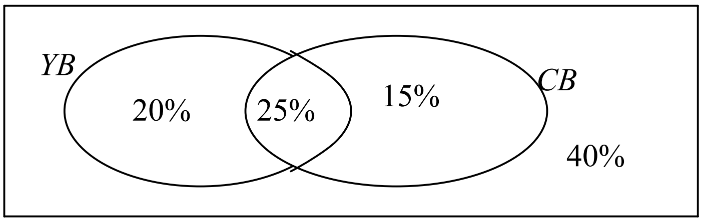
1. Notons : CB = "avoir les cheveux blonds", $\overline{CB}$ = "ne pas avoir les cheveux blonds",
YB = "avoir les yeux bleus", $\overline{YB}$ = "ne pas avoir les yeux bleus".

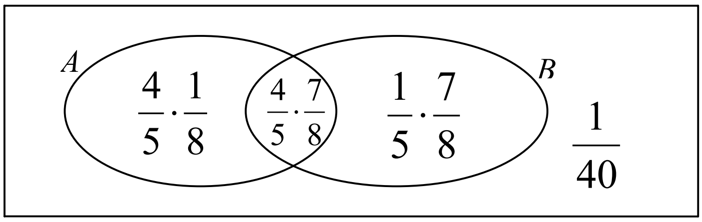


1.1 $P(\text{Yeux bleus} \mid \text{Cheveux blonds}) = \dfrac{P(Y.b \cap Ch.b)}{P(Ch.b)} = \dfrac{25}{40} = 62{,}5\%$.

1.2 $P(\text{Pas les cheveux blonds} \mid \text{Yeux bleus}) = \dfrac{P(\overline{Ch.b} \cap Y.b)}{P(Y.b)} = \dfrac{20}{45} \approx 44{,}44\%$

---

2. Notons : A = "A atteint la cible", $\overline{A}$ = "A n'atteint pas la cible",
Notons : B = "B atteint la cible", $\overline{B}$ = "B n'atteint pas la cible".



2.1 $P(A \cap B) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{7}{8} = \dfrac{28}{40} = 70\%$

2.2 $P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{4}{40} = 10\%$

2.3 $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{40} = 2{,}5\%$

2.4 $P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A}) = \dfrac{28}{40} + \dfrac{4}{40} + \dfrac{7}{40} = \dfrac{39}{40} = 97{,}5\%$

Ou : $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \dfrac{1}{40} = \dfrac{39}{40} = 97{,}5\%$ ou encore $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \ldots$

2.5 $P\left((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\right) = \dfrac{4}{40} + \dfrac{7}{40} = \dfrac{11}{40} = 27{,}5\%$ **Addition des probabilités d'événements incompatibles**

---

3. $U = \{GG; GF; FG; FF\}$

Cet exercice se prête bien à une restriction de l'univers, mais on peut aussi appliquer la définition de la probabilité conditionnelle.

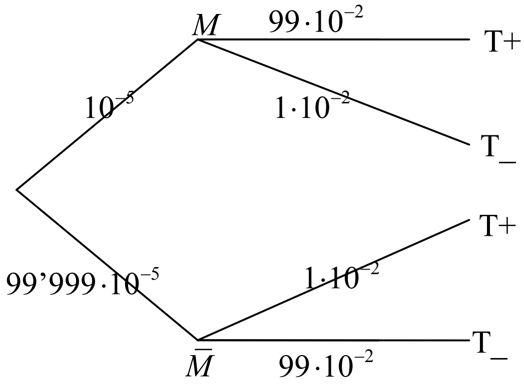
3.1 $P(GG \mid \text{aîné = G}) = \dfrac{Card\{GG\}}{Card\{GG\,;\,GF\}} = \dfrac{1}{2}$. Cette valeur est assez intuitive, car il n'y a une chance sur deux que le cadet soit un garçon.

3.2 $P(GG \mid \text{un enfant} = G) = \dfrac{Card\{GG\}}{Card\{GG\,;\,GF\,;\,FG\}} = \dfrac{1}{3}$. **Surprenant de ne pas trouver la même réponse en 3.1 et 3.2**

En fait, c'est le changement de restriction d'univers qui modifie la réponse !

---

4. Notons : M = "être atteint de la maladie", $\overline{M}$ = "ne pas être atteint de la maladie",
$T+$ = "le test est positif", $T-$ = "le test est négatif".



4.1 $P(M\,|\,T+)=\dfrac{P(M\cap T+)}{P(T+)}=\dfrac{99\cdot10^{-5}\cdot10^{-2}}{99\cdot10^{-5}\cdot10^{-2}+99'999\cdot10^{-5}\cdot10^{-2}}=\dfrac{99}{99+99'999}\approx$

$0{,}000989\approx0{,}0989\%\approx0{,}1\%$

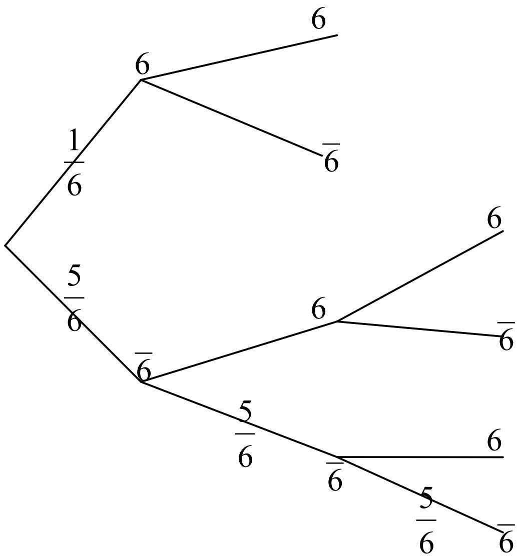
Quoique le test se soit révélé positif, la personne a seulement presque une chance sur mille d'être atteinte de la maladie ! Mais c'est quand même 100 fois plus probable que pour une autre personne de la population qui n'a pas fait le test !

4.2 $P(M\,|\,T-)=\dfrac{P(M\cap T-)}{P(T-)}=\dfrac{1\cdot10^{-5}\cdot10^{-2}}{1\cdot10^{-5}\cdot10^{-2}+99'999\cdot99\cdot10^{-5}\cdot10^{-2}}=\dfrac{1}{1+99\cdot99'999}\approx0{,}0000001\approx1\cdot10^{-7}$

Si le test est négatif, la personne a environ une chance sur 10 millions d'être atteinte de la maladie !

---

5. Les résultats des lancers de dés sont indépendants les uns des autres.



P("au moins un 6 en n lancers") =

1 – P("aucun 6 en n lancers") = $1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

On veut :

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>\frac{3}{4}\iff 1-\frac{3}{4}>\left(\frac{5}{6}\right)^n\iff$$

$$\log\left(\frac{1}{4}\right)>n\cdot\log\left(\frac{5}{6}\right)\iff$$

$$\frac{\log(0{,}75)}{\log(5/6)}\approx7{,}6<n$$

Si on divise une inéquation par un négatif, il faut en changer le sens !

Il faut donc lancer le dé 8 fois ou plus, pour avoir plus de 3/4 de chances d'avoir au moins un 6.

6. Les résultats des tirs sont indépendants les uns des autres. Il rate la cible 2 fois sur 3 : $P(\overline{succès}) = \frac{2}{3}$.

P("au moins un succès en n tirs") = 1 – P("aucun succès en n tirs") = $1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

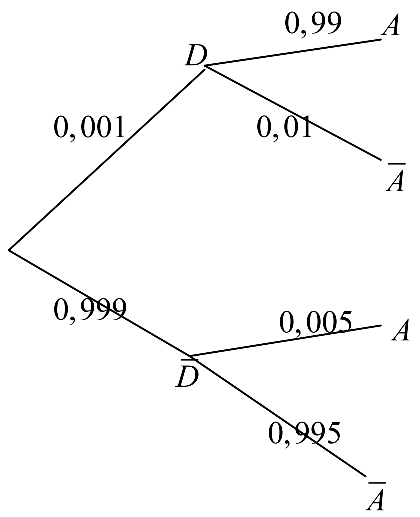
On veut :

$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n > \frac{99}{100} \Leftrightarrow 1-\frac{99}{100} > \left(\frac{2}{3}\right)^n \Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{100}\right) > n\cdot\log\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{\log(1/100)}{\log(2/3)} \approx 11,36 < n$

Il doit donc tirer 12 fois ou plus, pour avoir plus de 99% de chances d'avoir atteint au moins une fois la cible.

---

7. Notons : D = "il y a un danger", $\overline{D}$ = "il n'y a pas de danger",
A = "l'alarme se déclenche", $\overline{A}$ = "l'alarme ne se déclenche pas".



$$P(\overline{D}\mid A) = \frac{5\cdot 0,999\cdot 10^{-3}}{0,99\cdot 10^{-3}+5\cdot 0,999\cdot 10^{-3}} = \frac{5\cdot 0,999}{0,99+5\cdot 0,999} \approx 0,8346 \approx 83,46\%.$$

Cet exercice illustre le fait que des alarmes se déclenchent fréquemment lorsqu'il n'y a aucun danger !

---

8. Ce problème amusant est laissé à votre réflexion...