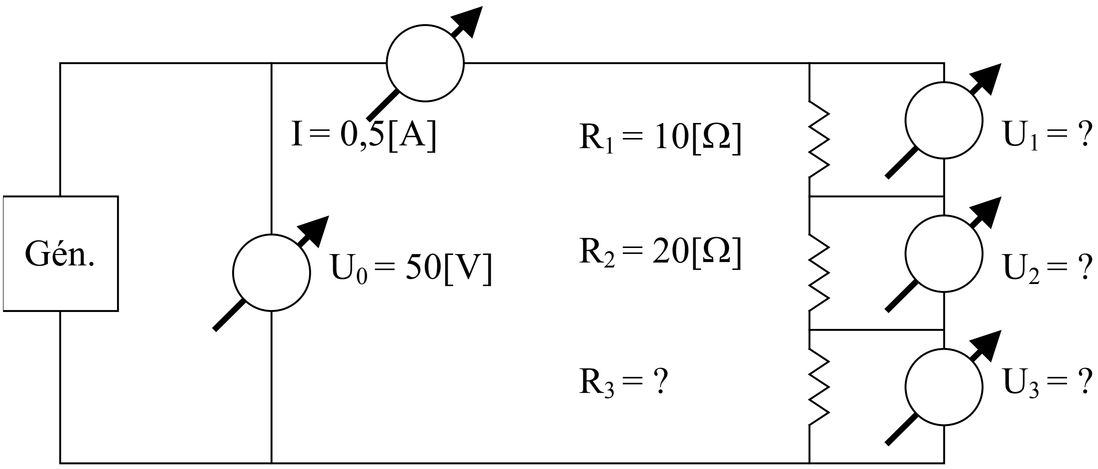
Corrections de la série 04 d'exercices sur les circuits électriques

1. Avec : $R = \dfrac{U}{I}$ => $U = R \cdot I$

Donc $U_1=10[\Omega]\cdot 0{,}5[A] = 5[V]$ et $U_2 = 20[\Omega]\cdot 0{,}5[A] = 10[V]$



Comme $U_0= U_1 + U_2 + U_3$, alors $U_3 = U_0 - U_1 - U_2 = 50 – 5 – 10 = 35$ [V]

et $R_3 = \dfrac{U_3}{I_3} = \dfrac{35[V]}{0{,}5[A]} = 70[\Omega]$

2. Comme le branchement en série est forcément plus résisitif que le branchement en parallèle, on a :

$R_{éq,série} = R_1 + R_2 = 100[\Omega]$ et $R_{éq,para} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}} = 5[\Omega]$

De la première équation, on tire $R_2 = 100[\Omega] - R_1$

Et en l'insérant dans la deuxième équation : $\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{100[\Omega]-R_1}} = 5[\Omega]$

=> $\dfrac{1}{\dfrac{100[\Omega]-R_1+R_1}{(100[\Omega]-R_1)\cdot R_1}} = 5[\Omega]$ => $\dfrac{(100[\Omega]-R_1)R_1}{100[\Omega]} = 5[\Omega]$

=> $100[\Omega]\cdot R_1 - R_1^2 = 500\ [\Omega^2]$ => $R_1^2 - 100[\Omega]\cdot R_1 + 500\ [\Omega^2] = 0$

$$=> R_1 = \frac{100[\Omega]\pm\sqrt{10^4[\Omega^2]-4\cdot 500[\Omega^2]}}{2} = \frac{100[\Omega]\pm\sqrt{8000[\Omega^2]}}{2} = 50[\Omega]\pm 44{,}7[\Omega] = \begin{cases} 94{,}7[\Omega] \\ 5{,}3[\Omega] \end{cases}$$

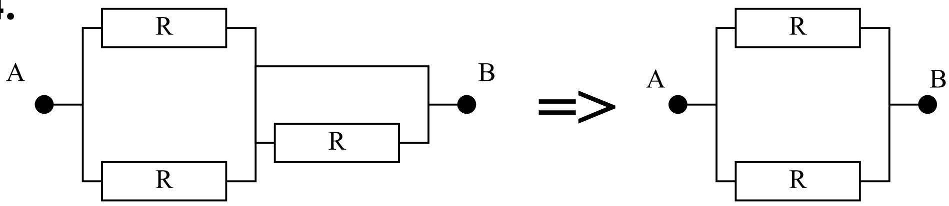
La solution est donc $R_1 = 94{,}7$ [Ω] et $R_2 = 5{,}3$ [Ω] (ou l'inverse $R_1 = 5{,}3$ [Ω] et $R_2 = 94{,}7$ [Ω])

3. Des triangles semblables, on tire que : $\frac{AB}{R_1} = \frac{CB}{R_{eq}}$ et $\frac{AB}{R_2} = \frac{AC}{R_{eq}}$

En les additionnant, on trouve que : $\frac{AB}{R_1} + \frac{AB}{R_2} = \frac{AC}{R_{eq}} + \frac{CB}{R_{eq}} = \frac{AC + CB}{R_{eq}} = \frac{AB}{R_{eq}}$

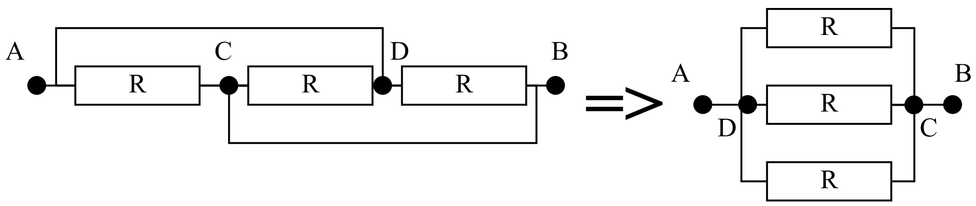
Et en simplifiant AB : $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{eq}}$

4.



Le courant contourne la 3ème résistance, le circuit se réduit donc à deux résistances en parallèle !

La résistance équivalente se réduit à : $R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{R}{2}$



Les 3 résistances sont en fait branchées en parallèle. La résistance équivalente vaut :

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{R}{3}$$

5. R_0 est tout d'abord branchée en série avec une résistance R_x, donc $R_{0,x} = R_0 + R_x$.

Ces deux résistances sont branchées en parallèle avec une autre résistance R_x, donc :

$$\frac{1}{R_{0,x,x}} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_{0,x}} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_0 + R_x}$$

Cet élément de circuit est branché en série avec la dernière résistance R_x, donc :

$$R_{eq} = R_{0,x,x} + R_x = \frac{1}{\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_0 + R_x}} + R_x$$

On veut fixer R_x pour que R_{eq} soit égale à R_0 :

$$R_0 = \frac{1}{\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_0 + R_x}} + R_x = \frac{R_x(R_0 + R_x)}{R_0 + 2R_x} + R_x = \frac{R_x(R_0 + R_x) + R_x(R_0 + 2R_x)}{R_0 + 2R_x} = \frac{R_x(2R_0 + 3R_x)}{R_0 + 2R_x}$$

Donc : $R_0(R_0 + 2R_x) = R_x(2R_0 + 3R_x)$ => $R_0^2 + \cancel{2R_0R_x} = \cancel{2R_0R_x} + 3R_x^2$

On en tire : $R_x^2 = \frac{1}{3}R_0^2$, soit $\underline{R_x = \frac{1}{\sqrt{3}}R_0}$

6. La 1ère résistance (appelons-la R_1) est traversée par le plus grand courant (logique, puisque le courant se divise pour les deux autres). C'est donc celle des trois résistances qui dissipe le plus de puissance.

Les relations $P = UI$ et $U = RI$ permettent d'obtenir $P = RI^2$, soit $I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = 3[A]$

C'est le courant maximal I_1 qui peut traverser la première résistance (c'est donc aussi le courant total I_0).

Les deux résistances en parallèle ont une résistance équivalente de :

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{2[\Omega]} + \frac{1}{2[\Omega]}} = \frac{1}{\frac{2}{2}} = 1[\Omega]$$

Soit une tension aux bornes de : $U_{2,3} = R_{eq}\, I_0 = 3[V]$

Le courant I_2 traversant R_2 est donc de : $I_2 = \frac{U_{2,3}}{R_2} = \frac{3[V]}{2[\Omega]} = 1{,}5[A]$

Ce courant est égale à I_3 et vaut la moitié de I_0 (quoique que l'on s'y attendait un peu… :))
La puissance totale vaut donc :
$P_{tot} = P_1 + P_2 + P_3 = U_1I_1 + U_2I_2 + U_3I_3 = 18\,[W] + 3[V]1{,}5\,[A] + 3[V]\,1{,}5[A] = 27\,[W]$

7. a) Lorsque l'interrupteur (i) est fermé, R_2 est court-circuitée (inactivée) et on a :

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_1^2}{P_1} = \frac{220^2}{150} = \underline{\underline{323[\Omega]}}$$

b) Lorsque l'interrupteur (i) est ouvert, les deux résistances sont branchées en série.
La tension aux bornes de R_1 vaut :

$$U_1' = R_1 I_1 = R_1 \frac{P_1}{U_1'} \Rightarrow U_1'^2 = R_1 P_1 \Rightarrow U_1' = \sqrt{R_1 P_1} = \sqrt{323 \cdot 65} = 145[V]$$

Le courant total est égal à celui traversant R_1 et R_2, appelons-le simplement I', il vaut:

$$I' = \frac{U_1'}{R_1} = 0{,}449[A]$$

La tension aux bornes de R_2 vaut alors : $U_2' = U_{tot} - U_1' = 75[V]$

La résistance R_2 est donc de : $R_2 = \frac{U_2'}{I'} = \underline{\underline{167[\Omega]}}$

8. a) $$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{1[\Omega]+2[\Omega]} + \frac{1}{2[\Omega]+1[\Omega]}} = \frac{1}{\frac{2}{3[\Omega]}} = 1{,}5[\Omega]$$

$$I_0 = \frac{U_0}{R_{eq}} = \frac{120[V]}{1{,}5[\Omega]} = 80[A]$$

b) $$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{2[\Omega]} + \frac{1}{1[\Omega]}} + \frac{1}{\frac{1}{1[\Omega]} + \frac{1}{2[\Omega]}} = 2\frac{1}{\frac{3}{2[\Omega]}} = \frac{4}{3}[\Omega]$$

$$I_0 = \frac{U_0}{R_{eq}} = \frac{120[V]}{4/3\,[\Omega]} = 90[A]$$

9. C'est un problème 'à tiroirs', qui se résout en remontant chaque étape du circuit une par une, en calculant à chaque fois la tension U, puis le courant I correspondant:

$$U_3 = R_3 I_3 = 3\cdot 12\cdot 10^{-3} = 36\cdot 10^{-3}[V] = 36[mV] = U_1$$

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{36\cdot 10^{-3}[V]}{1[\Omega]} = 36\cdot 10^{-3}[A] = 36[mA] \quad => \quad I_2 = I_1 + I_3 = 36 + 12 = 48[mA]$$

$$U_2 = R_2 I_2 = 2[\Omega]\cdot 48[mA] = 96[mV] \quad => \quad U_4 = U_3 + U_2 = 36 + 96 = 132\ [mV]$$

$$I_4 = \frac{U_4}{R_4} = \frac{132[mV]}{4[\Omega]} = 33[mA] \quad => \quad I_5 = I_4 + I_2 = 48 + 33 = 81[mA]$$

$$U_5 = R_5 I_5 = 5\cdot 81 = 405[mV] \quad => \quad U_{tot} = U_4 + U_5 = 132 + 405 = 537\ [mV]$$

10. Partons du centre du circuit :

$$R_{2,4} = R_2 + R_4 \quad => \quad R_{2,3,4} = \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{2,4}}} \quad => \quad R_{2,3,4,6,7} = R_6 + R_{2,3,4} + R_7 \quad =>$$

$$R_{1,2,3,4,5,6,7,8} = \frac{1}{\frac{1}{R_{2,3,4,6,7}} + \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_1 + R_5}} \quad => \quad R_{eq} = R_{1,2,3,4,5,6,7,8} + R_9 + R_{10}$$

En remettant toutes ces équations ensembles, la formule générale obtenues est :

$$R_{eq} = R_9 + R_{10} + \frac{1}{\frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_1 + R_5} + \frac{1}{R_6 + R_7 + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2 + R_4}}}} =$$

$$= 9 + 10 + \frac{1}{\frac{1}{8} + \frac{1}{1+5} + \frac{1}{6 + 7 + \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2+4}}}} = 21{,}8[\Omega] \quad => \quad I_{tot} = \frac{U}{R_{eq}} = \frac{500[V]}{21{,}8[\Omega]} = 22{,}95[A]$$

$$U_{AB} = U_{tot} - U_9 - U_{10} = U_{tot} - R_9 I_{tot} - R_{10} I_{tot} = 63{,}95\ [V]$$

$$R_{2,3,4,6,7} = 15[\Omega] \quad => \quad I_6 = \frac{U_{AB}}{R_{2,3,4,6,7}} = \frac{63{,}95}{15} = 4{,}26[A]\ (= I_7)$$

$$U_{EF} = U_{AB} - U_6 - U_7 = U_{AB} - R_6 I_6 - R_7 I_7 = 8{,}53[V] \quad => \quad I_2 = \frac{U_{EF}}{R_{2,4}} = \frac{8{,}53}{6} = 1{,}42[A]$$

$$\left.\begin{array}{l} U_{DF} = R_4 I_2 = 5{,}68\ [V] \\ U_{FB} = R_7 I_7 = 29{,}82\ [V] \end{array}\right\} U_{DB} = U_{DF} + U_{FB} = 35{,}5\ [V]$$

11. $$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}} = \frac{1}{\frac{1}{10+5} + \frac{1}{2+18}} = \frac{1}{\frac{1}{15} + \frac{1}{20}} = \frac{60}{4+3} = 8{,}57[\Omega]$$

$$U_0 = R\,I = 60[V] \quad => \quad I_{1,2} = \frac{U}{R_{1,2}} = \frac{60[V]}{15[\Omega]} = 4[A] \quad \text{et} \quad I_{3,4} = \frac{U}{R_{3,4}} = \frac{60[V]}{20[\Omega]} = 3[A]$$

$U_1 = R_1 I_{1,2} = 40[V]$, $U_2 = 20[V]$, $U_3 = 6[V]$ et $U_4 = 54[V]$

=> $U_{AB} = U_1 - U_3 = 34[V]$