1. Un tableau aide :

Notons : $Ch.b$ = "avoir les cheveux blonds", $\overline{Ch.b}$ = "ne pas avoir les cheveux blonds",
$Y.b$ = "avoir les yeux bleus", $\overline{Y.b}$ = "ne pas avoir les yeux bleus".
Un tableau aide beaucoup.

	$Ch.b$	$\overline{Ch.b}$	total
$Y.b$	**25%**	20%	**45%**
$\overline{Y.b}$	15%	40%	55%
total	**40%**	**60%**	**100%**

1.1 $P(\text{Yeux bleux} \mid \text{Cheveux blonds}) = \dfrac{P(Y.b \cap Ch.b)}{P(Ch.b)} = \dfrac{25}{40} = 62,5\%$.

1.2 $P(\text{Pas les cheveux blonds} \mid \text{Yeux bleux}) = \dfrac{P(\overline{Ch.b} \cap Y.b)}{P(Y.b)} = \dfrac{20}{45} \approx 44,44\%$

---

2. Notons : A = "A atteint la cible", $\overline{A}$ = "A n'atteint pas la cible",
Notons : B = "B atteint la cible", $\overline{B}$ = "B n'atteint pas la cible".
Un tableau aide beaucoup.

A et B sont indépendants, donc
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

	A	$\overline{A}$	total
B	**4/5·7/8**	1/5·7/8	**7/8**
$\overline{B}$	4/5·1/8	1/5·1/8	1/8
total	**4/5**	1/5	**1**

2.1 $P(A \cap B) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{7}{8} = \dfrac{28}{40} = 70\%$

2.2 $P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{4}{40} = 10\%$

2.3 $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{40} = 2,5\%$

2.4 $P(A \cup B) = \dfrac{28}{40} + \dfrac{4}{40} + \dfrac{7}{40} = \dfrac{39}{40} = 97,5\%$ Autre : $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \dfrac{1}{40} = \dfrac{39}{40} = 97,5\%$

2.5 $P\left((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\right) = \dfrac{4}{40} + \dfrac{7}{40} = \dfrac{11}{40} = 27,5\%$ **Addition des probabilités d'événements incompatibles**

---

3. $U = \{GG; GF; FG; FF\}$

Cet exercice se prête bien à une restriction de l'univers, mais on peut aussi appliquer la définition de la probabilité conditionnelle.

3.1 $P(GG \mid \text{aîné = G}) = \dfrac{Card\ \{GG\}}{Card\ \{GG\ ;GF\}} = \dfrac{1}{2}$. Cette valeur est assez intuitive, car il n'y a une chance sur deux que le cadet soit un garçon.

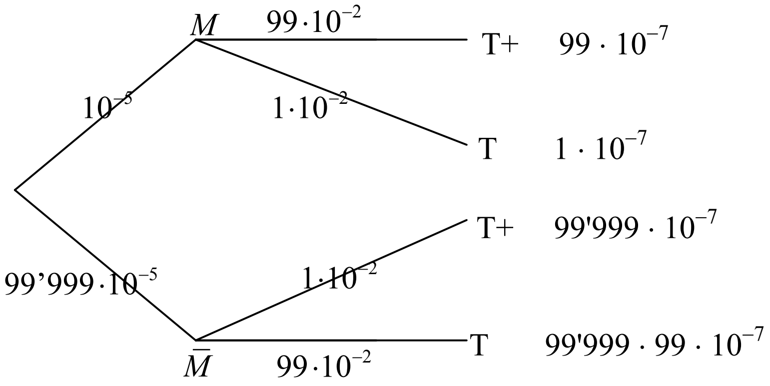
3.2 $P(GG \mid \text{cadet = G}) = \dfrac{Card\ \{GG\}}{Card\ \{GG\ ;FG\}} = \dfrac{1}{2}$. Cette valeur est assez intuitive, car il n'y a une chance sur deux que l'aîné soit un garçon.

3.3 $P(GG \mid \text{un enfant} = G) = \dfrac{Card\ \{GG\}}{Card\ \{GG\ ;GF\ ;FG\}} = \dfrac{1}{3}$.

Cette valeur est surprenante, car on pourrait raisonner ainsi : "soit l'enfant qui est le garçon est l'aîné et dans ce cas la probabilité vaut une demi, soit l'enfant qui est le garçon est le cadet et dans ce cas, la probabilité est de nouveau une demi. Dans les deux cas la probabilité est de une demi, donc on peu penser que le résultat final est une probabilité de une demi." En fait, c'est le changement de restriction d'univers qui modifie la réponse !

---

4. Notons : M = "être atteint de la maladie", $\bar{M}$ = "ne pas être atteint de la maladie",
$T+$ = "le test est positif", $T-$ = "le test est négatif".
Un arbre et/ou un tableau aident beaucoup.



	M	$\bar{M}$	total
$T+$	$\mathbf{\frac{1}{10^5}\cdot\frac{99}{100}}$	$\frac{99'999}{10^5}\cdot\frac{1}{100}$	$\frac{99+99'999}{10^5\cdot100}$
$T-$	$\frac{1}{10^5}\cdot\frac{1}{100}$	$\mathbf{\frac{99'999}{10^5}\cdot\frac{99}{100}}$	$\frac{1+99'999\cdot99}{10^5\cdot100}$
total	$\mathbf{\frac{1}{10^5}}$	$\mathbf{\frac{99'999}{10^5}}$	**1**

4.1 L'énoncé nous donne la probabilité conditionnelle que le test soit positif si la personne est atteinte de la maladie et la probabilité conditionnelle que le test soit négatif si la personne n'est pas atteinte de la maladie. Le théorème de Bayes permet de calculer la probabilité d'être atteinte de la maladie, sachant que le test est positif. Le tableau permet une lecture immédiate.

$$P(M\mid T+)=\frac{P(M\cap T+)}{P(T+)}=\frac{\frac{1}{10^5}\cdot\frac{99}{100}}{\frac{99+99'999}{10^5\cdot100}}=\frac{99}{100'098}\approx 0{,}0989\%\,.$$

Malgré que le test se soit révélé positif, la personne à moins d'une chance sur mille d'être atteinte de la maladie. C'est quand même 100 fois plus de chance qu'une autre personne prise au hasard !

4.2 $$P(M\mid T-)=\frac{P(M\cap T-)}{P(T-)}=\frac{\frac{1}{10^5}\cdot\frac{1}{100}}{\frac{99+99'999}{10^5\cdot100}}=\frac{1}{1+99'999\cdot99}=\frac{1}{9'899'902}\approx\frac{1}{10'000'000}\,.$$

Si le test est négatif, la personne a environ une chance sur 10 millions d'être atteinte de la maladie !

---

5. Il faut se rendre compte que les lancers de dés sont indépendants.
Donc : P(pas 6 au 1^{er} lancer <u>et</u> pas 6 au $2^{\text{ème}}$ <u>et</u> pas 6 au $3^{\text{ème}}$ <u>et</u> ...) =
P(pas 6 au 1^{er} lancer) · P(pas 6 au $2^{\text{ème}}$) · P(pas 6 au $3^{\text{ème}}$) · ... = (5/6) · (5/6) · (5/6) · ...

P("au moins un 6 en n lancers") = 1 – P("aucun 6 en n lancers") = $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

On veut : $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>\frac{3}{4}\iff\frac{1}{4}>\left(\frac{5}{6}\right)^n\iff\log\left(\frac{1}{4}\right)>n\cdot\log\left(\frac{5}{6}\right)\iff n>\frac{\log(1/4)}{\log(5/6)}\approx 7{,}6$

Si on divise une inéquation par un négatif, il faut en changer le sens !

Il faut donc lancer le dé 8 fois ou plus, pour avoir plus de 3/4 de chances d'avoir au moins un 6.

---

6. Il faut se rendre compte que les tirs sont indépendants. Il rate la cible 2 fois sur 3.
Donc : *P*(raté au 1er tir et raté au 2ème et raté au 3ème et ...) =
P(raté au 1er tir) · *P*(raté au 2ème) · *P*(raté au 3ème) · ... = (2/3) · (2/3) · (2/3) · ...

P("au moins un succès en n tirs") = 1 – *P*("aucun succès en n tirs") = $1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

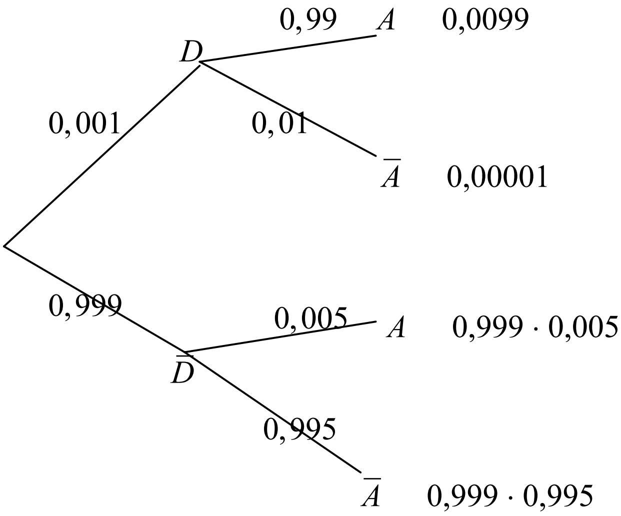
On veut :

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n > \frac{99}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{100} > \left(\frac{2}{3}\right)^n \Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{100}\right) > n\cdot\log\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow n > \frac{\log(1/100)}{\log(2/3)} \approx 11,36$$

Si on divise une inéquation par un négatif, il faut en changer le sens !

Il doit donc tirer 12 fois ou plus, pour avoir plus de 99% de chances d'avoir atteint au moins une fois la cible.

7. Notons : D = "il y a un danger", $\bar{D}$ = "il n'y a pas de danger",
A = "l'alarme se déclenche", $\bar{A}$ = "l'alarme ne se déclenche pas". Ceci pour chaque jour.
Un arbre et/ou un tableau aident beaucoup.



	D	$\bar{D}$	total
A	**0,001·0,99**	**0,999·0,005**	0,005985
$\bar{A}$	0,001·0,01	0,999·0,995	0,994015
total	**0,001**	**0,999**	**1**

L'énoncé nous donne la probabilité conditionnelle que l'alarme se déclenche un jour de danger.
Elle nous dit aussi la probabilité qu'elle se déclenche malgré qu'il n'y ait pas de danger ce jour.
Finalement on sait qu'il y a rarement un danger, seulement une fois sur 1'000 jours.
Le théorème de Bayes permet de calculer la probabilité qu'il n'y ait pas de danger malgré que l'alarme se déclenche. Le tableau permet une lecture immédiate.

$$P(\bar{D}\mid A) = \frac{P(\bar{D}\cap A)}{P(A)} = \frac{0,999\cdot 0,005}{0,005985} \approx 83,46\% .$$

Cet exercice illustre le fait que des alarmes se déclenchent fréquemment lorsqu'il n'y a aucun danger !

8. Ce problème amusant est laissé à votre réflexion...