1) La variable aléatoire X = "nombre de six obtenus en 10 lancés de dé". X varie entre 0 et 10.
En un lancé, la probabilité d'obtenir un six est de 1/6.
X suit une variable aléatoire binomiale B(n = 10, p = 1/6)

1.1 Probabilité de n'obtenir aucun six = P(X = 0) = $C_0^{10}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{10}=\left(\frac{5}{6}\right)^{10}=0{,}1615=16{,}15\%$

1.2 Probabilité d'obtenir un six = P(X = 1) = $C_1^{10}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{9}=10\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{9}=0{,}3230=32{,}30\%$

1.3 Probabilité d'obtenir deux six = P(X = 2) = $C_2^{10}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{8}=45\cdot\frac{1}{36}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{8}=0{,}2907=29{,}07\%$

1.4 Probabilité d'obtenir trois six = P(X = 3) = $C_3^{10}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{7}=120\cdot\frac{1}{216}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{7}=0{,}1550=15{,}50\%$

1.5 Probabilité d'obtenir au moins trois six = 1 − P(X = 0) − P(X = 1) − P(X = 2) =
1 − 0,1615 − 0,3230 − 0,2907 = 0,2248 = 22,48%
Vous avez moins de une chance sur 4 d'obtenir 3 six en lançant 10 fois un dé.

---

2) La variable aléatoire X = "nombre de réponses justes, sur les neuf questions".". X varie entre 0 et 9.
Pour chaque question, il y a une chance sur 4 de répondre juste par hasard.
X suit une variable aléatoire binomiale B(n = 9, p = 1/4)
La probabilité d'avoir plus de la moitié de réponse juste =
P($X\geq 5$) = $P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)=$

$$C_5^9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4+C_6^9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3+C_7^9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+C_8^9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^8\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1+C_9^9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^9\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0=$$

P($X\geq 5$) ≈ 0,03893 + 0,00865 + 0,00124 + 0,000103 + 0,0000038 ≈ 0,0489 ≈ 4,89 % ≤ 5%
En répondant au hasard, l'étudiant a moins d'une chance sur 20 d'avoir plus de la moitié des réponses justes !!!

---

3) La variable aléatoire X = "nombre de "pile" obtenu, sur 100 lancés". X varie entre 0 et 100.
Lors de chaque lancé, $P(pile)=\frac{1}{2}$. X suit une variable aléatoire binomiale B(n = 100, p = ½)

3.1 Assez naturellement, on obtient en moyenne 50 piles = E(X) = $n\cdot p$ = 100 · 0,5 = 50 **formule binomiale !**

3.2 La moyenne des écarts algébriques à 50 du nombre de pile obtenus donne 0. C'est justement ce qui caractérise la moyenne ! En fait, les écarts positifs compensent exactement les écarts négatifs.
On pourrait calculer la moyenne des valeurs absolues des écarts à 50 du nombre de pile obtenus.
Ce n'est pas habituel et ce serait très fastidieux. Le résultat est :
50 · P(X = 0) + 49 · P(X = 1) + 48 · P(X = 2) + ... + 1 · P(X = 49) + 0 · P(X = 50) + 1 · P(X = 51) + ... + 48 · P(X = 98) + 49 · P(X = 99) + 50 · P(X = 100)
≈ 3,979
Il est en revanche facile de calculer l'écart quadratique moyen = $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{100\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}=5$.

3.3 La probabilité d'obtenir entre 45 et 55 "pile" vaut :

$$C_{45}^{100}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{45}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{55}+C_{46}^{100}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{46}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{54}+\ldots+C_{55}^{100}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{55}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{45}=$$

$$\frac{1}{2^{100}}\cdot\left[C_{45}^{100}+C_{46}^{100}+C_{47}^{100}+C_{48}^{100}+C_{49}^{100}+C_{50}^{100}+C_{51}^{100}+C_{52}^{100}+C_{53}^{100}+C_{54}^{100}+C_{55}^{100}\right]\approx 72{,}875\%.$$

3.4 La probabilité d'obtenir entre 40 et 60 "pile" vaut :

$$\frac{1}{2^{100}}\cdot\left[C_{40}^{100}+C_{41}^{100}+\ldots+C_{59}^{100}+C_{60}^{100}\right]\approx 96{,}48\%.$$

Il y a peu de chances de s'écarter de plus de deux écarts types de la moyenne.

4) La variable aléatoire X = "nombre de six obtenus en n lancés de dé". n est inconnu.
La probabilité d'obtenir un six est de 1/6. X suit une variable aléatoire binomiale B(n, p = 1/6)
Probabilité d'obtenir au moins un six = 1 − probabilité de n'obtenir aucun six.
On veut : $1-P(X=0)>0{,}99$, c'est-à-dire :

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>0{,}99 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}01>\left(\frac{5}{6}\right)^n \quad\Leftrightarrow\quad \log(0{,}01)>n\cdot\log\left(\frac{5}{6}\right)$$

Donc : $n>\dfrac{\log(0{,}01)}{\log(5/6)}\approx 25{,}26$. (On a divisé par un nombre négatif, ce qui a changé le sens de l'inégalité)

Conclusion, il faut lancer au moins 26 fois un dé pour avoir plus de 99% de chances d'obtenir au moins un six.

---

5) Problème du Chevalier de Méré (posé en 1654 à Blaise Pascal) :
Probabilité d'obtenir au moins un six en 4 lancés de un dé =

$$1 - \text{P(aucun six en 4 lancés)} = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\approx 0{,}5177$$

Probabilité d'obtenir un double–six en un lancé de deux dés = $\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$

Probabilité de ne pas obtenir un double–six en un lancé de deux dés = $1-\dfrac{1}{36}=\dfrac{35}{36}$

Probabilité d'obtenir au moins un double–six en 24 lancés de deux dés =

$$1 - \text{P(aucun double–six en 24 lancés)} = 1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}\approx 0{,}4914$$

Il est donc moins probable d'obtenir un « double–six » en 24 lancés de deux dés, qu'un « six » en 4 lancés d'un dé.

Mais essayons un lancé supplémentaire : $1-\left(\dfrac{35}{36}\right)^{25}\approx 0{,}5055$.

Ainsi, lancer les deux dés au moins 25 fois permet d'avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir un double–six.

6.1 P (2 As) = le nombre de possibilités de tirer deux As parmi 4, divisé par le nombre de possibilités de tirer deux cartes parmi 52 : P (2 As) $=\dfrac{C_2^4}{C_2^{52}}\approx 0{,}004525\approx 0{,}4525\%$.

6.2 La variable aléatoire X = "nombre de mains ayant 2 As en 10 parties". X varie entre 0 et 10.
En une partie, la probabilité d'obtenir une main de 2 As = $p\approx 0{,}004525$.
X suit une variable aléatoire binomiale B(n = 10, $p\approx 0{,}004525$)

Probabilité d'obtenir au moins une fois deux As, sur 10 parties =
$1-P(X=0)\approx 1-(1-0{,}004525)^{10}\approx 0{,}0443\approx 4{,}43\%$.
Même sur 10 parties, il y a peu de chances d'obtenir une main de 2 As.

6.3 La variable aléatoire X = "nombre de mains ayant 2 As en n parties". n est inconnu.
X suit une variable aléatoire binomiale B(n, $p\approx 0{,}004525$)

Probabilité d'obtenir au moins une fois deux As, sur n parties $=1-P(X=0)\approx 1-(1-0{,}004525)^n$.
On veut : $1-(1-0{,}004525)^n>0{,}5$. Donc $0{,}5>(1-0{,}004525)^n \quad\Leftrightarrow\quad \log(0{,}5)>n\cdot\log(0{,}995475)$

Donc : $n>\dfrac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}995475)}\approx 152{,}8$. (On a divisé par un nombre négatif, ce qui a changé le sens de l'inégalité)

Il faut jouer au moins 153 parties, pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir une main de 2 As.