1)

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,4	0,15	0,15

1.1) $P(1 \le X \le 3) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = 0,2+0,4+0,15 = 0,75$

1.2) $P(X \ge 2) = P(X=2)+P(X=3)+P(X=4) = 0,4+0,15+0,15 = 0,7$

1.3) $P(X = 4 \mid X \ge 2) = \dfrac{P(X=4)}{P(X \ge 2)} = \dfrac{0,15}{0,7} = \dfrac{15}{70} = \dfrac{3}{14} \approx 21,43\%$

1.4) $P(X = 2 \mid X \ne 4) = \dfrac{P(X=2)}{P(X \ne 4)} = \dfrac{0,4}{1-0,15} = \dfrac{0,4}{0,85} = \dfrac{40}{85} = \dfrac{8}{17} \approx 47,06\%$

---

2)

$\text{Card}(U) = 2^5$

P(FFFFF) = $\dfrac{1}{32}$

P(PPPPP) = $\dfrac{1}{32}$

P(mix de F et P) = $1 - \dfrac{2}{32} = \dfrac{30}{32} = \dfrac{15}{16}$

X	30	-2
$P(X)$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{15}{16}$

$E(X) = 30 \cdot \dfrac{1}{16} + (-2) \cdot \dfrac{15}{16} = 0$

En moyenne, le gain potentiel et la perte potentielle sont égaux. Le jeu est équilibré.

---

3) P(gain de un million de francs) = $\dfrac{1}{2^{14}} = \dfrac{1}{16'384}$

P(perte de 1 franc) = $1 - \dfrac{1}{2^{14}} = 1 - \dfrac{1}{16'384} = \dfrac{16'383}{16'384}$

$E(X) = 1'000 \cdot \dfrac{1}{16'384} + (-1) \cdot \dfrac{16'383}{16'384} = -\dfrac{15'383}{16'384} \approx -0,9389$

X	1'000	-1
$P(X)$	$\dfrac{1}{16'384}$	$\dfrac{16'383}{16'384}$

En moyenne vous êtes perdant, mais vous perdez peu, tandis que si vous gagnez, le gain est élevé. Presque tous les jeux de hasard sont basés sur ce principe.

---

4) Gain moyen =
$-30 + \dfrac{1}{2} \cdot 2 + \dfrac{1}{4} \cdot 4 + \dfrac{1}{8} \cdot 8 + ... + \dfrac{1}{2^{29}} \cdot 2^{29} + \dfrac{1}{2^{29}} \cdot 2^{29} = 0$
Le jeu est équilibré !

X	2	4	8	16	...	2^{n-1}	2^{28}	2^{29}
$P(X)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{16}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{2^n}$	$\dfrac{1}{2^{28}}$	$\dfrac{2}{2^{29}}$

4.1) A partir de 5 faces de suites, l'élève gagne 32 francs, soit plus que sa taxe de participation.

4.2) En théorie, le jeu est équilibré et l'élève a des chances (faibles) de gagner beaucoup. Pratiquement, le professeur ne pourra pas payer dans le cas peu probable d'une très longue série de face et donc le jeu est irréaliste.

5.) Loi de probabilité de la variable aléatoire X = "nombre de pile obtenu lors de 5 jets d'une pièce".

X varie entre 0 et 5. $\text{Card}(U) = 2^5$ C'est la loi « binomiale » $B\left(5;\frac{1}{2}\right)$.

Avec aucun pile, P(FFFFF) = $\frac{1}{2^5}$

Avec un seul P qui peut sortir à n'importe lequel des 5 lancers, P(PFFFF) = $\frac{5!}{(5-1)!1!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$

Avec deux P qui peuvent sortir à n'importe lesquels des 5 lancers, P(PPFFF) = $\frac{5!}{(5-2)!2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$

Avec trois P qui peuvent sortir à n'importe lesquels des 5 lancers, P(PPPFF) = $\frac{5!}{(5-3)!3!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$

Et ainsi de suite …

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

<u>Espérance mathématique de X :</u>

E(X) = $\frac{1}{32}\cdot$(0 · 1 + 1 · 5 + 2 · 10 + 3 · 10 + 4 · 5 + 5 · 1) = $\frac{80}{32}$= 2,5

Ce résultat était attendu. Par symétrie, la moitié des lancers tombe sur pile, donc E(X) = $\frac{1}{2}\cdot 5$.

<u>Variance de X :</u>

V(X) = $(0-2{,}5)^2\cdot\frac{1}{32} + (1-2{,}5)^2\cdot\frac{5}{32} + (2-2{,}5)^2\cdot\frac{10}{32} + (3-2{,}5)^2\cdot\frac{10}{32} + (4-2{,}5)^2\cdot\frac{5}{32} + (5-2{,}5)^2\cdot\frac{1}{32}$

V(X) = 40 / 32 = 1,25

<u>Ecart type de X</u> : σ(X) = $\sqrt{1{,}25} \approx 1{,}118$