**Exercice 1**

Utilisons les indices 0 pour la Terre, 1 pour la fusée et 2 pour le projectile.

La vitesse de la fusée relativement à la Terre vaut $V_{01} = 0{,}600 \cdot c$ . $\beta_{01} = 0{,}600$

La vitesse du projectile relativement à la fusée vaut $V_{12} = 0{,}500 \cdot c$ . $\beta_{12} = 0{,}500$

On cherche la vitesse du projectile relativement à la Terre : $V_{02} = ??? \cdot c$ .

**1.1** Classiquement : $V_{02} = V_{01} + V_{12} = 0{,}600 \cdot c + 0{,}500 \cdot c = 1{,}1 \cdot c$ .

La vitesse du projectile mesurée depuis la Terre dépasse la vitesse de la lumière.

**1.2** Selon la formule d'addition des vitesses de la relativité restreinte :

$$V_{02} = \frac{V_{01} + V_{12}}{1 + \frac{V_{01} \cdot V_{12}}{c^2}} = \frac{0{,}600 \cdot c + 0{,}500 \cdot c}{1 + 0{,}600 \cdot 0{,}500} = 0{,}846 \cdot c \; .$$

La vitesse du projectile relativement à la Terre est de 0,846 · c.

Elle reste donc inférieure à la vitesse de la lumière.

**1.3** Notons avec l'indice 3 le deuxième projectile.

La vitesse du 2e projectile relativement à la fusée vaut $V_{13} = 0{,}99999 \cdot c$ . $\beta_{13} = 0{,}99999$

On cherche la vitesse du 2e projectile relativement à la Terre : $V_{03} = ??? \cdot c$ .

Selon la formule d'addition des vitesses de la relativité restreinte :

$$V_{03} = \frac{V_{01} + V_{13}}{1 + \frac{V_{01} \cdot V_{13}}{c^2}} = \frac{0{,}600 \cdot c + 0{,}99999 \cdot c}{1 + 0{,}600 \cdot 0{,}99999} = 0{,}9999975 \cdot c \; .$$

La vitesse du 2e projectile relativement à la Terre est de 0,9999975 · c.

Elle est encore plus proche de la vitesse de la lumière, mais reste inférieure à celle-ci.

---

**Exercice 2**

Utilisons les indices 0 pour la Terre, 1 pour un OVNI et 2 pour l'autre OVNI.

La vitesse du premier OVNI relativement à la Terre vaut $V_{01} = 0{,}900 \cdot c$ . $\beta_{01} = 0{,}900$

La vitesse du second OVNI relativement à la Terre vaut $V_{02} = -0{,}900 \cdot c$ . $\beta_{02} = -0{,}900$

On cherche la vitesse d'un OVNI relativement à l'autre : $V_{12} = ??? \cdot c$ .

**2.1** Selon la formule d'addition des vitesses de la relativité restreinte :

$$V_{12} = \frac{V_{01} - V_{02}}{1 - \frac{V_{01} \cdot V_{02}}{c^2}} = \frac{0{,}900 \cdot c - (-0{,}900 \cdot c)}{1 - 0{,}900 \cdot (-0{,}900)} = 0{,}994 \cdot c \; .$$

La vitesse d'un OVNI relativement à l'autre est de 0,994 · c, qui reste inférieure à la vitesse de la lumière.

**2.2** C'est le même calcul que précédemment, l'addition des vitesses de la relativité restreinte donne :

$$V_{12} = \frac{V_{01} - V_{02}}{1 - \frac{V_{01} \cdot V_{02}}{c^2}} = \frac{300'000 - (-300'000)}{1 - 0{,}001 \cdot (-0{,}001)} = 599'999{,}4 \; [m/s] \; .$$

La différence avec l'addition classique est de $\frac{600'000 - 599'999{,}4}{600'000} = 10^{-6} = 0{,}0001\%$

Même pour ces vitesses non atteintes par un objet terrestre, la différence entre l'addition de vitesse classique et relativiste est très faible. Les calculs relativistes ne sont pas nécessaires pour les vitesses d'objets terrestres.

**Exercice 3**

Utilisons les indices 0 pour la Terre, 1 pour la fusée et 2 pour le rayon lumineux.
La vitesse de la fusée relativement à la Terre vaut $V_{01} = \beta \cdot c$.

La vitesse du rayon relativement à la fusée vaut $V_{12} = c$. $\beta_{12} = 1$

On cherche la vitesse du rayon relativement à la Terre : $V_{02} = ???\cdot c$.

**3.1** Selon la formule d'addition des vitesses de la relativité restreinte :

$$V_{02} = \frac{V_{01}+V_{12}}{1+\frac{V_{01}\cdot V_{12}}{c^2}} = \frac{\beta\cdot c + c}{1+\beta\cdot 1} = c \quad .$$

La vitesse du rayon relativement à la Terre est de c., indépendamment de la valeur de $\beta$.

**3.2** Si le rayon est émis dans l'autre sens, il suffit de remplacer les signes + par des signes – et l'on obtient : $V_{02} = -c$ . La vitesse du rayon reste celle de la lumière.

---

**Exercice 4**

Utilisons les indices 0 pour la Terre, 1 pour un OVNI et et 2 pour l'autre OVNI..
La vitesse du premier OVNI relativement au second vaut $V_{12} = 0{,}900\cdot c$. $\beta_{12} = 0{,}900$

La vitesse du second OVNI relativement à la station vaut $V_{02} = ?\cdot c$. $\beta_{02} = ?$

La vitesse du premier OVNI relativement à la station vaut $V_{01} = -V_{02}$. $\beta_{01} = -\beta_{02}$

On cherche la vitesse $V_{02} = ?\cdot c$. $\beta_{02} = ?$

**4.1** Selon la formule d'addition des vitesses de la relativité restreinte : $\beta_{12} = \dfrac{\beta_{02}-\beta_{01}}{1-\beta_{02}\cdot\beta_{01}}$ .

Il faut donc résoudre l'équation : $0{,}900 = \dfrac{2\cdot\beta_{02}}{1+\beta_{02}^2}$ .

$0{,}900\cdot\beta_{02}^2 - 2\cdot\beta_{02} + 0{,}900 = 0$

Solution : $\beta_{02} = \dfrac{1\pm\sqrt{1-0{,}900\cdot 0{,}900}}{0{,}900} = 0{,}627$ , la solution avec le signe + est irréaliste.

La vitesse du second OVNI relativement à la station vaut <u>0,627 · c</u>.

Vérification : $\beta_{12} = \dfrac{\beta_{01}-\beta_{02}}{1-\beta_{01}\cdot\beta_{02}} = \dfrac{0{,}627-(-0{,}627)}{1-0{,}627\cdot(-0{,}627)} = 0{,}900$ , c'est bien juste.

---

**Exercice 5**

Utilisons les indices 0 pour la Terre, 1 pour la fusée et 2 pour le projectile.
La vitesse de la fusée relativement à la Terre vaut $\beta_{01} = 0{,}700$

La vitesse du projectile relativement à la fusée vaut $\beta_{12x} = 0$ ; $\beta_{12y} = 0{,}800$

On cherche la vitesse du projectile relativement à la Terre : $\vec{\beta}_{02} = \langle \beta_{02x}\ ;\ \beta_{02y}\rangle$ .

**5.1** Classiquement : $\vec{\beta}_{02} = \langle 0{,}700\ ;\ 0{,}800\rangle$ .

La norme de la vitesse du projectile mesurée depuis la Terre vaut :

$\beta_{02} = \sqrt{0{,}700^2 + 0{,}800^2} = 1{,}063$ , elle dépasse la vitesse de la lumière.

**5.2** Selon les formules d'additions des vitesses de la relativité restreinte :

$\beta_{02x} = \dfrac{\beta_{01}+\beta_{12x}}{1+\beta_{01}\cdot\beta_{12x}} = \dfrac{0{,}700+0}{1+0{,}700\cdot 0} = 0{,}700$ . C'est la même valeur que classiquement !

$$\beta_{02y} = \frac{\beta_{12y}}{1+\beta_{01}\cdot\beta_{12x}}\cdot\sqrt{1-\beta_{01}^2} = \frac{0{,}800}{1+0{,}700\cdot 0}\cdot\sqrt{1-0{,}700^2} = 0{,}571$$

**5.3** La norme de la vitesse du projectile relativement à la Terre est de

$\beta_{02} = \sqrt{0{,}700^2 + 0{,}571^2} = 0{,}903$ . Elle reste inférieure à la vitesse de la lumière.

---

**Exercice 6, curiosité.**
Utilisons les indices 0 pour la Terre, 1 pour la fusée et 2 pour le projectile.
La vitesse de la fusée relativement à la Terre vaut $\beta_{01} = 0{,}700$
La vitesse du projectile relativement à la fusée vaut $\beta_{12\,x} = 0$ ; $\beta_{12\,y} = 1$
On cherche la vitesse du projectile relativement à la Terre : $\vec{\beta}_{02} = \langle \beta_{02\,x}\ ;\ \beta_{02\,y} \rangle$ .

**6.1** Selon les formules d'additions des vitesses de la relativité restreinte :

$\beta_{02x} = \dfrac{\beta_{01}+\beta_{12x}}{1+\beta_{01}\cdot\beta_{12x}} = \dfrac{0{,}700+0}{1+0{,}700\cdot 0} = 0{,}700$ . Elle est indépendante de la vitesse verticale du projectile.

$$\beta_{02y} = \frac{\beta_{12\,y}}{1+\beta_{01}\cdot\beta_{12x}}\cdot\sqrt{1-\beta_{01}^2} = \frac{1}{1+0{,}700\cdot 0}\cdot\sqrt{1-0{,}700^2} = \sqrt{1-0{,}700^2}$$

La norme de la vitesse du projectile relativement à la Terre est de

$\beta_{02} = \sqrt{0{,}700^2 + 1-0{,}700^2} = 1$ . Elle est égale à la vitesse de la lumière.

**6.2** Il suffit de remplacer 0,700 par $\beta_{01}$ , pour montrer que le résultat précédent est indépendant de la vitesse de la lumière.

---

**Exercice 7, challenge.**
Utilisons les indices 0 pour la Terre, 1 pour la fusée et 2 pour le rayon.
La vitesse de la fusée relativement à la Terre vaut $\beta_{01}$
La vitesse du rayon relativement à la fusée vaut $\vec{\beta}_{12} = \langle \beta_{12\,x}\ ;\ \beta_{12\,y}\ ;\ \beta_{12\,z} \rangle$ .
On cherche la vitesse du rayon relativement à la Terre : $\vec{\beta}_{02} = \langle \beta_{02x}\ ;\ \beta_{02\,y}\ ;\ \beta_{02\,z} \rangle$ .
On sait que : $\beta_{12y}^2+\beta_{12\,z}^2 = 1-\beta_{12\,x}^2$ , cela sera utile pour la suite.

**7.1** Selon les formules d'additions des vitesses de la relativité restreinte :

$\beta_{02x} = \dfrac{\beta_{01}+\beta_{12\,x}}{1+\beta_{01}\cdot\beta_{12x}}$ . Elle est indépendante de la vitesse verticale du projectile.

$$\beta_{02y} = \frac{\beta_{12\,y}}{1+\beta_{01}\cdot\beta_{12\,x}}\cdot\sqrt{1-\beta_{01}^2}$$

$$\beta_{02z} = \frac{\beta_{12z}}{1+\beta_{01}\cdot\beta_{12\,x}}\cdot\sqrt{1-\beta_{01}^2}$$

La norme de la vitesse du projectile relativement à la Terre est de

$$||\beta_{02}||^2 = \frac{(\beta_{01}+\beta_{12\,x})^2+(\beta_{12\,y}^2+\beta_{12z}^2)\cdot(1-\beta_{01}^2)}{(1+\beta_{01}\cdot\beta_{12x})^2}$$

$||\beta_{02}||^2 = \dfrac{(\beta_{01}+\beta_{12\,x})^2+(1-\beta_{12\,x}^2)\cdot(1-\beta_{01}^2)}{(1+\beta_{01}\cdot\beta_{12x})^2}$ , on a utilisé $\beta_{12\,y}^2+\beta_{12\,z}^2 = 1-\beta_{12x}^2$

$||\beta_{02}||^2 = \dfrac{\beta_{01}^2+2\cdot\beta_{01}\cdot\beta_{12x}+\beta_{12\,x}^2+1-\beta_{12x}^2-\beta_{01}^2+\beta_{12x}^2\cdot\beta_{01}^2}{(1+\beta_{01}\cdot\beta_{12\,x})^2}$ , on a développé

$||\beta_{02}||^2 = \dfrac{2\cdot\beta_{01}\cdot\beta_{12x}+1+(\beta_{01}\cdot\beta_{12x})^2}{(1+\beta_{01}\cdot\beta_{12x})^2}$ , on a simplifié

$||\beta_{02}||^2 = \dfrac{(1+\beta_{01}\cdot\beta_{12\,x})^2}{(1+\beta_{01}\cdot\beta_{12\,x})^2}$ , on a factorisé le numérateur.

On trouve que la vitesse du rayon relativement à la Terre est égale à celle de la lumière. $||\beta_{02}||^2 = 1$
Ce résultat est presque magique, c'est la force du calcul algébrique.

---

**Exercice 8**

Utilisons les indices 0 pour la Terre, 1 pour la fusée et 2 pour le rayon.
La vitesse de la fusée relativement à la Terre vaut $\beta$
La vitesse du projectile relativement à la fusée vaut $\vec{\beta}_{12}{}' = \langle \beta_x{}' \,;\, \beta_y{}' \,;\, \beta_z{}' \rangle$ .
Dans le référentiel ***S'***, les coordonnées du projectile sont :
$X' = \beta_x{}' \cdot ct'$ ; $Y' = \beta_y{}' \cdot ct'$ ; $Z' = \beta_z{}' \cdot ct'$
Dans le référentiel ***S***, les coordonnées du projectile sont :
$X = \beta_x \cdot ct$ ; $Y = \beta_y \cdot ct$ ; $Z = \beta_z \cdot ct$

**8.1** De $X' = \beta_x{}' \cdot ct'$ ; $X' = \gamma \cdot (X - \beta \cdot ct)$ et $ct' = \gamma \cdot (ct - \beta \cdot X)$

$\gamma \cdot (X - \beta \cdot ct) = \beta_x{}' \cdot \gamma \cdot (ct - \beta \cdot X)$ , dans la première égalité, on a substitué X' à gauche et ct' à droite

$X - \beta \cdot ct = \beta_x{}' \cdot ct - \beta_x{}' \cdot \beta \cdot X$ , simplification et développement

$X \cdot (1 + \beta_x{}' \cdot \beta) = (\beta_x{}' + \beta) \cdot ct$ , on a isolé X d'un côté et ct de l'autre.

$X = \dfrac{\beta_x{}' + \beta}{1 + \beta_x{}' \cdot \beta} \cdot ct$ simplification. On retrouve l'évolution du projectile du point de vue de ***S***.

Dans le référentiel ***S*** de la Terre, la coordonnée x de la vitesse du projectile est : $\beta_x = \dfrac{\beta_x{}' + \beta}{1 + \beta_x{}' \cdot \beta}$ .

On retrouve la loi d'addition des vitesses selon la direction x.

**8.2** <u>Selon y :</u>

$Y = Y' = \beta_y{}' \cdot ct' = \beta_y{}' \cdot \gamma \cdot (ct - \beta \cdot X)$ utilisation de $ct' = \gamma \cdot (ct - \beta \cdot X)$

$Y = \beta_y{}' \cdot \gamma \cdot \left(ct - \beta \cdot \dfrac{\beta_x{}' + \beta}{1 + \beta_x{}' \cdot \beta} \cdot ct\right)$ utilisation de $X = \dfrac{\beta_x{}' + \beta}{1 + \beta_x{}' \cdot \beta} \cdot ct$

$Y = \beta_y{}' \cdot \gamma \cdot \dfrac{1 + \beta_x{}' \cdot \beta - \beta \cdot \beta_x{}' - \beta^2}{1 + \beta_x{}' \cdot \beta} \cdot ct$ mise au dénominateur commun, mise en évidence de $ct$

$Y = \dfrac{\beta_y{}'}{1 + \beta_x{}' \cdot \beta} \cdot \dfrac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot ct$ simplification, arrangement des termes et utilisation de $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

$Y = \dfrac{\beta_y{}'}{1 + \beta_x{}' \cdot \beta} \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \cdot ct$ simplification.

On retrouve la loi d'addition des vitesses selon la direction y.
Selon z, en fait exactement de même, en remplaçant y par z.

---

**Exercice 8, autre résolution. (plus compliquée)**
**Cela peut donner des idées pour d'autre démonstrations.**
Utilisons les indices 0 pour la Terre, 1 pour la fusée et 2 pour le rayon.
La vitesse de la fusée relativement à la Terre vaut $\beta$
La vitesse du projectile relativement à la fusée vaut $\vec{\beta}_{12}' = \langle \beta_x' \,;\, \beta_y' \,;\, \beta_z' \rangle$.
Dans le référentiel $\boldsymbol{S'}$, les coordonnées du projectile sont :
$X' = \beta_x' \cdot ct'$ ; $Y' = \beta_y' \cdot ct'$ ; $Z' = \beta_z' \cdot ct'$
Dans le référentiel $\boldsymbol{S}$, les coordonnées du projectile sont :
$X = \beta_x \cdot ct$ ; $Y = \beta_y \cdot ct$ ; $Z = \beta_z \cdot ct$
On sait aussi que : $ct' = \gamma \cdot (ct - \beta \cdot X)$ et $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2}$.

**8.1** De $ct = \gamma \cdot (ct' + \beta \cdot X')$ on en déduit que :

$ct' = \frac{1}{\gamma} \cdot ct - \beta \cdot X'$ isolation de $ct'$

$ct' = \frac{1}{\gamma} \cdot ct - \beta \cdot \beta_x' \cdot ct'$ utilisation de $X' = \beta_x' \cdot ct'$

$ct' \cdot (1 + \beta_x' \cdot \beta) = \frac{1}{\gamma} \cdot ct$ mise en évidence de $ct'$

Donc : $ct' = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{1+\beta_x' \cdot \beta} \cdot ct$ isolation de $ct'$

**8.2** Partons de $X = \gamma \cdot (X' + \beta \cdot ct')$ une transformation de Lorentz

$X = \gamma \cdot (\beta_x' \cdot ct' + \beta \cdot ct')$ utilisation de $X' = \beta_x' \cdot ct'$

$X = \gamma \cdot (\beta_x' + \beta) \cdot ct'$ mise en évidence de $ct'$

$X = \gamma \cdot (\beta_x' + \beta) \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{1+\beta_x' \cdot \beta} \cdot ct$ utilisation de $ct' = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{1+\beta_x' \cdot \beta} \cdot ct$

$X = \frac{\beta_x' + \beta}{1+\beta_x' \cdot \beta} \cdot ct$ simplification

Dans le référentiel $\boldsymbol{S}$ de la Terre, la coordonnée x de la vitesse du projectile est : $\beta_x = \frac{\beta_x' + \beta}{1+\beta_x' \cdot \beta}$.

On retrouve la loi d'addition des vitesses selon la direction x.

<u>Selon y :</u>

$Y = Y' = \beta_y' \cdot ct' = \beta_y' \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{1+\beta_x' \cdot \beta} \cdot ct$ utilisation de $ct' = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{1+\beta_x' \cdot \beta} \cdot ct$

$Y = \frac{\beta_y'}{1+\beta_x' \cdot \beta} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot ct$ arrangement des termes

$Y = \frac{\beta_y'}{1+\beta_x' \cdot \beta} \cdot \sqrt{1-\beta^2} \cdot ct$ utilisation de $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2}$

On retrouve la loi d'addition des vitesses selon la direction y.
Selon z, en fait exactement de même, en remplaçant y par z.

---

**Exercice 9**
Le diagramme de Minkowski permet de représenter dans un seul diagramme l'espace-temps, avec une lecture directe des coordonnées (x, ct) pour $\boldsymbol{S}$ et (x', ct') pour $\boldsymbol{S'}$ d'un événement.
L'avantage du diagramme de Loedel Palumbo est qu'il est symétrique, les graduations des axes de $\boldsymbol{S}$ et de $\boldsymbol{S'}$ sont les même, contrairement à celles d'un diagramme de Minkowski.

==========================================================================

**Ce qui suit est une curiosité, qui dépasse le cadre du cours du collège.**

Pour ne pas confondre avec des dérivées, mettons un indice $_F$ pour les grandeurs mesurées dans ***S'***.

$$\boldsymbol{S} \qquad\qquad \boldsymbol{S'} = \boldsymbol{S_F} \xrightarrow{\ \beta\ } \qquad \bullet\!\longrightarrow$$

La vitesse de la Fusée relativement à la Terre vaut $\beta$
Dans le référentiel ***S<sub></sub>***$_F$, la position du projectile est : $X_F = X_{F0} + \beta_F \cdot ct_F$
Donc le projectile avance à vitesse constante vu de $\boldsymbol{S_F}$.
Dans le référentiel ***S***, la position du projectile est : $X = X(ct)$ à déterminer.

De $X_F = X_{F0} + \beta_F \cdot ct_F$ ; $X_F = \gamma \cdot (X - \beta \cdot ct)$ et $ct_F = \gamma \cdot (ct - \beta \cdot X)$

$\gamma \cdot (X - \beta \cdot ct) = X_{F0} + \beta_F \cdot \gamma \cdot (ct - \beta \cdot X)$ , dans la première égalité, on a substitué $X_F$ à gauche et $ct_F$ à droite

$X - \beta \cdot ct = \dfrac{X_{F0}}{\gamma} + \beta_F \cdot ct - \beta_F \cdot \beta \cdot X$ , simplification et développement

$X \cdot (1 + \beta_F \cdot \beta) = \dfrac{X_{F0}}{\gamma} + (\beta_F + \beta) \cdot ct$ , on a isolé X d'un côté et ct de l'autre.

$X = \dfrac{X_{F0}}{\gamma \cdot (1 + \beta_F \cdot \beta)} + \dfrac{\beta_F + \beta}{1 + \beta_F \cdot \beta} \cdot ct$ simplification. On retrouve l'évolution du projectile du point de vue de ***S***.

**Dans le référentiel *S* de la Terre, la vitesse du projectile est :** $\beta_{Terre} = \dfrac{\beta_F + \beta}{1 + \beta_F \cdot \beta}$ **.**

**On retrouve la loi d'addition des vitesses selon la direction x.**

Dans ***S***, la position du projectile au temps $ct = 0$ [s] est : $X(0) = \dfrac{X_{F0}}{\gamma \cdot (1 + \beta_F \cdot \beta)}$ .

Cela peut paraître curieux.

On sait que dans $\boldsymbol{S_F}$ la position du projectile au temps $ct_F = 0$ vaut $X_{F0}$.
Mais, si $ct_F = 0$, alors $X_F = X_{F0}$ et $ct_0 = \gamma \cdot (ct_F + \beta \cdot X_F) = \gamma \cdot (0 + \beta \cdot X_{F0})$ , donc $ct_0 = \beta \cdot \gamma \cdot X_{F0}$
Résumons : $ct_F = 0$ ; $X_F = X_{F0}$ ; $ct_0 = \beta \cdot \gamma \cdot X_{F0}$
Voyons la position dans ***S*** du projectile au temps $ct_0$ .

$X(ct_0) = \dfrac{X_{F0}}{\gamma \cdot (1 + \beta_F \cdot \beta)} + \dfrac{\beta_F + \beta}{1 + \beta_F \cdot \beta} \cdot \beta \cdot \gamma \cdot X_{F0}$

$X(ct_0) = \left(1 + \beta_F \cdot \beta \cdot \gamma^2 + \beta^2 \cdot \gamma^2\right) \cdot \dfrac{X_{F0}}{\gamma \cdot (1 + \beta_F \cdot \beta)}$ mise au dénominateur commun et mise en évidence

$X(ct_0) = \left(\beta_F \cdot \beta \cdot \gamma^2 + \gamma^2\right) \cdot \dfrac{X_{F0}}{\gamma \cdot (1 + \beta_F \cdot \beta)}$ $\quad 1 + \beta^2 \cdot \gamma^2 = \gamma^2$

$X(ct_0) = \gamma \cdot X_{F0}$ mise en évidence de $\gamma$, puis simplification

La position du projectile mesurée dans ***S*** au temps $ct_0$ correspond à une dilatation de distance !

Autre approche, qui sera utile pour la suite :

Dérivons par rapport à $ct$ les deux côtés de l'expression : $X - \beta \cdot ct = \dfrac{X_{F0}}{\gamma} + \beta_F \cdot ct - \beta_F \cdot \beta \cdot X$

$X' - \beta = \beta_F - \beta_F \cdot \beta \cdot X'$ on a dérivé

$X' = \dfrac{\beta_F + \beta}{1 + \beta_F \cdot \beta}$ on a isolé X'. On retrouve l'expression de l'addition des vitesses !

**Curiosité, suite 2e page.**

Pour ne pas confondre avec des dérivées, mettons un indice $_F$ pour les grandeurs mesurées dans $\boldsymbol{S'}$.

$\boldsymbol{S}$ $\quad\quad\quad$ $\boldsymbol{S'} = \boldsymbol{S_F} \xrightarrow{\beta}$ $\quad$ $\bullet\!\longrightarrow$

On veut traiter le cas d'accélération du projectile.
Contrairement à la mécanique classique, la notion d'accélération est dépendante du référentiel d'inertie.

On va définir **l'accélération propre** d'un projectile, comme étant l'accélération mesurée depuis un référentiel qui se déplace à la même vitesse que le projectile au moment de la mesure.

Choisissons un référentiel $\boldsymbol{S_F}$, telle que la position du projectile est : $X_F = X_{F0} + \frac{1}{2}\cdot\alpha_F\cdot(ct_F)^2$

Donc, dans le référentiel $\boldsymbol{S_F}$, au temps $ct_F = 0$, la vitesse du projectile est nulle et l'accélération propre du projectile vaut $\alpha_F$. $\alpha_F$ est en [1/m] = accélération / $c^2$.

Dans le référentiel $\boldsymbol{S_F}$, la vitesse du projectile en fonction du temps vaut : $\beta_F = \alpha_F\cdot ct_F$ .
Il n'est pas possible que la vitesse progresse longtemps ainsi, car selon cette progression, $\beta_F$ peut dépasser 1, le projectile dépasserait la vitesse de la lumière.

Dans le référentiel $\boldsymbol{S_F}$, l'accélération du projectile est constante et vaut : $\alpha_F$ . Nous verrons que c'est plus que l'accélération propre du projectile à un temps supérieur à 0.

Évolution de la position du projectile observé depuis la Terre $\boldsymbol{S}$.
La vitesse de la Fusée relativement à la Terre vaut $\beta$
Dans le référentiel $\boldsymbol{S}$, la position du projectile est : $X = X(ct)$ à déterminer.

De $X_F = X_{F0} + \frac{1}{2}\cdot\alpha_F\cdot(ct_F)^2$ ; $X_F = \gamma\cdot(X - \beta\cdot ct)$ et $ct_F = \gamma\cdot(ct - \beta\cdot X)$

$\gamma\cdot(X - \beta\cdot ct) = X_{F0} + \frac{1}{2}\cdot\alpha_F\cdot\gamma^2\cdot(ct - \beta\cdot X)^2$ , dans la première égalité, on a substitué $X_F$ et $ct_F$

$X - \beta\cdot ct = \frac{X_{F0}}{\gamma} + \frac{1}{2}\cdot\alpha_F\cdot\gamma\cdot(ct - \beta\cdot X)^2$ , simplification et développement

On pourrait isoler $X$ et l'exprimer en fonction de $ct$, mais c'est compliqué et pas intéressant.

On peut déterminer la position $X(0)$, pour obtenir : $X(0) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 2\cdot\alpha_F\cdot\beta^2\cdot X_{F0}}}{\alpha_F\cdot\beta^2\cdot\gamma}$ .

Ce n'est pas intéressant et ce n'est pas en $ct = 0$ qu'il faut étudier le projectile, mais au temps $ct_F = 0$, car c'est là qu'on connaît son accélération propre.

**Curiosité, suite 3e page.**

On sait que dans $\boldsymbol{S_F}$ la position du projectile au temps $ct_F = 0$ vaut $X_{F0}$.
Mais, si $ct_F = 0$, alors $X_F = X_{F0}$ et $ct_0 = \gamma\cdot(ct_F+\beta\cdot X_F) = \gamma\cdot(0+\beta\cdot X_{F0})$, donc $ct_0 = \beta\cdot\gamma\cdot X_{F0}$
Résumons : $ct_F=0$ ; $X_F=X_{F0}$ ; $ct_0=\beta\cdot\gamma\cdot X_{F0}$

Voyons la position $X(ct_0)$ dans $\boldsymbol{S}$ du projectile au temps $ct_0$ .

$$X(ct_0)-\beta\cdot ct_0 = \frac{X_{F0}}{\gamma}+\frac{1}{2}\cdot\alpha_F\cdot\gamma\cdot(ct_0-\beta\cdot X(ct_0))^2$$

$$X(ct_0)-\beta\cdot\beta\cdot\gamma\cdot X_{F0} = \frac{X_{F0}}{\gamma}+\frac{1}{2}\cdot\alpha_F\cdot\gamma\cdot(\beta\cdot\gamma\cdot X_{F0}-\beta\cdot X(ct_0))^2$$

$$X(ct_0)-\beta^2\cdot\gamma\cdot X_{F0}-\frac{X_{F0}}{\gamma} = \frac{1}{2}\cdot\alpha_F\cdot\gamma\cdot\beta^2\cdot(\gamma\cdot X_{F0}-X(ct_0))^2$$

$$X(ct_0)-\frac{\beta^2\cdot\gamma^2-1}{\gamma}\cdot X_{F0} = \frac{1}{2}\cdot\alpha_F\cdot\gamma\cdot\beta^2\cdot(\gamma\cdot X_{F0}-X(ct_0))^2$$

$$X(ct_0)-\gamma\cdot X_{F0} = \frac{1}{2}\cdot\alpha_F\cdot\gamma\cdot\beta^2\cdot(\gamma\cdot X_{F0}-X(ct_0))^2 \quad \text{car } \beta^2\cdot\gamma^2-1 = \gamma^2$$

On voit qu'une solution est : $X(ct_0) = \gamma\cdot X_{F0}$ .
Comme dans le cas du projectile avançant à vitesse constante, la position du projectile mesurée dans $\boldsymbol{S}$ au temps $ct_0$ correspond à une dilatation de distance !
Résumons : $\boxed{ct_F=0 \quad ; \quad X_F=X_{F0} \quad ; \quad ct_0=\beta\cdot\gamma\cdot X_{F0} \quad ; \quad X(ct_0) = \gamma\cdot X_{F0}}$

Il sera utile pour la suite de remarquer que : $\boxed{ct_0-\beta\cdot X(ct_0) = 0}$
car $ct_0-\beta\cdot X(ct_0) = \beta\cdot\gamma\cdot X_{F0}-\beta\cdot\gamma\cdot X_{F0} = 0$ .

Reprenons $X-\beta\cdot ct = \frac{X_{F0}}{\gamma}+\frac{1}{2}\cdot\alpha_F\cdot\gamma\cdot(ct-\beta\cdot X)^2$ et dérivons par rapport à *ct*.

$$X'-\beta = \alpha_F\cdot\gamma\cdot(ct-\beta\cdot X)\cdot(1-\beta\cdot X')$$

Évaluons en $ct_F=0$ ; $X_F=X_{F0}$ ; $ct_0=\beta\cdot\gamma\cdot X_{F0}$ ; $X(ct_0) = \gamma\cdot X_{F0}$

$$X'(ct_0)-\beta = \alpha_F\cdot\gamma\cdot(ct_0-\beta\cdot X(ct_0))\cdot(1-\beta\cdot X'(ct_0))$$

$\boxed{X'(ct_0)-\beta = 0}$ vu que $ct_0-\beta\cdot X(ct_0) = 0$
Donc on trouve bien que le projectile a la même vitesse que le référentiel $\boldsymbol{S_F}$ dans lequel le projectile n'avance pas à cet instant.

Dérivons une seconde fois :

$$X'' = \alpha_F\cdot\gamma\cdot(1-\beta\cdot X')^2+\alpha_F\cdot\gamma\cdot(ct-\beta\cdot X)\cdot(-\beta\cdot X'')$$

Évaluons en $ct_F=0$ ; $X_F=X_{F0}$ ; $ct_0=\beta\cdot\gamma\cdot X_{F0}$ ; $X(ct_0) = \gamma\cdot X_{F0}$

$X''(ct_0) = \alpha_F\cdot\gamma\cdot(1-\beta\cdot X'(ct_0))^2+0$ vu que $ct_0-\beta\cdot X(ct_0) = 0$

$$X''(ct_0) = \alpha_F\cdot\gamma\cdot(1-\beta\cdot\beta)^2 = \alpha_F\cdot\gamma\cdot\frac{1}{\gamma^4}$$

$\boxed{X''(ct_0) = \alpha_F\cdot\frac{1}{\gamma^3}}$ Attention que la dérivée ' est un [1/m], car on dérive selon *ct*.
L'accélération mesurée dans le référentiel $\boldsymbol{S}$ est égale à l'accélération propre divisée par $\gamma^3$ !
Donc vu de $\boldsymbol{S}$ la vitesse du projectile augmente de moins en moins.

**Curiosité, suite 4[e] page.**

Étudions le cas où l'accélération propre du projectile est constante et vaut : $\alpha_F$
$\alpha_F$ est en [1/m] = accélération / $c^2$.

$X''(ct_0) = \alpha_F \cdot (1-\beta^2)^{3/2} = \alpha_F \cdot (1-X'(ct_0)^2)^{3/2}$ unité de $\alpha_F$ : [1/m] !
Notons $\beta = X'(ct_0)$, la vitesse au temps $ct_0$.

On a donc l'équation différentielle : $\beta' = \alpha_F \cdot (1-\beta^2)^{3/2}$, avec $\beta = 0$ au départ.
<u>Attention :</u> la dérivée ' est en [1/m], car on dérive selon $ct$.

La solution est : $\boxed{\beta(ct) = \dfrac{\alpha_F \cdot ct}{\sqrt{1+\alpha_F^2 \cdot ct^2}}}$, il suffit de dériver pour vérifier !
Au départ, lorsque la vitesse est faible, $\alpha_F^2 \cdot ct^2 \ll 1$ , on à $\beta(ct) = \alpha_F \cdot ct$ la relation classique d'augmentation de vitesse.

Lorsque $ct$ devient grand, le 1 sous la racine devient négligeable et $\beta(ct) \approx 1$ .
Le projectile s'approche de la vitesse de la lumière, mais reste toujours inférieure.

**Étudions l'évolution du projectile du point de vue de la quantité de mouvement et de la force.**

La quantité de mouvement est définie par : $p = m_0 \cdot \gamma \cdot \beta \cdot c = \dfrac{m_0 \cdot \beta \cdot c}{\sqrt{1-\beta^2}}$

**La force résultante est définie par :** $\boxed{F_{rés} = \dfrac{dp}{dt}}$.

$$F_{rés} = \frac{d\,p}{d\,t} = c \cdot \frac{d\,p}{d\,ct}$$

$$F_{rés} = m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{\beta' \cdot \sqrt{1-\beta^2} - \dfrac{\beta \cdot (-\beta) \cdot \beta'}{\sqrt{1-\beta^2}}}{1-\beta^2}$$ la dérivée ' signifie $\dfrac{d}{d\,ct}$

$$F_{rés} = m_0 \cdot c^2 \cdot \beta' \cdot \frac{1-\beta^2+\beta^2}{(1-\beta^2)^{3/2}}$$ mise au dénominateur commun et mise en évidence.

$$F_{rés} = m_0 \cdot c^2 \cdot \alpha_F \cdot (1-\beta^2)^{3/2} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}}$$ utilisation de $\beta' = \alpha_F \cdot (1-\beta^2)^{3/2}$

$$\boxed{F_{rés} = m_0 \cdot c^2 \cdot \alpha_F}$$ simplification

La force résultante observée depuis ***S*** est constante.
Elle est indépendante de $\beta$, donc c'est la même mesurée depuis n'importe quel référentiel d'inertie.

**On vient de montrer qu'en relativité, si un objet subit une force résultante constante dans un référentiel d'inertie *S*, alors son <u>accélération propre</u> est constante et réciproquement.**
**Par contre, l'accélération mesurée depuis le référentiel *S* n'est pas constante !**

L'accélération mesurée depuis ***S*** vaut : $a = \dfrac{c^2 \cdot \alpha_F}{\gamma^3}$ ; $a = c^2 \cdot \alpha_F \cdot (1-\beta^2)^{3/2}$ .