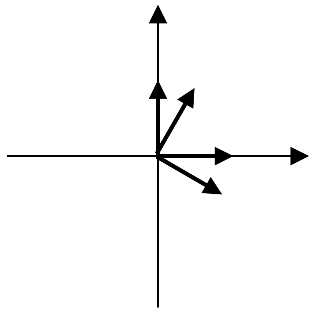
Exercice 1:

$$M(f)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \quad f(\vec{x})=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$$



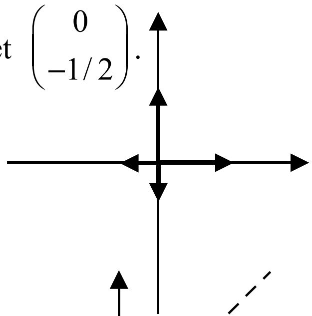
$$\vec{y}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \quad f(\vec{y})=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{3\cdot\sqrt{3}+1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\vec{z}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad f(\vec{z})=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}+1}{2}\end{pmatrix}$$

Cette transformation est la composition d'une symétrie axiale d'axe $x_2 = x_1$, suivie d'une rotation de $-30°$ (c'est-à-dire dune rotation de 30° dans le sens des aiguilles d'une montre.
c.f. Ex 3.2 pour une autre interprétation.

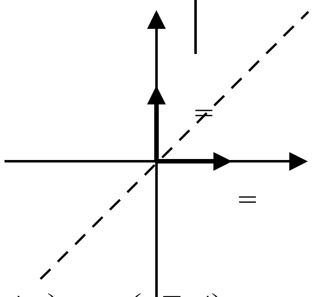
Exercice 2 :

1) $M(f)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Les images de $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sont : $\begin{pmatrix}-1/2\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\-1/2\end{pmatrix}$.



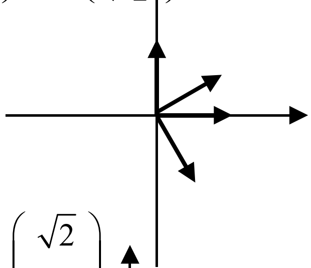
Cela correspond à une symétrie centrale de centre origine composée avec une homothétie de rapport 1/2. L'ordre des transformations donne le même résultat ici.

2) $M(f)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Les images de $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sont : $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.



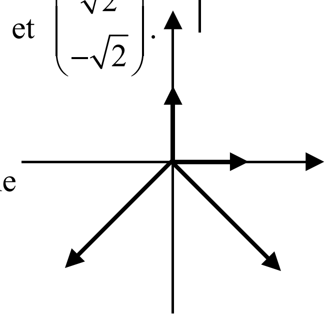
Les deux vecteurs de bases sont échangés par cette transformation linéaire, donc elle correspond à une symétrie d'axe de 45° passant par l'origine, d'équation $x_2 = x_1$.

3) $M(f)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Les images de $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sont : $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.



Les deux vecteurs de bases sont tournés de 60° dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens trigonométrique inverse ou de $-60°$ dans le sens trigonométrique. Cette transformation correspond donc à une rotation de $-60°$ dans le sens trigonométrique, autour de l'origine. C.f. table CRM pour les matrices de rotation.

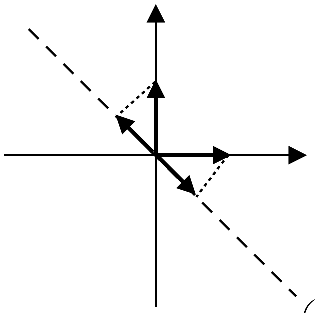
4) $M(f)=\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ Les images de $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sont : $\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$.



Les deux vecteurs de bases sont tournés de $-135°$ dans le sens trigonométrique et agrandis d'un facteur 2. Cette transformation correspond donc à une rotation de $-135°$ dans le sens trigonométrique, autour de l'origine composée avec une homothétie de rapport 2. C.f. table CRM pour les matrices de rotation.

Exercice 3 :

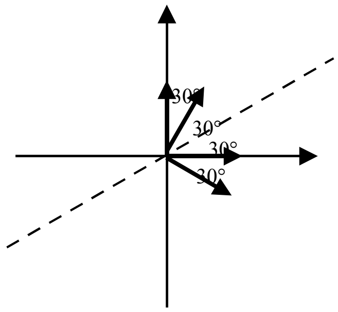
1) Les images de $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont : $\begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.



La matrice de cette transformation est : $M(f) = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

Cela correspond à une projection sur l'axe d'équation : $x_2 = -x_1$.

2) L'image de $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} \cos(60°) \\ \sin(60°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$



L'image de $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est : $\begin{pmatrix} \cos(30°) \\ -\sin(30°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

La matrice de cette transformation est : $M(f) = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Cela correspond à une symétrie axiale, d'axe de 30° : $x_2 = \tan(30°)\cdot x_1$.
Pour une symétrie d'axe quelconque, c.f. ex. 4.2.

Exercice 4 :

1) $f\left(\langle x_1 \,;\, x_2\rangle\right) = \langle 4x_1 - x_2 \,;\, -3x_1 + 2x_2\rangle$, donc $M(f) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

On cherche l'image D' de la droite D d'équation $2x + 3y = 4$.
On sait que cette image sera aussi une droite, qui passera par les images des points de D.
$\langle 2\,;0\rangle$ et $\langle -1\,;2\rangle$ sont deux points de la droite D, donc $f\left(\langle 2\,;0\rangle\right) = \langle 4\cdot 2 - 0\,;-3\cdot 2 + 0\rangle = \langle 8\,;-6\rangle$
et $f\left(\langle -1\,;2\rangle\right) = \langle 4\cdot(-1) - 2\,;-3\cdot(-1) + 2\cdot 2\rangle = \langle -6\,;7\rangle$ sont deux points de la droite D'.

L'équation de la droite D' est donc : $y = \dfrac{-6-7}{8-(-6)}\cdot(x-(-6)) + 7 = \dfrac{-13}{14}\cdot(x+6)+7$.

Elle s'écrit aussi : $14y = -13x - 78 + 98$ et donc : $\underline{\underline{13x + 14y = 20}}$ est l'équation cartésienne de D'.

On peut vérifier qu'un vecteur directeur de D est envoyé sur un vecteur directeur de D'.
$\vec{v}_d = \langle 3\,;-2\rangle$ est un vecteur directeur de D, car $2\cdot(3) + 3\cdot(-2) = 0$.

De façon générale, un vecteur directeur de la droite $a\cdot x + b\cdot y = c$ est : $\vec{v}_d = \langle b\,;-a\rangle$.

$f(\vec{v}_d) = f\left(\langle 3\,;-2\rangle\right) = \langle 4\cdot 3 - (-2)\,;-3\cdot 3 + 2\cdot(-2)\rangle = \langle 14\,;-13\rangle$ qui est bien un vecteur directeur de la droite D'.

2) La matrice correspondante à une symétrie axiale d'axe $x_2 = a\cdot x_1$ ou $x_2 = \tan(\alpha)\cdot x_1$ s'écrit :

$$S_a = \begin{pmatrix} \dfrac{1-a^2}{1+a^2} & \dfrac{2a}{1+a^2} \\ \dfrac{2a}{1+a^2} & -\dfrac{1-a^2}{1+a^2} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S_{\tan(\alpha)} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.2, suite.

Donc la matrice de la symétrie orthogonale d'axe $y = 2x$ est $S_2 = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$.

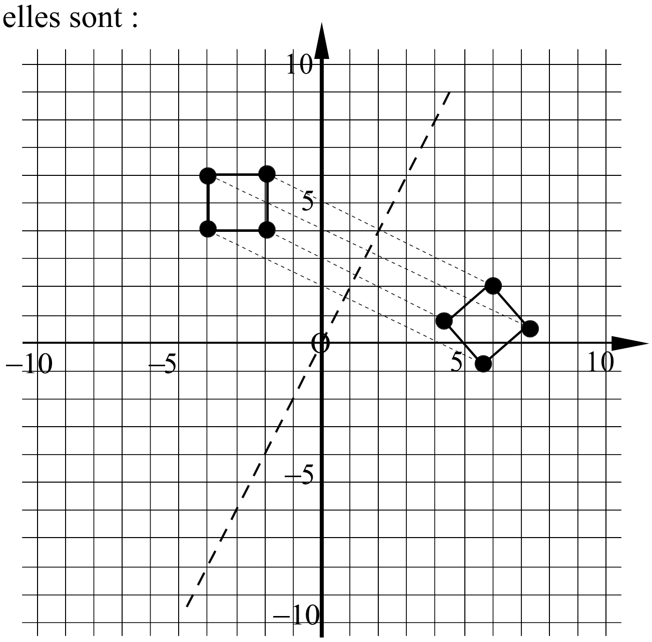
Maintenant, les images du carré sont facile à calculer, elles sont :

$$\begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4+4,8 \\ -3,2+3,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,2 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4+3,2 \\ -3,2+2,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,6 \\ -0,8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2+4,8 \\ -1,6+3,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2+3,2 \\ -1,6+2,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,4 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$



Exercice 5 :

$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $M(g) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1a) $f(\vec{b}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6 \\ -6+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$(g \circ f)(\vec{b}) = g(f(\vec{b})) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40+9 \\ 16-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 13 \end{pmatrix}$$

1b) $g(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10-9 \\ -4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$(f \circ g)(\vec{b}) = f(g(\vec{b})) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -19 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19-2 \\ -57-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -58 \end{pmatrix}.$$

Pour information : $M(f \circ g) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 17 & -8 \end{pmatrix}$ pas nécessaire de faire ce calcul.

$M(g \circ f) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ pas nécessaire de faire ce calcul.

2) On cherche $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tel que $f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

On peut résoudre : $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = -2 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ Solution : $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/7 \\ -3/7 \end{pmatrix}$

Autre manière : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

<u>Exercice 6 :</u>

1) $M(f)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et, c.f. ex. 4.2 avec $x_2=-x_1$, $M(g)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $\vec{a}=\langle 2\,;1\rangle$ et $\vec{b}=\langle 0\,;3\rangle$

$f(\vec{a})=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $f(\vec{b})=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix}$

$g(\vec{a})=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $g(\vec{b})=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(f\circ g)(\vec{a})=f(g(\vec{a}))=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

$(f\circ g)(\vec{b})=f(g(\vec{b}))=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$