + \frac{0{,}002}{0{,}532} + \frac{0{,}001}{0{,}330} + \frac{0{,}001}{0{,}330} = 0{,}0098 = 0{,}98\%$

L'incertitude sur le nombre 2 est évidemment nulle !

L'incertitude absolue vaut : $\delta g = \frac{\delta g}{g} \cdot g = 0{,}0098 \cdot 9{,}770 \left[\frac{m}{s^2}\right] = 0{,}096 \left[\frac{m}{s^2}\right]$

On peut écrire le résultat sous la forme : $g = (9{,}770 \pm 0{,}096) \left[\frac{m}{s^2}\right]$.

Ecrire : $g = (9{,}77 \pm 0{,}10) \left[\frac{m}{s^2}\right]$ est aussi correcte!

Cette fois on a directement utilisé la règle 2.

<u>Exercice 1 : une situation hybride :</u>
On a mesuré une résistance électrique d'un premier conducteur : $R_1 = (102 \pm 3)$ [Ω],
et celle d'un second conducteur : $R_2 = (235 \pm 7)$ [Ω].

Les deux conducteurs proposés sont branchés en parallèle. Calculez la résistance équivalente, ainsi que les incertitudes **relative** et **absolue** sur cette résistance équivalente.

<u>Incertitude sur une puissance.</u>
A partir de l'incertitude relative sur un produit vu dans la règle 2, on peut formuler l'incertitude relative sur une puissance, à exposant entier :

$$\frac{\delta(a^n)}{|a^n|} = \frac{\delta(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}{|a \cdot a \cdot \ldots \cdot a|} = \frac{\delta a}{|a|} + \frac{\delta a}{|a|} + \ldots + \frac{\delta a}{|a|} = n \cdot \frac{\delta a}{|a|}$$

On peut montrer que pour une puissance n réelle quelconque ce résultat se généralise à :

<u>Règle 3</u>
L'incertitude relative sur une grandeur élevée à une certaine puissance est égale à la valeur absolue de l'exposant fois l'incertitude relative de la grandeur mis à la puissance.

$$\boxed{\frac{\delta(a^n)}{|a^n|} = |n| \cdot \frac{\delta a}{|a|}}$$

Montrons que la généralisation est correcte pour $n = -1$:

Si $f = a^{-1} = \frac{1}{a}$, alors $\frac{\delta f}{f} = \frac{\delta 1}{1} + \frac{\delta a}{a} = 0 + \frac{\delta a}{a} = |-1| \cdot \frac{\delta a}{a}$

Montrons que la généralisation est correcte pour $n = 0{,}5$:

Si $f = a^{0,5} = \sqrt{a}$, alors

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{\sqrt{a+\delta a}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a+\delta a}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a+\delta a}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+\delta a}+\sqrt{a}} = \frac{a+\delta a-a}{\sqrt{a}\cdot(2\cdot\sqrt{a})} ; \qquad \text{Rem. } \sqrt{a+\delta a}+\sqrt{a} \approx 2\cdot\sqrt{a} .$$

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{\delta\left(a^{0,5}\right)}{a^{0,5}} = \frac{\delta a}{2\cdot a} = 0{,}5\cdot\frac{\delta a}{a}$$

Exercice 2

Vérifiez que $\sqrt{1+0{,}02}$ = 1 + 0,01 et que $\sqrt{1-0{,}02}$ = 1 – 0,01, avec une précision que vous n'atteindrez jamais lors d'une expérience au collège.

Exemple :

On cherche l'incertitude sur la vitesse de l'onde établie sur une corde vibrante tendue avec une force F. Cette dernière est entachée d'une incertitude absolue δF. La masse linéique μ (en kilogrammes / mètre) de la corde a une incertitude $\delta\mu$.

La vitesse de l'onde sur la corde est donnée par : $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \left(\frac{F}{\mu}\right)^{0,5}$.

Posons : $a = \frac{F}{\mu}$. Selon la règle 3 on a : $\frac{\delta v}{v} = 0{,}5\cdot\frac{\delta a}{a}$

Comme a est un quotient, on peut appliquer la règle 2. On obtient : $\frac{\delta a}{a} = \frac{\delta F}{F} + \frac{\delta\mu}{\mu}$

Donc finalement : $\frac{\delta v}{v} = 0{,}5\cdot\left(\frac{\delta F}{F} + \frac{\delta\mu}{\mu}\right)$.

Application numérique : on a mesuré $F = (68 \pm 2)$ [N] et $\mu = (0{,}0061 \pm 0{,}0001)$ [kg / m].

Le calcul conduit à $\frac{\delta v}{v} = 0{,}5\cdot\left(\frac{\delta F}{F} + \frac{\delta\mu}{\mu}\right) = 0{,}5\cdot\left(\frac{2}{68} + \frac{0{,}0001}{0{,}0061}\right) = 0{,}023 = 2{,}3\%$.

Donc $v = \sqrt{\frac{68\,[N]}{0{,}0061\,[kg/m]}} = 105{,}6\left[\frac{m}{s}\right]$ et $\delta v = 0{,}023\cdot 105{,}6\left[\frac{m}{s}\right] = 2{,}4\left[\frac{m}{s}\right]$

Finalement : $\underline{\underline{v = (105{,}6 \pm 2{,}4)\left[\frac{m}{s}\right]}}$.

Exercice 3

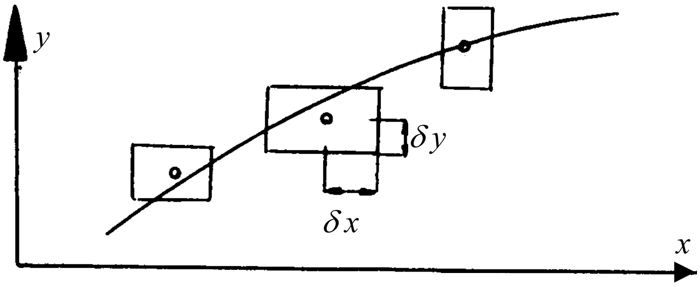
Exprimez littéralement les incertitudes relative et absolue sur la grandeur $e = \sqrt{a+b}\cdot(c+d)$, en fonction des grandeurs a, b, c, d et de leur incertitude, $\delta a, \delta b, \delta c, \delta d$.

Exercice 4

Exprimez littéralement les incertitudes relative et absolue sur la grandeur $d = \frac{1}{\sqrt{1+a^2\cdot b^2\cdot c^2}}$, en fonction des grandeurs a, b, c et de leur incertitude, $\delta a, \delta b, \delta c$.

IV.2 Incertitude sur la pente d'une application affine

Les incertitudes absolues ("de lecture" et/ou calculées) doivent être en principe représentées sur les graphiques demandés. Pour cela, on construit, autour de chaque valeur la plus probable de y, un rectangle d'incertitude, de côtés $2 \cdot \delta x$, $2 \cdot \delta y$.



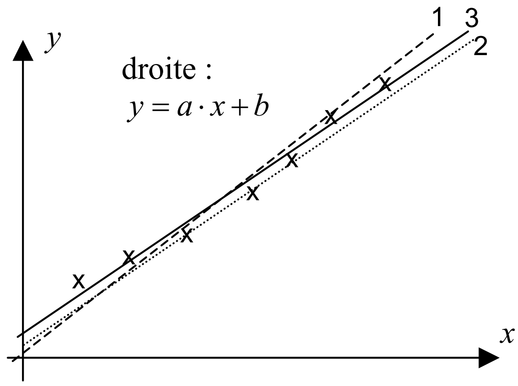
La courbe (ou la droite) la plus probable doit passer dans tous les rectangles d'incertitude. Il en est de même de la courbe théorique, sauf dans des cas spéciaux que nous n'aborderons pas ici.

Fréquemment, une grandeur physique est déterminée à l'aide de la pente d'une application affine.

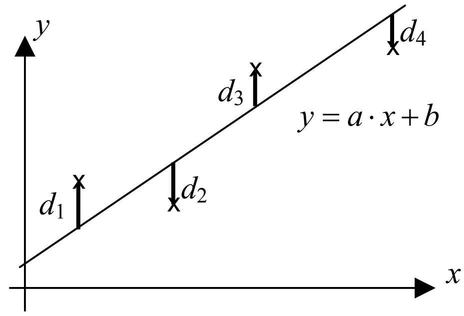
<u>Comment déterminer la "meilleure" application affine passant par une série de mesures ?</u>

Ayant des mesures $(x_1 ; y_1) ; (x_2 ; y_2) ; ... ; (x_n ; y_n)$ avec forcément des inexactitudes et sachant par la théorie qu'elles définissent une droite, quelle est la "meilleure" droite "passant" par ces points ?

Sur le graphique ci-contre, $n = 7$.
Clairement la droite 1 est trop inclinée.
Clairement la droite 2 est trop basse.
Mais la droite 3 est-elle la "meilleure" ?



Que veut dire la "meilleure" ?
L'idée est de définir "la meilleure droite" par celle qui est en moyenne la moins éloigné des points. Il faut chercher à minimiser les distances : $d_k = \left| a \cdot x_k + b - y_k \right|$
représentées sur le deuxième graphique (où $n = 4$).



Minimiser : $\sum_{k=1}^{n} \left| a \cdot x_k + b - y_k \right|$ est compliqué, donc pour des raisons pratiques, on cherchera a et b pour minimiser :

$$S(a ; b) = \sum_{k=1}^{n} \left(a \cdot x_k + b - y_k \right)^2 .$$

Montrons que le minimum est obtenu pour :

$$\boxed{a = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k - n \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 - n \cdot (\overline{x})^2}} \quad ; \quad \boxed{b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}} \quad \text{où} \quad \underline{\underline{\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\overline{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k}}$$

<u>Exercice :</u> Montrez que si $y_k = a \cdot x_k + b$ sans incertitudes, alors les égalités ci-dessus pour a et b sont vérifiées.

Cherchons a et b qui minimisent :

$$S(a\,;b)=\left(a\cdot x_1+b-y_1\right)^2+\left(a\cdot x_2+b-y_2\right)^2+\ldots+\left(a\cdot x_n+b-y_n\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\left(a\cdot x_k+b-y_k\right)^2 .$$

Une grosse simplification intervient, si l'on définit :

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k\ ,\quad \overline{y}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}y_k\ ,\quad v_k=x_k-\overline{x}\ ,\quad z_k=y_k-\overline{y}\quad \text{et}\quad c=b+a\cdot\overline{x}-\overline{y}$$

La simplification vient du fait que : $\sum_{k=1}^{n}v_k=0$ et $\sum_{k=1}^{n}z_k=0$

Exercice : Montrez les deux égalités ci-dessus.

On a donc : $S(a\,;b)=\sum_{k=1}^{n}\left(a\cdot(x_k-\overline{x})+b+a\cdot\overline{x}-\overline{y}-(y_k-\overline{y})\right)^2$ $\quad S(a\,;b)=\sum_{k=1}^{n}\left(a\cdot v_k+c-z_k\right)^2$

En développant : $S(a\,;b)=\sum_{k=1}^{n}\left(a^2\cdot v_k^2+c^2+z_k^2-2a\cdot v_k\cdot z_k+2a\cdot v_k\cdot c-2c\cdot z_k\right)$

Donc le terme à minimiser se décompose comme une somme de 6 parties :

$$S(a\,;b)=a^2\cdot\sum_{k=1}^{n}v_k^2-2a\cdot\sum_{k=1}^{n}v_k\cdot z_k+n\cdot c^2+\sum_{k=1}^{n}z_k^2+2a\cdot c\cdot\sum_{k=1}^{n}v_k-2c\cdot\sum_{k=1}^{n}z_k$$

Les deux dernières sommes sont nulles grâce à la simplification décrite ci-dessus.

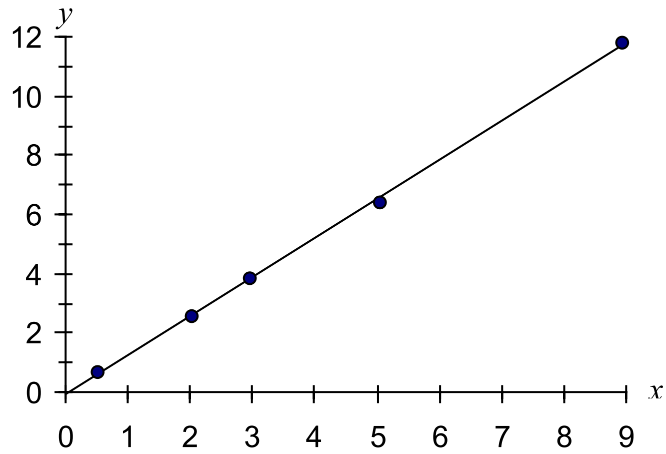
Seul la troisième partie $n\cdot c^2$ dépend de b. Elle nulle pour $b=\overline{y}-a\cdot\overline{x}$ et jamais négative.
Les trois parties restantes forment un polynôme du second degré en a, qui est minimal lorsque :

$$a_{\min imum}=\frac{\sum_{k=1}^{n}v_k\cdot z_k}{\sum_{k=1}^{n}v_k^2}\qquad \left(\text{Le minimum de } \alpha\cdot x^2+\beta\cdot x+\gamma \text{ est : } x=\frac{-\beta}{2\cdot\alpha}\right)$$

Exercice : Montrez que : $\sum_{k=1}^{n}v_k\cdot z_k=\sum_{k=1}^{n}\left(x_k\cdot y_k\right)-n\cdot\overline{x}\cdot\overline{y}$ et que : $\sum_{k=1}^{n}v_k^2=\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2\right)-n\cdot\overline{x}^2$

Exemple avec $n = 5$:

x_k	y_k
0,50	0,67
2,01	2,58
2,97	3,85
5,04	6,41
8,94	11,81
$\overline{x} = 3,892$	$\overline{y} = 5,064$



$$\overline{x} = (0,50 + 2,01 + 2,97 + 5,04 + 8,94)/5 = 3,892$$

$$\overline{y} = (0,67 + 2,58 + 3,85 + 6,41 + 11,81)/5 = 5,064$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0,50^2 + 2,01^2 + 2,97^2 + 5,04^2 + 8,94^2 = 118,4362$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k \cdot y_k\right) = 0,50 \cdot 0,67 + 2,01 \cdot 2,58 + 2,97 \cdot 3,85 + 5,04 \cdot 6,41 + 8,94 \cdot 11,81 = 154,8431$$

$$a = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k - n \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 - n \cdot (\overline{x})^2} = \frac{154,8431 - 5 \cdot 3,892 \cdot 5,064}{118,4362 - 5 \cdot 3,892^2} = \underline{\underline{1,3185 = a}}$$

$$b = \overline{y} - a \cdot \overline{x} = 5,064 - 1,3185 \cdot 3,892 = \underline{\underline{-0,0676 = b}}$$

Calculs d'incertitudes sur a et b.

Dans le cas d'une incertitude de δy sur chaque mesure y_k et aucune incertitude sur les x_k, les incertitudes δa et δb sur a et b se calculent par la théorie vue précédemment :

$$\boxed{\delta a = \frac{\sum_{k=1}^{n} \left| x_k - \overline{x} \right|}{\sum_{k=1}^{n} \left(x_k\right)^2 - n \cdot (\overline{x})^2} \cdot \delta y} \quad \text{et} \quad \boxed{\delta b \approx \delta y + \delta a \cdot \left| \overline{x} \right|}$$

<u>Exercice :</u> Montrez que : $\sum_{k=1}^{n} v_k \cdot z_k = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \overline{x}\right) \cdot \left(y_k - \overline{y}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \overline{x}\right) \cdot y_k$

Remarquez que la première égalité est une définition.
La seconde sert à montrer la première égalité encadrée ci-dessus.

Cette incertitude est pessimiste, car elle tient compte du cas où toutes les erreurs de mesures s'additionnent. En pratique, les physiciens utilisent souvent un calcul d'incertitude moins pessimiste, mais qui n'assure pas que la pente se trouve dans la fourchette $[a - \delta a\ ;\ a + \delta a]$

$$\delta a = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k\right)^2 - n\cdot(\overline{x})^2}}\cdot\delta y \quad \text{et} \quad \delta b = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\delta y + \delta a\cdot\left|\overline{x}\right|$$

<u>Calcul d'incertitude sur l'exemple précédent avec $n = 5$ et $a = 1{,}3185$ et $\delta y = 0{,}10$.</u>

x_{k}	y_{k}
0,50	0,67
2,01	2,58
2,97	3,85
5,04	6,41
8,94	11,81
$\overline{x} = 3{,}892$	$\overline{y} = 5{,}064$

Nous avons déjà calculé : $\overline{x} = 3{,}892$ et $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 118{,}4362$

Calculons : $\delta a = \dfrac{\sum_{k=1}^{n}\left|x_k - \overline{x}\right|}{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k\right)^2 - n\cdot(\overline{x})^2}\cdot\delta y$

$$\delta a = \frac{\left|0{,}50-3{,}892\right| + \left|2{,}01-3{,}892\right| + \left|2{,}97-3{,}892\right| + \left|5{,}04-3{,}892\right| + \left|8{,}94-3{,}892\right|}{118{,}44 - 5\cdot(3{,}892)^2}\cdot 0{,}10 =$$

$$\delta a = \frac{12{,}39}{42{,}70}\cdot 0{,}1$$

$$\underline{\underline{\delta a = 0{,}029}}$$

L'erreur relative sur a vaut : $\dfrac{\delta a}{a} = \dfrac{0{,}029}{1{,}319} = 0{,}022 \underline{\underline{= 2{,}2\%}}$

$\delta b \approx \delta y + \delta a\cdot\left|\overline{x}\right| = 0{,}10 + 0{,}029\cdot 3{,}892$

$\underline{\underline{\delta b = 0{,}21}}$ est pessimiste, car elle suppose que toutes les incertitudes s'additionnent.

$|b| = 0{,}0676$ qui est plus petit que δb, donc si la théorie prévoie que $b = 0$, on peut considérer qu'elle est vérifiée par cette expérience.

Dans ces exemples, aucune unité n'a été indiquée.
Dans une expérience réelle, les unités sont indispensables !

IV.3 Utilisation de la calculatrice pour effectuer les calculs précédents

Montrons sur l'exemple précédent comment la calculatrice TI-36 ou TI-34 simplifie les calculs.

x_k	y_k
0,50	0,67
2,01	2,58
2,97	3,85
5,04	6,41
8,94	11,81
$\overline{x} = 3{,}892$	$\overline{y} = 5{,}064$

Entrer dans le mode "Statistique" : $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{STAT}}$
Choisir l'option : "2−VAR" (pour TI-34) ou "LIN" (pour TI-36) : $\boxed{=}$
Pour débuter l'entrée des données : $\boxed{\text{DATA}}$
A l'affichage "X_1 =" taper la valeur de x_1 (dans notre exemple, $x_1 = 0{,}5$), puis ▼
A l'affichage "Y_1=" taper la valeur de y_1 (dans notre exemple, $y_1 = 0{,}67$), puis ▼
A l'affichage "X_2 =" taper la valeur de x_2 (dans notre exemple, $x_2 = 2{,}01$), puis ▼
A l'affichage "Y_2=" taper la valeur de y_2 (dans notre exemple, $y_2 = 2{,}58$), puis ▼

etc. jusqu'à la dernière valeur...

A l'affichage "X_5 =" taper la valeur de x_5 (dans notre exemple, $x_5 = 8{,}94$), puis ▼
A l'affichage "Y_5=" taper la valeur de y_5 (dans notre exemple, $y_5 = 11{,}81$, puis $\boxed{=}$ pour terminer.

Vous pouvez revenir en arrière, pour corriger, avec la touche ▲

Pour obtenir les résultats, taper sur $\boxed{\text{STATVAR}}$
n indique le nombre de données. Dans notre exemple, n = 5. C'est un contrôle de saisie !

$\overline{x}$ indique la moyenne : $\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k$. Dans notre exemple, $\overline{x} = 3{,}892$

$\overline{y}$ indique la moyenne : $\overline{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k$. Dans notre exemple, $\overline{y} = 5{,}064$

Σx indique la somme : $\Sigma x = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Donc $\frac{\Sigma x}{n} = \overline{x}$. Dans notre exemple, $\Sigma x = 19{,}46$

Σx^2 indique la somme : $\Sigma x^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^{\,2}$. On a : $\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2} = \sigma x$. Dans notre exemple, $\Sigma x^2 = 118{,}4362$

Σy indique la somme : $\Sigma y = \sum_{k=1}^{n} y_k$. Donc $\frac{\Sigma y}{n} = \overline{y}$. Dans notre exemple, $\Sigma yx = 25{,}32$

Σxy indique la somme : $\Sigma xy = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$. Dans notre exemple, $\Sigma xy = 154{,}8431$

a indique la valeur de a sur la TI-34 et de b sur la TI-36.
b indique la valeur de b sur la TI-34 et de a sur la TI-36. Inversion de a et b sur la TI-36.

Pour sortir du mode statistique : $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{EXIT STAT}}$ et confirmer avec $\boxed{=}$

Pour le calcul d'incertitude δa, vous devez effectuer séparément le calcul : $\sum_{k=1}^{n} \left| x_k - \overline{x} \right|$.