

- 1) La variable aléatoire  $X =$  "nombre de six obtenus en 10 lancers de dé".  $X$  varie entre 0 et 10.  
En un lancer, la probabilité d'obtenir un six est de  $1/6$ .  
 $X$  suit une variable aléatoire binomiale  $B(n = 10, p = 1/6)$

1.1 Probabilité de n'obtenir aucun six =  $P(X = 0) = C_0^{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0,1615 = 16,15\%$

1.2 Probabilité d'obtenir un six =  $P(X = 1) = C_1^{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 = 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 = 0,3230 = 32,30\%$

1.3 Probabilité d'obtenir deux six =  $P(X = 2) = C_2^{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 = 45 \cdot \frac{1}{36} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 = 0,2907 = 29,07\%$

1.4 Probabilité d'obtenir trois six =  $P(X = 3) = C_3^{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 120 \cdot \frac{1}{216} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0,1550 = 15,50\%$

1.5 Probabilité d'obtenir au moins trois six =  $1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - 0,1615 - 0,3230 - 0,2907 = 0,2248 = 22,48\%$

Vous avez moins de une chance sur 4 d'obtenir 3 six en lançant 10 fois un dé.

- 2) La variable aléatoire  $X =$  "nombre de réponses justes, sur les neuf questions".  $X$  varie entre 0 et 9.  
Pour chaque question, il y a une chance sur 4 de répondre juste par hasard.  
 $X$  suit une variable aléatoire binomiale  $B(n = 9, p = 1/4)$

La probabilité d'avoir plus de la moitié de réponse juste =

$$P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) =$$

$$C_5^9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 + C_6^9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + C_7^9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_8^9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + C_9^9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 =$$

$$P(X \geq 5) \approx 0,03893 + 0,00865 + 0,00124 + 0,000103 + 0,0000038 \approx 0,0489 \approx 4,89\% \leq 5\%$$

En répondant au hasard, l'étudiant a moins d'une chance sur 20 d'avoir plus de la moitié des réponses justes !!!

- 3) La variable aléatoire  $X =$  "nombre de "pile" obtenu, sur 100 lancers".  $X$  varie entre 0 et 100.

Lors de chaque lancer,  $P(P) = \frac{1}{2}$ .  $X$  suit une variable aléatoire binomiale  $B(n = 100, p = 1/2)$

- 3.1 Assez naturellement, on obtient en moyenne 50 piles =  $E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0,5 = 50$  formule binomiale !

- 3.2 La moyenne des écarts algébriques à 50 du nombre de pile obtenus donne 0. C'est justement ce qui caractérise la moyenne ! En fait, les écarts positifs compensent exactement les écarts négatifs.

On pourrait calculer la moyenne des valeurs absolues des écarts à 50 du nombre de pile obtenus.

Ce n'est pas habituel et ce serait très fastidieux. Le résultat est :

$$50 \cdot P(X = 0) + 49 \cdot P(X = 1) + 48 \cdot P(X = 2) + \dots + 1 \cdot P(X = 49) + 0 \cdot P(X = 50) + 1 \cdot P(X = 51) + \dots + 48 \cdot P(X = 98) + 49 \cdot P(X = 99) + 50 \cdot P(X = 100) \approx 3,979$$

**Il est en revanche facile de calculer l'écart quadratique moyen =  $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 5$ .**

- 3.3 La probabilité d'obtenir entre 45 et 55 "pile" vaut :

$$C_{45}^{100} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{45} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{55} + C_{46}^{100} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{46} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{54} + \dots + C_{55}^{100} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{55} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{45} =$$

$$\frac{1}{2^{100}} \cdot [C_{45}^{100} + C_{46}^{100} + C_{47}^{100} + C_{48}^{100} + C_{49}^{100} + C_{50}^{100} + C_{51}^{100} + C_{52}^{100} + C_{53}^{100} + C_{54}^{100} + C_{55}^{100}] \approx 72,875\%.$$

- 3.4 La probabilité d'obtenir entre 40 et 60 "pile" vaut :

$$\frac{1}{2^{100}} \cdot [C_{40}^{100} + C_{41}^{100} + \dots + C_{59}^{100} + C_{60}^{100}] \approx 96,48\%.$$

Il y a peu de chances de s'écarter de plus de deux écarts types de la moyenne.

- 4) La variable aléatoire  $X =$  "nombre de six obtenus en  $n$  lancers de dé".  $n$  est inconnu.  
La probabilité d'obtenir un six est de  $1/6$ .  $X$  suit une variable aléatoire binomiale  $B(n, p = 1/6)$   
Probabilité d'obtenir au moins un six =  $1 -$  probabilité de n'obtenir aucun six.  
On veut :  $1 - P(X = 0) > 0,99$ , c'est-à-dire :

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,99 \Leftrightarrow 0,01 > \left(\frac{5}{6}\right)^n \Leftrightarrow \log(0,01) > n \cdot \log\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$\text{Donc : } n > \frac{\log(0,01)}{\log(5/6)} \approx 25,26. \text{ (On a divisé par un nombre négatif, ce qui a changé le sens de l'inégalité)}$$

Conclusion, il faut lancer au moins 26 fois un dé pour avoir plus de 99% de chances d'obtenir au moins un six.

- 5) Problème du Chevalier de Méré ( posé en 1654 à Blaise Pascal ) :  
Probabilité d'obtenir au moins un six en 4 lancers de un dé =

$$1 - \text{Prob}(\text{aucun six en 4 lancers}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,5177$$

$$\text{Probabilité d'obtenir un double-six en un lancer de deux dés} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$\text{Probabilité de ne pas obtenir un double-six en un lancer de deux dés} = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

Probabilité d'obtenir au moins un double-six en 24 lancers de deux dés =

$$1 - \text{Prob}(\text{aucun double-six en 24 lancers}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4914$$

**Il est donc moins probable d'obtenir un « double-six » en 24 lancers de deux dés, qu'un « six » en 4 lancers d'un dé.**

$$\text{Mais essayons un lancer supplémentaire : } 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25} \approx 0,5055.$$

**Ainsi, lancer les deux dés au moins 25 fois permet d'avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir un double-six.**

- 6.1  $P(2 \text{ As}) =$  le nombre de possibilités de tirer deux As parmi 4, divisé par le nombre de possibilités de tirer deux cartes parmi 52 :  $P(2 \text{ As}) = \frac{C_2^4}{C_2^{52}} \approx 0,004525 \approx 0,4525\%$ .

- 6.2 La variable aléatoire  $X =$  "nombre de mains ayant 2 As en 10 parties".  $X$  varie entre 0 et 10.  
En une partie, la probabilité d'obtenir une main de 2 As =  $p \approx 0,004525$ .  
 $X$  suit une variable aléatoire binomiale  $B(n = 10, p \approx 0,004525)$

Probabilité d'obtenir au moins une fois deux As, sur 10 parties =

$$1 - P(X = 0) \approx 1 - (1 - 0,004525)^{10} \approx 0,0443 \approx 4,43\%.$$

Même sur 10 parties, il y a peu de chances d'obtenir une main de 2 As.

- 6.3 La variable aléatoire  $X =$  "nombre de mains ayant 2 As en  $n$  parties".  $n$  est inconnu.  
 $X$  suit une variable aléatoire binomiale  $B(n, p \approx 0,004525)$

Probabilité d'obtenir au moins une fois deux As, sur  $n$  parties =  $1 - P(X = 0) \approx 1 - (1 - 0,004525)^n$ .

On veut :  $1 - (1 - 0,004525)^n > 0,5$ . Donc  $0,5 > (1 - 0,004525)^n \Leftrightarrow \log(0,5) > n \cdot \log(0,995475)$

$$\text{Donc : } n > \frac{\log(0,5)}{\log(0,995475)} \approx 152,8. \text{ (On a divisé par un nombre négatif, ce qui a changé le sens de l'inégalité)}$$

Il faut jouer au moins 153 parties, pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir une main de 2 As.