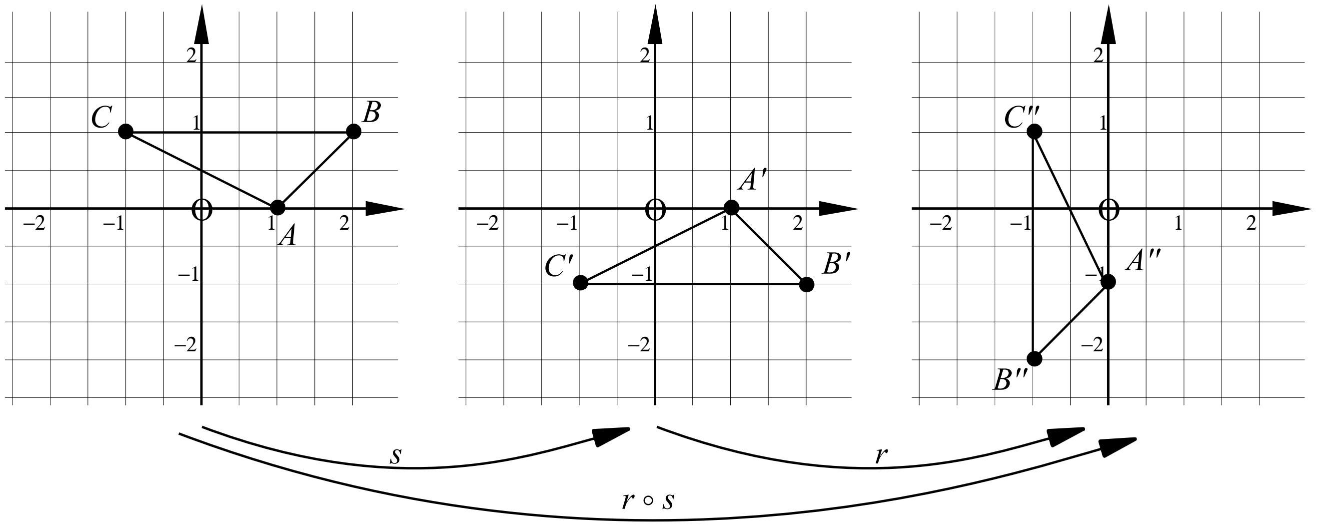
1.1

$M(r)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $M(s)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $M(r\circ s) = M(r)\cdot M(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1.2



1.3 L'image du triangle ABC par $r\circ s$ est égale au triangle du repère de droite, car l'image par $r\circ s$ est égale à l'image par r de l'image par s.

1.4 $M(s\circ r) = M(s)\cdot M(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice obtenue est différente de celle de $M(r\circ s)$, donc les transformations $r\circ s$ et $s\circ r$ ne sont pas identiques. $r\circ s$ est une symétrie orthogonale d'axe $y=-x$.

$s\circ r$ est une symétrie orthogonale d'axe $y=x$, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont échangés par $s\circ r$.

2.1 $M(r_{30}) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, $M(r_{60}) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2.2 $M(r_{30})\cdot M(r_{60}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3 $M(r_{30})\cdot M(r_{60})$ donne exactement la même matrice, car les rotations dans $\mathbb{R}^2$ sont commutatives.

2.4 $M(r_{90})$ est égale à la matrice obtenue ci-dessus, car une rotation de 90° correspond à effectuer une rotation de 60° suivit d'une rotation de 30°.

3.1 $M(r_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$; $M(r_\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$

3.2 $M(r_\alpha \circ r_\beta) = M(r_\alpha) \cdot M(r_\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} =$;

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

Les formules d'addition d'angles des fonctions trigonométriques ont été utilisées dans la dernière égalité. On retrouve comme attendu la matrice d'une rotation d'angle $\alpha+\beta$.

4.1 $f(\langle x\ ;\ y\rangle) = \langle 0{,}5\,x\ ;\ 2\,y\rangle$, donc $M(f)=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (la matrice n'est pas nécessaire).

La droite D d'équation $\boxed{y=1+x}$ passe par les points $A=\langle 0\ ;\ 1\rangle$ et $B=\langle 1\ ;\ 2\rangle$.

Les images par f de ces points sont : $A'=\langle 0\ ;\ 2\rangle$ et $B'=\langle 0{,}5\ ;\ 4\rangle$.

La pente de D' égale $\dfrac{4-2}{0{,}5-0} = 4$, l'ordonnée à l'origine est donnée par A'.

Donc l'équation de D' est $\boxed{y=2+4\,x}$.

4.2 Les images par f de A' et B' sont : $A''=\langle 0\ ;\ 4\rangle$ et $B''=\langle 0{,}25\ ;\ 8\rangle$.

La pente de D'' égale $\dfrac{8-4}{0{,}25-0} = 16$, l'ordonnée à l'origine est donnée par A''.

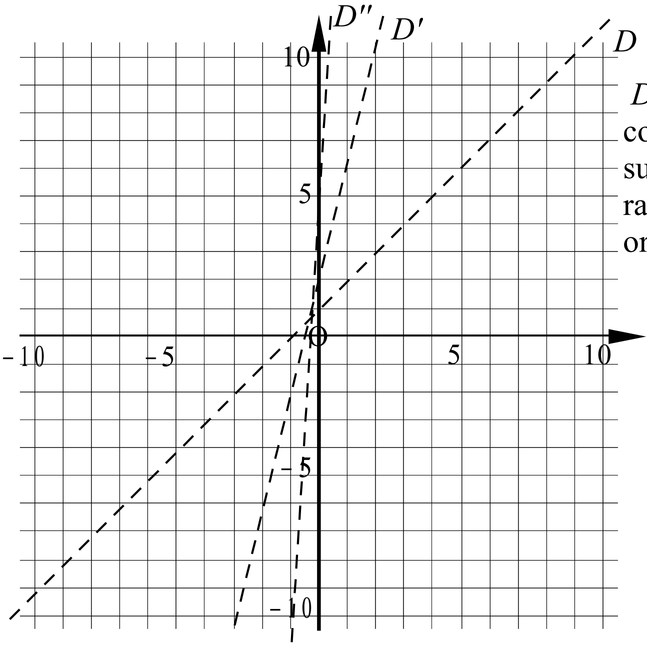
Donc l'équation de D'' est $\boxed{y=4+16\,x}$.

4.3 Les images par f de A'' et B'' sont : $A'''=\langle 0\ ;\ 8\rangle$ et $B'''=\langle 1/8\ ;\ 16\rangle$.

La pente de D''' égale $\dfrac{16-8}{1/8-0} = 64$, l'ordonnée à l'origine est donnée par A'''.

Donc l'équation de D''' est $\boxed{y=8+64\,x}$.

4.4 En continuant ainsi, on remarque que l'ensemble des droites obtenues sont exactement toutes celles qui s'écrivent sous la forme : $\boxed{y=2^n+4^n\,x}$ pour $n\in\mathbb{N}$.



D''' et les autres droites, sont presque confondues avec l'axe des ordonnées, sur ce graphique. Les droites se rapprochent de plus en plus de l'axe des ordonnées.

5.1 $M(f\circ g)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, donc

$(f\circ g)\langle x\ ;\ y\rangle=\sqrt{2}\cdot\langle x-y\ ;\ x+y\rangle$.

5.2 f correspond à une rotation de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre (inverse du sens trigo).

$M(g)=2\cdot\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$, qui correspond à une homothétie d'un facteur 2 composé avec une rotation de 180° – 45° = 135° dans le sens trigonométrique, l'ordre des deux transformations étant sans importance.

$f\circ g$ correspond à une homothétie d'un facteur 2 composé avec une rotation de 45° dans le sens trigonométrique, l'ordre des deux transformations étant sans importance. Ce résultat est normale, car il correspond à tout augmenter d'un facteur 2, puis à tourner de 135° puis à tourner de –90°.

6.1 $M(S_{60})=\begin{pmatrix} \cos(2\cdot 60°) & \sin(2\cdot 60°) \\ \sin(2\cdot 60°) & -\cos(2\cdot 60°) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $M(S_{90})=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$M(r_{-60})=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est similaire de la matrice calculée dans l'exercice 2.1.

6.2 $M(r_{-60}\circ S_{90})=M(r_{-60})\cdot M(S_{90})=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Cette matrice est bien égale à $M(S_{60})$, ce qui montre que $R_{-60}\circ S_{90}=S_{60}$.

Ceci montre donc qu'effectuer une symétrie orthogonale d'axe C_2, suivit d'une rotation de 60° dans le sens des aiguilles d'une montre correspond à faire une symétrie orthogonale d'axe formant un angle de 60° avec l'horizontale et de pente positive. L'ordre de la composition a de l'importance !

---

7. $M(f)=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ qui est égal à deux fois une matrice de rotation de 30° dans le sens trigonométrique, autour de l'origine. f est donc la composée d'une homothétie H_λ de rapport $\lambda=2$ avec une rotation R_α d'angle $\alpha=30°$.

En résumé $f=R_\alpha\circ H_\lambda$, $\lambda=2$ et $\alpha=30°$.

Remarquez que $f=H_\lambda\circ R_\alpha$, l'ordre de la composition n'est pas important **ici**.
