Exercice de cinématique : "le Mouvement Circulaire Uniforme"

Un mouvement est donné par l'équation $\vec{r} = R\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\vec{i} + R\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot\vec{j}$

(ω et R sont des constantes)

a) Trouver la norme de $\vec{r}$.

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{R^2\cdot\cos^2(\omega\cdot t)+R^2\cdot\sin^2(\omega\cdot t)} = R\cdot\sqrt{\cos^2(\omega\cdot t)+\sin^2(\omega\cdot t)} = R$$

b) De quel mouvement s'agit-il ? Il s'agit d'un mouvement circulaire à distance fixe de l'origine.

c) Quelle est la signification de ω ? ω représente la vitesse angulaire, l'augmentation de l'angle en fonction du temps.

On donne : R = 2,0 [m] et $\omega = \pi/6$ [rad/s].

d) Trouver la période T. On se retrouve au point de départ (t = 0 [s]) lorsque $\omega\cdot T = 2\cdot\pi$.

Donc $T = \frac{2\cdot\pi}{\omega} = \frac{2\cdot\pi}{\pi/6} = \frac{1}{12}\,[s]$. Il faut 12 secondes pour faire un tour complet.

e) Chercher l'équation de la trajectoire par élimination de t entre x et y.

$x = R\cdot\cos(\omega\cdot t)$ et $y = R\cdot\sin(\omega\cdot t)$. En mettant au carré et en additionnant on obtient :

$$x^2+y^2 = R^2\cdot\cos^2(\omega\cdot t)+R^2\cdot\sin^2(\omega\cdot t) = R^2\cdot(\cos^2(\omega\cdot t)+\sin^2(\omega\cdot t)) = R^2$$

L'équation de la trajectoire est le cercle défini par : $x^2+y^2 = R^2$

f) Calculer $\vec{r}$ pour $t = 0$; 1,0 ; 2,0 ; 3,0 ; 6,0 [s].

$\vec{r}(0) = (R\ ;\ 0) = (2\ ;\ 0)\,[m]$

$\vec{r}(1{,}0) = (2\cdot\cos((\pi/6)\cdot 1)\ ;\ 2\cdot\sin((\pi/6)\cdot 1)) = (1{,}73\ ;\ 1)\,[m]$

$\vec{r}(2{,}0) = (2\cdot\cos((\pi/6)\cdot 2)\ ;\ 2\cdot\sin((\pi/6)\cdot 2)) = (1\ ;\ 1{,}73)\,[m]$

$\vec{r}(3{,}0) = (2\cdot\cos((\pi/6)\cdot 3)\ ;\ 2\cdot\sin((\pi/6)\cdot 3)) = (0\ ;\ 2)\,[m]$, un quart de tour.

$\vec{r}(6{,}0) = (2\cdot\cos((\pi/6)\cdot 6)\ ;\ 2\cdot\sin((\pi/6)\cdot 6)) = (-2\ ;\ 0)\,[m]$, un demi tour.

g) Calculer $\Delta\vec{r}$ entre 0 et 1 [s], entre 0 et 2 [s], entre 0 et 3 [s].

$\Delta\vec{r}_1 = \vec{r}(1)-\vec{r}(0) = (1{,}73\ ;\ 1)-(2\ ;\ 0)\,[m] = (-0{,}27\ ;\ 1)$.

$\Delta\vec{r}_2 = \vec{r}(2)-\vec{r}(0) = (1\ ;\ 1{,}73)-(2\ ;\ 0)\,[m] = (-1\ ;\ 1{,}73)\cdot$

$\Delta\vec{r}_3 = \vec{r}(3)-\vec{r}(0) = (0\ ;\ 2)-(2\ ;\ 0)\,[m] = (-2\ ;\ 2)$.

h) Calculer $\vec{v}_m$ dans ces trois cas.

$\vec{v}_{m1} = \Delta\vec{r}_1/1[s] = (-0{,}27\ ;\ 1)\,[m/s]$; $v_{m1} = 1{,}00\,[m/s]$

$\vec{v}_{m2} = \Delta\vec{r}_2/2[s] = (-0{,}5\ ;\ 0{,}865)\,[m/s]$; $v_{m2} = 1{,}00\,[m/s]$

$\vec{v}_{m3} = \Delta\vec{r}_3/3[s] = (-0{,}667\ ;\ 0{,}667)\,[m/s]$; $v_{m3} = 0.943\,[m/s]$

i) Exprimer $\vec{v}=\dot{\vec{r}} = -R\cdot\omega\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot\vec{i} + R\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\vec{j} = \frac{\pi}{3}\cdot\left\langle -\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)\ ;\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)\right\rangle$

j) Calculer v (la norme de $\vec{v}$). $v = \|\vec{v}\| = R\cdot\omega = \frac{\pi}{3} = 1{,}047\left[\frac{m}{s}\right]$.

k) Calculer $\vec{v}$ pour $t = 0$; 1,0 ; 2,0 ; 3,0 ; 6,0 [s].

$\vec{v}(0) = (0\ ;\ 1{,}047)\,[m]$ $\quad$ $\vec{v}(1) = (-0{,}524\ ;\ 0{,}907)\,[m]$

$\vec{v}(2) = (-0.907\ ;\ 0{,}524)\,[m]$ $\quad$ $\vec{v}(3) = (-1{,}047\ ;\ 0)\,[m]$

$\vec{v}(6) = -\vec{v}(0)(0\ ;\ -1{,}047)\,[m]$

l) Calculer v pour $t = 0$; 1,0 ; 2,0 ; 3,0 ; 6,0 [s] et comparer aux v_{m} calculées sous h).

$v(0) = v(1) = v(2) = v(3) = v(6) = 1{,}047\ [m]$

Les vitesses instantanées se rapproche des vitesses moyennes, si l'intervalle de temps n'est pas trop grand.

m) Représenter ces divers vecteurs ($\vec{r}$ et $\vec{v}$) dans le plan (prendre R = 6,0 [cm]).

PAS FAIT

n) Calculer $\Delta\vec{v}$ entre $t = 0$ et $t = 3{,}0$ [s].

PAS FAIT

o) Calculer $\vec{a}_m$ correspondant. Représenter ce vecteur sur le graphique.

PAS FAIT

p) Exprimer $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -R\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\vec{i} - R\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot\vec{j} = -\omega^2\cdot\vec{r}$

q) Calculer a (la norme de $\vec{a}$). $a = \|\vec{a}\| = R\cdot\omega^2 = \frac{\pi^2}{18} = 0{,}548\left[\frac{m}{s^2}\right]$

r) Calculer $\vec{a}$ pour $t = 0$; 1,0 ; 2,0 ; 3,0 [s]. Représenter ces vecteurs sur le graphique.

$\vec{a}(0) = (-R\cdot\omega^2\ ;\ 0) = (-0{,}548\ ;\ 0)\ [m/s^2]$

$\vec{a}(1) = -\omega^2\cdot\vec{r}(1) = (-0{,}475\ ;\ -0{,}274)\ [m/s^2]$

$\vec{a}(2) = -\omega^2\cdot\vec{r}(2) = (-0{,}274\ ;\ -0{,}475)\ [m/s^2]$

$\vec{a}(3) = -\omega^2\cdot\vec{r}(3) = (0\ ;\ -0{,}548)\ [m/s^2]$

s) Exprimer $\vec{a}$ en fonction de $\vec{r}$.

$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -R\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\vec{i} - R\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot\vec{j} = -\omega^2\cdot\vec{r}$, déjà vu plus haut.