

Page vide, aller à la page suivante.

# 1. Matrices

La notation matricielle fut utilisée pour la première fois en 1858 par le mathématicien anglais Arthur Cayley (1821-1895). Il l'a utilisée pour exprimer en abrégé un système d'équations linéaires. Parmi les instruments utilisés en mathématiques, cette notation demeura assez longtemps marginale parce qu'à cette époque l'emploi des mathématiques était surtout orienté vers les sciences physiques. En 1925, le physicien allemand Werner Heisenberg utilisa cet outil mathématique dans ses travaux sur la mécanique quantique. C'est toutefois l'avènement des ordinateurs ultra rapides qui a le plus influencé le développement de l'algèbre matricielle. Ceci devient très apparent depuis la fin de la seconde guerre mondiale. À partir de là, le champ d'application des matrices s'étend à l'administration, à la psychologie, à la génétique, aux statistiques, à l'économie, etc... Avec cet instrument s'est développé également un nouveau secteur des mathématiques, la programmation linéaire (recherche de solutions avec des coûts minimaux, respectant des contraintes imposées).

Quotidiennement, nous avons tous à lire, interpréter ou utiliser des tableaux de nombres. Par exemple, une échelle salariale est fréquemment donnée sous la forme :

expérience (années)	1	3	5	10
échelon				
1	5000	6000	7000	9000
2	5400	6450	7500	9750
3	5800	6900	8000	10500
4	6200	7350	8500	11300

Nous appellerons ces tableaux des **matrices**, leur manipulation nous permettra de résoudre certains problèmes.

**Exemples :**

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Définition :**

Une **matrice**  $m \times n$  (dite **matrice**  $m, n$ ) est un tableau rectangulaire de nombres où  $m$  représente le nombre de lignes et  $n$  le nombre de colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Nous emploierons une lettre majuscule pour représenter une matrice et des lettres minuscules affectées de 2 indices pour désigner les éléments de la matrice :

On la note aussi :  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ .

### 1.1. Somme de matrices

Si deux matrices  $A$  et  $B$  sont de même dimension, on peut obtenir leur **somme** en additionnant les éléments correspondants de chaque matrice :  $A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{m \times n}$

#### Exemples

$$1) \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \text{pas défini}$$

### 1.2. Produit d'une matrice par un scalaire

C'est la matrice obtenue en multipliant chaque élément de la matrice  $A$  par le scalaire  $\lambda$  :

$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})_{m \times n}$ . Cette opération est possible sur toute matrice et avec n'importe quel scalaire.

#### Exemples

$$1) \text{ Si } A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ alors } 6 \cdot A = \begin{pmatrix} 30 & 18 & 6 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$2) \text{ Si } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ alors } -3 \cdot A = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } 3A + 2B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -15 & -6 \end{pmatrix}$$

### 1.3. Produit matriciel

La multiplication de matrices n'est pas une opération aussi simple que les deux opérations définies ci-dessus. Avant d'en donner la définition, nous allons étudier un problème particulier qui nous permettra de voir le sens de cette définition et ainsi de la justifier.

Considérons un marchand de tapis, tuiles et bâches qui commerce dans différentes villes de Suisse comme Genève, Lausanne, Fribourg et Neuchâtel. Les prix unitaires, au mètre carré, diffèrent selon le produit et la ville. Ainsi, le tapis se vend 60 CHF le mètre carré à Genève et Lausanne, 50 CHF à Fribourg et 70 CHF à Neuchâtel. La tuile se vend 80 CHF le mètre carré à Lausanne et Neuchâtel, 70 CHF à Genève et 90 CHF à Fribourg. La bâche se vend 40 CHF le mètre carré à Lausanne et Neuchâtel, 60 CHF à Genève et 50 CHF à Fribourg.

Complétez la matrice  $4 \times 3$  ci-dessous, appelée matrice des prix :

		tapis	tuiles	bâches
Matrice des prix :	Genève	60	70	60
	Lausanne	60	80	40
	Fribourg	50	90	50
	Neuchâtel	70	80	40

Imaginons maintenant que l'on dispose :

d'un camion n°1 contenant 120 m<sup>2</sup> de tapis, 140 m<sup>2</sup> de tuiles et 130 m<sup>2</sup> de bâches.

d'un camion n°2 contenant 140 m<sup>2</sup> de tapis, 130 m<sup>2</sup> de tuiles et 120 m<sup>2</sup> de bâches.

d'un camion n°3 contenant 130 m<sup>2</sup> de tapis, 110 m<sup>2</sup> de tuiles et 150 m<sup>2</sup> de bâches.

Regroupez ces 9 nombres dans une matrice 3 x 3.

		camion 1	camion 2	camion 3
dite matrice des quantités	tapis	120	140	130
	tuiles	140	130	110
	bâches	130	120	150

Selon la ville où il sera envoyé, chaque camion rapportera des revenus différents. En effet, voici le revenu en CHF de chaque camion suivant l'endroit où il est expédié :

	camion n°1	camion n°2	camion n°3
à Genève, il sera de :	24'800	24'700	24'500
à Lausanne, il sera de :	23'600	23'600	22'600
à Fribourg, il sera de :	25'100	24'700	23'900
à Neuchâtel, il sera de :	24'800	25'000	23'900

24'800 = 60·120 + 70·140 + 60·130	24'700 = 60·140 + 70·130 + 60·120	24'500 = 60·130 + 70·110 + 60·150
23'600 = 60·120 + 80·140 + 40·130	23'600 = 60·140 + 80·130 + 40·120	22'600 = 60·130 + 80·110 + 40·150
25'100 = 50·120 + 90·140 + 50·130	24'700 = 50·140 + 90·130 + 50·120	23'900 = 50·130 + 90·110 + 50·150
24'800 = 70·120 + 80·140 + 40·130	25'000 = 70·140 + 80·130 + 40·120	23'900 = 70·130 + 80·110 + 40·150

On a donc 12 revenus différents que l'on peut regrouper dans une matrice 4 x 3.

		camion 1	camion 2	camion 3
dite matrice des revenus :	Genève	24 ' 800	24 ' 700	24 ' 500
	Lausanne	23 ' 600	23 ' 600	22 ' 600
	Fribourg	25 ' 100	24 ' 700	23 ' 900
	Neuchâtel	24 ' 800	25 ' 000	23 ' 900

Ces revenus ont été obtenus en faisant la somme des produits des prix unitaires par les quantités. Ceci suggère que la matrice des revenus peut s'obtenir en multipliant la matrice des prix par celle des quantités de la façon suivante :

**Définition**

Le produit d'une matrice  $A$   $m \times n$  par une matrice  $B$   $n \times p$  est une matrice  $C$   $m \times p$  dont chaque élément  $c_{ij}$  s'obtient en multipliant la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A$  par la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $B$  :

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix} \quad \text{où } c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} .$$

**Exemples :**

$$1) \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 17 & 5 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \text{Pas possible, car le nombre de colonnes de la première matrice est différent du nombre de lignes de la deuxième matrice.}$$

$$3) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 0 \\ -13 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

**Remarques**

1. Il est important de noter que le produit d'une matrice  $A$  avec une matrice  $B$  est défini seulement si le nombre de colonnes de la 1<sup>ère</sup> matrice égale le nombre de lignes de la 2<sup>ème</sup> mat.
2. Le produit  $A \cdot B$  de deux matrices  $n \times n$  est toujours défini et est une matrice  $n \times n$ .

## 1.4. Matrice colonne

La définition précise d'un "espace vectoriel" ne sera pas donnée. Nous nous limiterons aux deux exemples suivants :

$\mathbb{R}^2$  est un **espace vectoriel** de dimension 2, qui peut être assimilé à un **plan muni d'un repère**.

$\mathbb{R}^3$  est un **espace vectoriel** de dimension 3, qui peut être assimilé à l'**espace muni d'un repère**.

Si  $\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n$  sont  $n$  vecteurs d'un espace vectoriel, et  $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$  sont  $n$  nombres, on dit que le vecteur  $\vec{x}$  défini par :  $\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n$  est une **combinaison linéaire** des  $n$  vecteurs.

Considérons l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  ou  $n = 3$ ).

Un ensemble de  $n$  vecteurs  $B_n = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n\}$  est une **base** de  $\mathbb{R}^n$  si tous les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de l'ensemble  $B_n$ .

$n$  est la **dimension** de l'espace vectoriel.

Pour chaque vecteur  $\vec{x}$  de  $\mathbb{R}^n$ , il n'existera qu'un seul groupe de  $n$  nombres  $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$  tel que  $\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{e}_n$ .

On peut donc associer à chaque vecteur  $\vec{x}$  ce groupe de  $n$  nombres  $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$  et

la **matrice colonne** de  $\vec{x}$  est définie par les coefficients :  $M(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ . La réciproque est aussi vraie.

### Exemples

Pour  $\vec{e}_1 = \langle 1; 0 \rangle$  et  $\vec{e}_2 = \langle 0; 1 \rangle$ ,  $B_2 = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$  est une base (sa **base naturelle**) de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ .

Écrivez le vecteur  $\vec{x} = \langle 3; 2 \rangle$  comme combinaison linéaire :  $\langle 3; 2 \rangle = \underline{3} \cdot \vec{e}_1 + \underline{2} \cdot \vec{e}_2$

Écrivez la *matrice colonne* correspondante au vecteur  $\vec{x} = \langle 3; 2 \rangle$ .  $M(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Pour  $\vec{e}_1 = \langle 1; 0; 0 \rangle$ ;  $\vec{e}_2 = \langle 0; 1; 0 \rangle$  et  $\vec{e}_3 = \langle 0; 0; 1 \rangle$ ,  $B_3 = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$  est une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ . C'est même sa **base naturelle**.

Écrivez la combinaison linéaire du vecteur  $\vec{y} = \langle 4; -2; 3 \rangle = \underline{4} \cdot \vec{e}_1 + \underline{-2} \cdot \vec{e}_2 + \underline{3} \cdot \vec{e}_3$

Écrivez la *matrice colonne* correspondante au vecteur  $\vec{y} = \langle 4; -2; 3 \rangle$ .  $M(\vec{y}) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

## 1.5. Matrice identité et matrice inverse

### Définition

La **matrice identité**  $I_{n \times n}$  est la matrice satisfaisant :  $A \cdot I = I \cdot A = A$  pour toute matrice  $A$ .

$$\text{Dans } \mathbb{R}^2, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (n = 2).$$

$$\text{Dans } \mathbb{R}^3, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (n = 3).$$

### Définition

La **matrice inverse**  $A^{-1}$  d'une matrice  $A_{n \times n}$  est la matrice satisfaisant :  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ .

Remarque : si  $A \cdot A^{-1} = I$ , alors  $A^{-1} \cdot A = I$  et réciproquement, donc il suffit de vérifier une égalité.

$$\text{Soit la matrice : } A = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Soit la matrice : } C = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$$

Montrez que les matrices  $A$  et  $C$  sont inverses l'une de l'autre.

Voir la série 1 qui reprend cet exercice.

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \cdot 2 - 7 \cdot 3 & -11 \cdot 7 + 7 \cdot 11 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 & -3 \cdot 7 + 2 \cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que  $C = A^{-1}$  est la matrice inverse de  $A$ .

Et  $A = C^{-1}$  est la matrice inverse de  $C$ .

$$\text{Soient les matrices : } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Voir la série 1 qui reprend cet exercice.

Effectuez le produit matriciel :

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{21} \cdot a_{12} + a_{22} \cdot a_{11} \end{pmatrix}$$

Le nombre :  $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$  s'écrit **det(A)**. Il s'appelle le **déterminant** de la matrice  $A$ .

Déduisez-en la matrice inverse de  $A$ .

Si le déterminant  $\det(A)$  est non nul, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

La notation usuelle de l'inverse est :  $A^{-1}$ . On n'écrit pas :  $\frac{1}{A}$ . Cette écriture est *incorrecte* !

Est-ce que toute matrice  $A$  possède une matrice inverse ?

Une matrice possède une matrice inverse si et seulement si son déterminant est non nul.

Par exemple,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  n'a pas d'inverse !

## 2. Transformations linéaires

Deux exemples comme introduction

Voici deux exemples d'applications de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$1) f(\langle x; y \rangle) = \langle x; -y \rangle \qquad 2) g(\langle x; y \rangle) = \langle 2x; 2y \rangle$$

Pourquoi ces relations sont-elles des applications ?

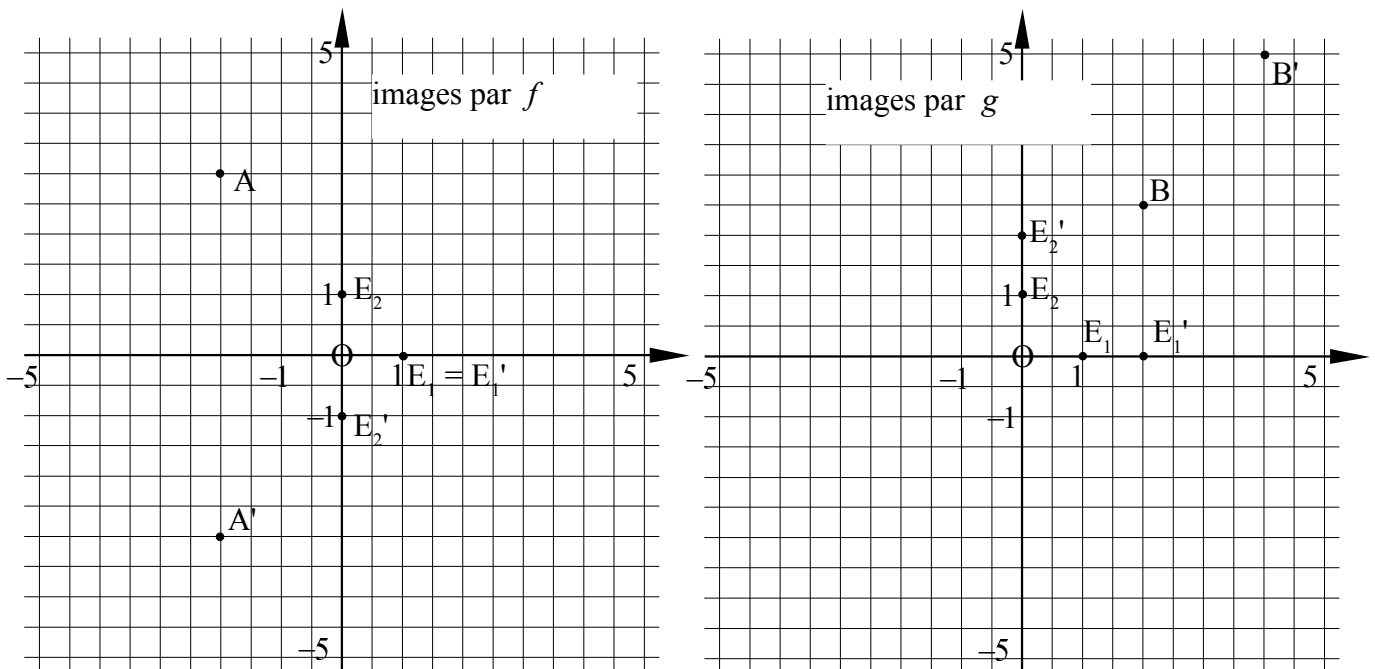
Calculez les images suivantes:

$$f(\langle -2; 3 \rangle) = \langle -2; -3 \rangle \qquad f(\langle 1; 0 \rangle) = \langle 1; 0 \rangle \qquad f(\langle 0; 1 \rangle) = \langle 0; -1 \rangle$$

$$g(\langle 2; 3 \rangle) = \langle 4; 6 \rangle \qquad g(\langle 1; 0 \rangle) = \langle 2; 0 \rangle \qquad g(\langle 0; 1 \rangle) = \langle 0; 2 \rangle$$

$$f(\langle 0; 0 \rangle) = \langle 0; 0 \rangle \qquad g(\langle 0; 0 \rangle) = \langle 0; 0 \rangle$$

puis interprétez géométriquement  $f$  et  $g$  :



Ces deux exemples reviendront plus loin où leur matrice correspondante seront déterminées.

$f$  est la symétrie axiale d'axe  $x$ .

$g$  est l'homothétie de centre origine de rapport 2.



**Définition**

Une application  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  est une **transformation linéaire** si et seulement si elle préserve les structures d'espace vectoriel, c'est-à-dire si:

$$(1) \quad f(\vec{v} + \vec{u}) = f(\vec{v}) + f(\vec{u}) \quad \forall \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$$

$$(2) \quad f(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot f(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

**Exercice 1**

Sachant que  $f$  est une transformation linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  et que  $f(\langle 3; 7 \rangle) = \langle 5; -3 \rangle$ , que vaut  $f(\langle 6; 14 \rangle)$  ?

$$f(\langle 6; 14 \rangle) = 2 \cdot f(\langle 3; 7 \rangle) = 2 \cdot \langle 5; -3 \rangle = \langle 10; -6 \rangle$$

**Exercice 2**

Sachant que  $f$  est une transformation linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  et que :

$$f(\langle 1; 0 \rangle) = \langle 4; 7 \rangle \quad \text{et} \quad f(\langle 0; 1 \rangle) = \langle -3; 3,5 \rangle,$$

que valent :

$$1) \quad f(\langle 5; 0 \rangle) = 5 \cdot f(\langle 1; 0 \rangle) = 5 \cdot \langle 4; 7 \rangle = \langle 20; 35 \rangle$$

$$2) \quad f(\langle 0; 4 \rangle) = 4 \cdot f(\langle 0; 1 \rangle) = 4 \cdot \langle -3; 3,5 \rangle = \langle -12; 14 \rangle$$

$$3) \quad f(\langle 5; 4 \rangle) = f(\langle 5; 0 \rangle) + f(\langle 0; 4 \rangle) = \langle 20; 35 \rangle + \langle -12; 14 \rangle = \langle 8; 49 \rangle$$

$$4) \quad f(\langle x; y \rangle) = x \cdot f(\langle 1; 0 \rangle) + y \cdot f(\langle 0; 1 \rangle) = x \cdot \langle 4; 7 \rangle + y \cdot \langle -3; 3,5 \rangle = \langle 4x - 3y; 7x + 3,5y \rangle$$

où  $x, y$  sont deux nombres réels.

$$5) \quad \text{Effectuez le produit : } \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 3,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 3y \\ 7x + 3,5y \end{pmatrix}$$

6) Comparez les points 4) et 5).

La matrice  $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 3,5 \end{pmatrix}$  est celle de l'application linéaire  $f$ .

**Exercice 3**

$$f(\langle x; y \rangle) = f(x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2) = x \cdot f(\vec{e}_1) + y \cdot f(\vec{e}_2) = x \cdot \langle 2; 1 \rangle + y \cdot \langle 0; 1 \rangle$$

$$f(\langle x; y \rangle) = \langle 2 \cdot x; x + y \rangle$$

Quel produit matriciel correspondrait à  $f(\langle x; y \rangle)$  ?

Quelle matrice caractérise la transformation linéaire  $f$  ?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x + y \end{pmatrix}$$

La transformation linéaire  $f$  est caractérisée par la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Rappelons qu'une application  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  est une **transformation linéaire** si et seulement si

$$(1) \quad f(\vec{v} + \vec{u}) = f(\vec{v}) + f(\vec{u}) \quad \forall \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$$

$$(2) \quad f(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot f(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

### **Généralisation :**

Sachant que  $f$  est une transformation linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  et que :

$$f(\langle 1; 0 \rangle) = \langle a_{11}; a_{21} \rangle \quad \text{et} \quad f(\langle 0; 1 \rangle) = \langle a_{12}; a_{22} \rangle. \quad (\text{Donc } f(\vec{e}_1) = \langle a_{11}; a_{21} \rangle \text{ et } f(\vec{e}_2) = \langle a_{12}; a_{22} \rangle)$$

Déterminez :

$$f(\langle x; y \rangle) = f(x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2) = f(x \cdot \vec{e}_1) + f(y \cdot \vec{e}_2) = x \cdot f(\vec{e}_1) + y \cdot f(\vec{e}_2)$$

$$f(\langle x; y \rangle) = x \cdot \langle a_{11}; a_{21} \rangle + y \cdot \langle a_{12}; a_{22} \rangle = \langle x \cdot a_{11} + y \cdot a_{12}; x \cdot a_{21} + y \cdot a_{22} \rangle$$

$$\boxed{f(\langle x; y \rangle) = \langle a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y; a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y \rangle}$$

Quel produit matriciel correspondrait à  $f(\langle x; y \rangle)$  ?

Quelle matrice caractérise la transformation linéaire  $f$  ?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y \end{pmatrix}$$

On voit que le produit matriciel ci-dessus donne le même résultat que l'image de  $\langle x; y \rangle$  par  $f$ .  
Seul la notation change.

Donc la matrice :  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  caractérise la transformation linéaire  $f$ .

Donc  $f$  est entièrement déterminée par la connaissance de l'image de chaque vecteur de base  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ .  
C'est un cas particulier ( $n = 2$ ) du théorème fondamental de l'algèbre linéaire, qui s'applique aux espaces de dimension  $n$  quelconque.

### **Propriété**

Montrez que si  $f$  est une transformation linéaire, alors  $f(\vec{0}) = \vec{0}$ .

$$f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{e}_1) = 0 \cdot f(\vec{e}_1) = \vec{0}$$

### 3. Représentation matricielle d'une transformation linéaire

Pour la suite du cours, nous travaillerons exclusivement avec les bases naturelles.

Les matrices vont nous aider à donner une représentation plus simple et claire des transformations linéaires.

La page qui précède montre qu'à toute transformation linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  correspond une matrice  $2 \times 2$ .

#### **Théorème :**

Si  $f$  est une transformation linéaire satisfaisant  $f(\vec{e}_1) = \langle a_{11}; a_{21} \rangle$  et  $f(\vec{e}_2) = \langle a_{12}; a_{22} \rangle$ , alors

$$f(\langle x; y \rangle) = \langle a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y ; a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y \rangle$$

et la matrice associée à  $f$  est : 
$$M(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Réciproquement, à toute matrice  $2 \times 2$  correspond une transformation linéaire définie comme ci-dessus.

Ce théorème se généralise aux transformations linéaires  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ .

#### **Remarques :**

1. Les colonnes de  $M(f)$  sont constituées par les vecteurs images des vecteurs de base.
2.  $M(\vec{v})$  et  $M(f(\vec{v}))$  sont des matrices colonnes.  $\vec{v} = \langle x; y \rangle$ .
3. La matrice colonne de l'image de  $\vec{v}$  par  $f$  est égale au produit de la matrice de  $f$  par la matrice colonne de  $\vec{v}$ . C'est-à-dire :

$$M(f) \cdot M(\vec{v}) = M(f(\vec{v}))$$

Écrit explicitement : 
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y \end{pmatrix}$$

#### **Exercice**

Reprenez les deux exemples du paragraphe précédent:

- 1)  $f(\langle x; y \rangle) = \langle x; -y \rangle$
- 2)  $g(\langle x; y \rangle) = \langle 2x; 2y \rangle$

et déterminez la matrice de chacune de ces transformations linéaires.

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\text{et } M(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

**Image d'une droite par une transformation linéaire****Théorème**

L'image par une transformation linéaire d'une droite (d'un segment de droite) est une droite (un segment de droite).

**Exercice :**

Soit la transformation linéaire  $f(\langle x ; y \rangle) = \langle 2x + y ; 3x - 5y \rangle$

Soit la droite  $D$  d'équation cartésienne :  $3x + 5y = 15$ .

Déterminez une équation vectorielle et une équation cartésienne de l'image par  $f$  de la droite  $D$ .

Puisque **l'image d'une droite est une droite**, il suffit de trouver l'image de deux points de la droite  $D$  puis de déterminer la droite passant par ces deux points.

Deux points de la droite sont :  $\langle 5 ; 0 \rangle$  et  $\langle 0 ; 3 \rangle$ , ce qui se vérifie immédiatement.

L'image de  $\langle 5 ; 0 \rangle$  est  $f(\langle 5 ; 0 \rangle) = \langle 2 \cdot 5 + 0 ; 3 \cdot 5 - 5 \cdot 0 \rangle = \langle 10 ; 15 \rangle$ .

L'image de  $\langle 0 ; 3 \rangle$  est  $f(\langle 0 ; 3 \rangle) = \langle 2 \cdot 0 + 3 ; 3 \cdot 0 - 5 \cdot 3 \rangle = \langle 3 ; -15 \rangle$ .

Un vecteur directeur de la droite image est :  $\langle 10 ; 15 \rangle - \langle 3 ; -15 \rangle = \langle 7 ; 30 \rangle$ .

Une équation vectorielle de la droite image est :  $\vec{v} = \langle 10 ; 15 \rangle + \lambda \cdot \langle 7 ; 30 \rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Une équation cartésienne de la droite image est :  $30x - 7y = 30 \cdot 10 - 7 \cdot 15 = 195$ .

Les coefficients de  $x$  et  $y$  sont les composantes du vecteur directeur avec un changement de signe.

En résumé l'équation cartésienne de la droite image est :  **$30x - 7y = 195$** .

**Une autre manière de faire** est de déterminer une équation vectorielle de la droite  $D$ .

$$\vec{v} = \langle 5 ; 0 \rangle + \lambda \cdot \langle 5 ; -3 \rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ensuite un vecteur directeur de la droite image est l'image du vecteur directeur.

$$f(\langle 5 ; -3 \rangle) = \langle 2 \cdot 5 - 3 ; 3 \cdot 5 - 5 \cdot (-3) \rangle = \langle 7 ; 30 \rangle$$

On retrouve l'équation vectorielle de la droite image :  $\vec{v} = \langle 10 ; 15 \rangle + \lambda \cdot \langle 7 ; 30 \rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}$

On procède comme précédemment pour trouver l'équation cartésienne de la droite image.

*Démonstration du théorème du début de la page :*

Soit  $f$  une transformation linéaire.

Soit  $\vec{v} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{d} \quad \lambda \in \mathbb{R}$  l'équation vectorielle d'une droite.

$$f(\vec{v}) = f(\vec{p} + \lambda \cdot \vec{d}) = f(\vec{p}) + f(\lambda \cdot \vec{d}) = f(\vec{p}) + \lambda \cdot f(\vec{d}) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Notons  $\vec{w}$  l'image de  $\vec{v}$ ,  $\vec{p}' = f(\vec{p})$  et  $\vec{d}' = f(\vec{d})$

L'équation ci-dessus s'écrit :  $\vec{w} = \vec{p}' + \lambda \cdot \vec{d}' \quad \lambda \in \mathbb{R}$  qui est bien l'équation vectorielle d'une droite.

CQFD

Cette démonstration indique également que :

- ° un vecteur position de la droite image est l'image d'un vecteur position de la droite d'origine ;
- ° un vecteur directeur de la droite image est l'image d'un vecteur directeur de la droite d'origine.

## 4. Les principales transformations linéaires

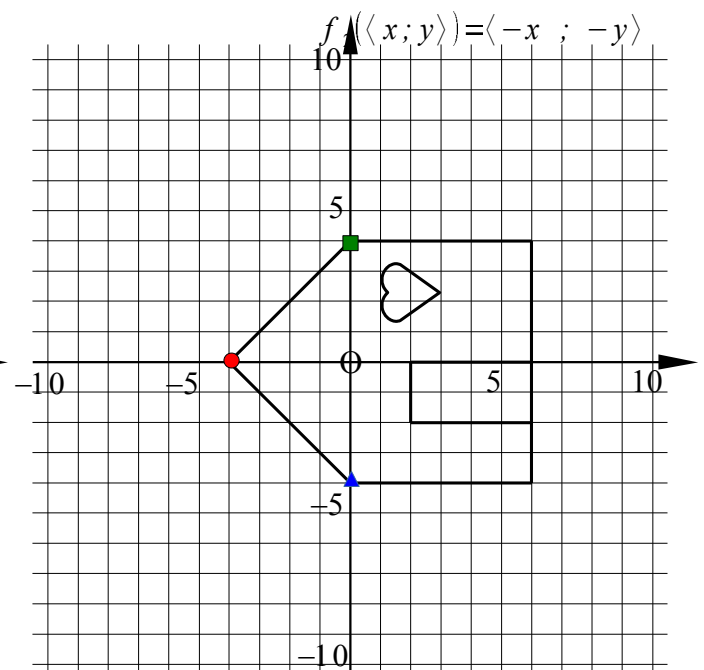
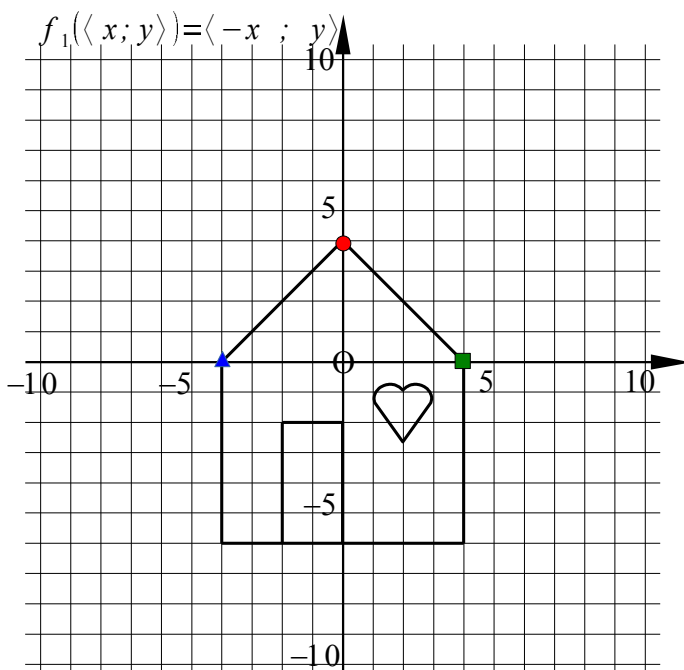
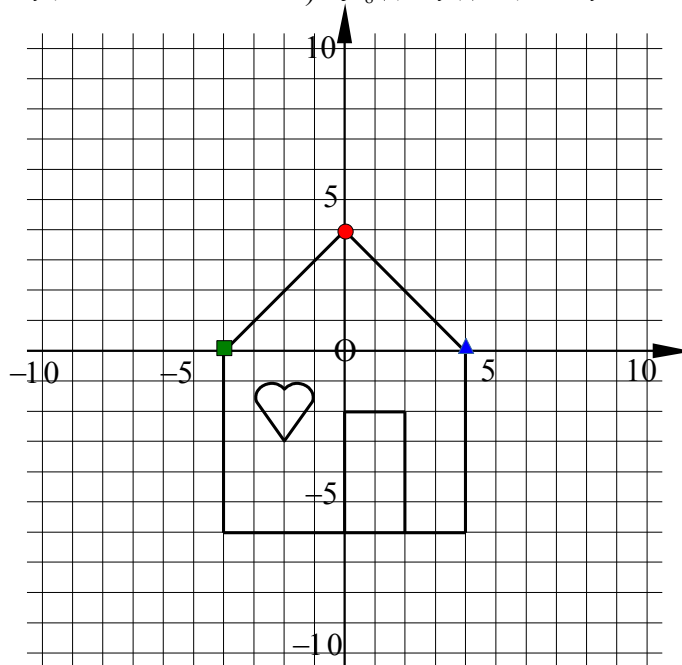
### 4.1. Un exemple

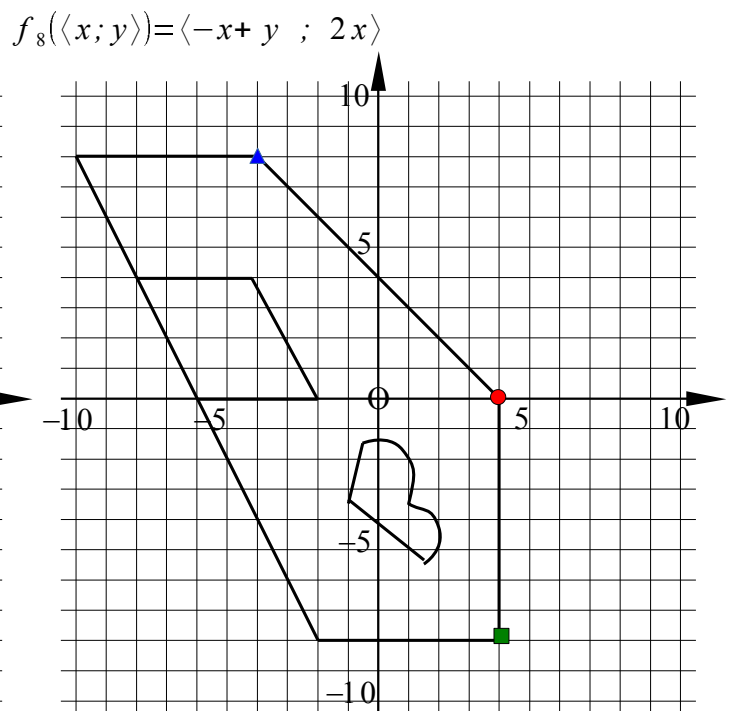
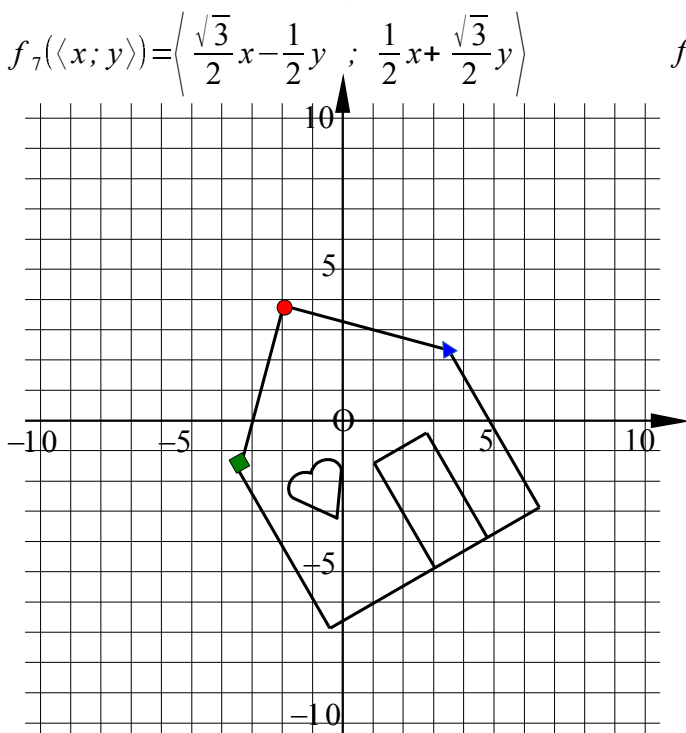
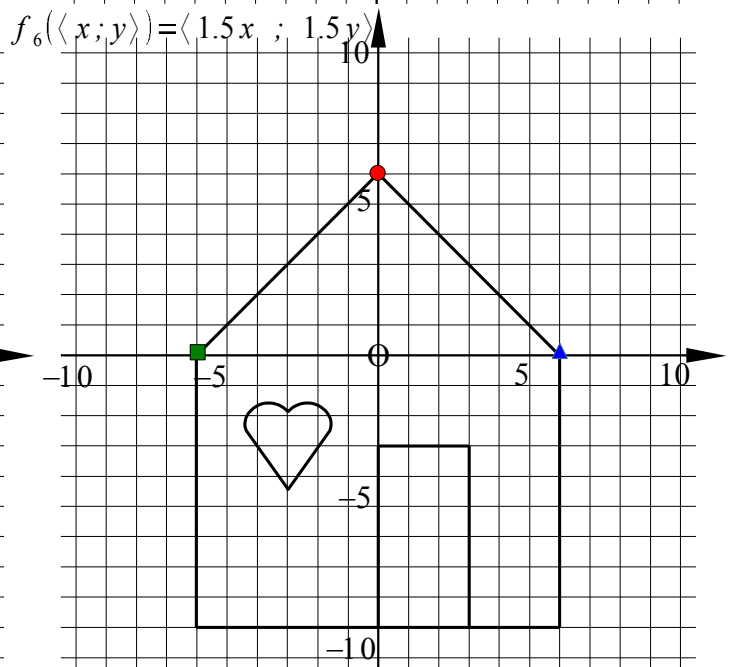
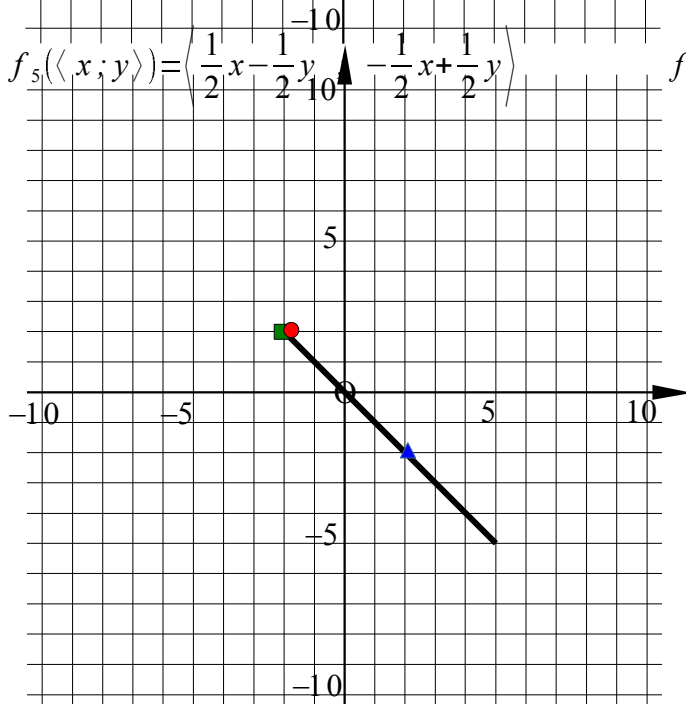
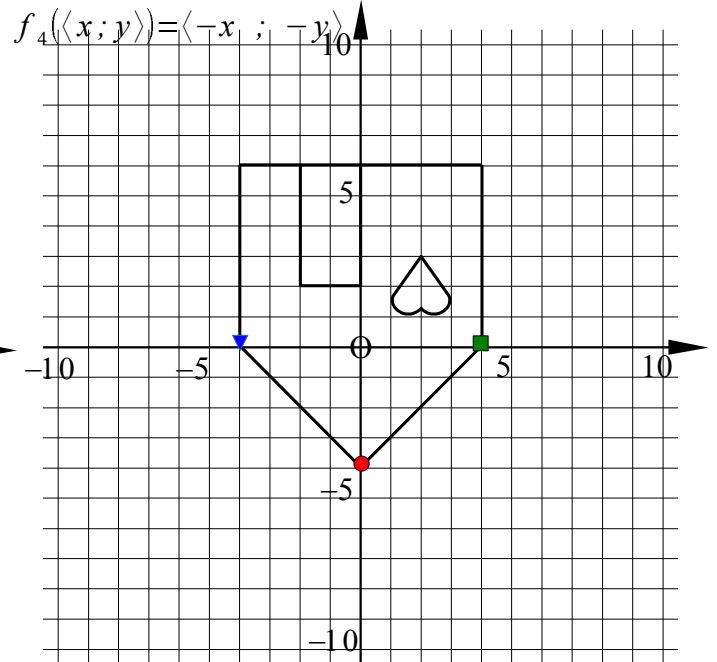
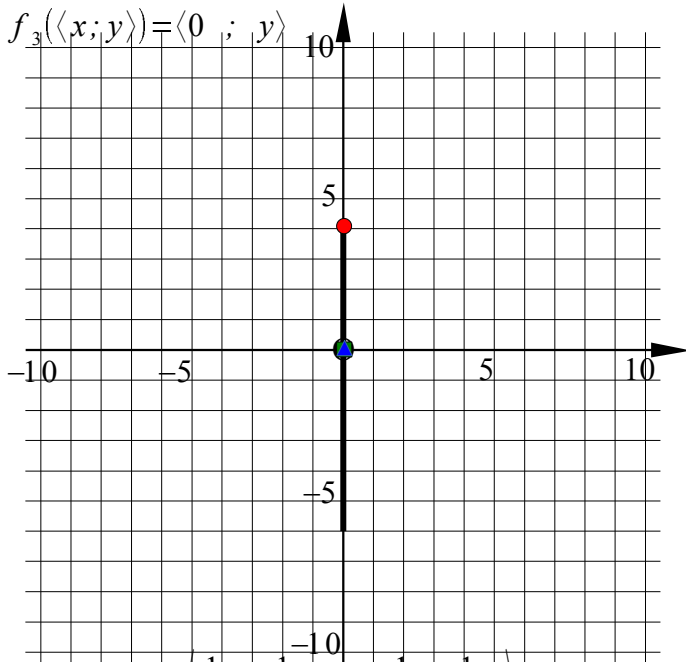
Voici un dessin dans le plan muni d'un repère :  $E = \mathbb{R}^2$ .

Vous pouvez repérer quelques points qui vous serviront à déterminer l'image de ce dessin par les huit transformations linéaires proposées ci-dessous.

Pour chacune : déterminez sa matrice, dessinez l'image, identifiez la transformation.

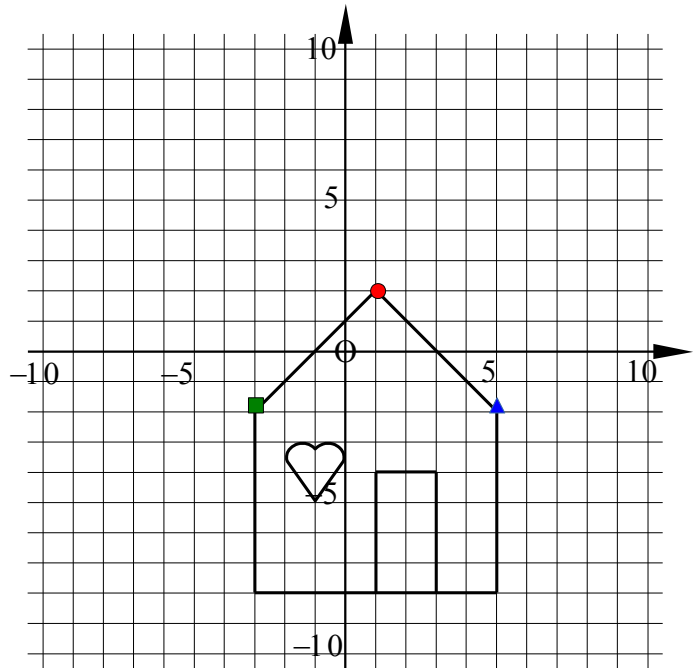
- |                                                          |                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $f_1(\langle x; y \rangle) = \langle -x ; y \rangle$  | 5) $f_5(\langle x; y \rangle) = \left\langle \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y ; -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \right\rangle$              |
| 2) $f_2(\langle x; y \rangle) = \langle -y ; -x \rangle$ | 6) $f_6(\langle x; y \rangle) = \langle 1.5x ; 1.5y \rangle$                                                                        |
| 3) $f_3(\langle x; y \rangle) = \langle 0 ; y \rangle$   | 7) $f_7(\langle x; y \rangle) = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y ; \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right\rangle$ |
| 4) $f_4(\langle x; y \rangle) = \langle -x ; -y \rangle$ | 8) $f_8(\langle x; y \rangle) = \langle -x + y ; 2x \rangle$                                                                        |





Et si on prend l'application suivante :  $f_9(\langle x ; y \rangle) = \langle x+1 ; y-2 \rangle$ , qu'advient-il de ce dessin ?  
 $f_9$  est-elle linéaire ?

C'est une translation, pas une application linéaire, car l'image de l'origine n'est pas sur l'origine.

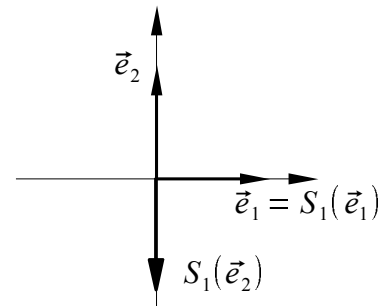


#### 4.2. Matrices des principales Transformations Linéaires de $\mathbb{R}^2$ ( base canonique)

1. Symétrie orthogonale par rapport à l'axe  $C_1$  ( notons-la  $S_1$  )

$$M(S_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

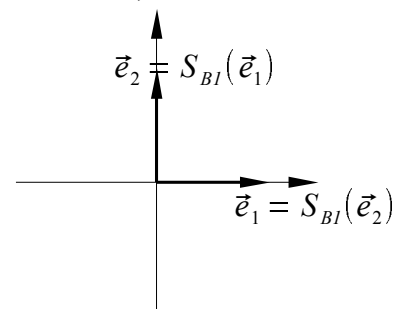
$$S_1(\langle x ; y \rangle) = \langle x ; -y \rangle$$



2. Symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice ( notons-la  $S_{B1}$  )

$$M(S_{B1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

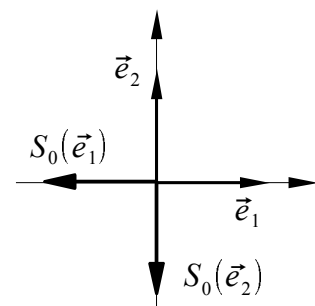
$$S_{B1}(\langle x ; y \rangle) = \langle y ; x \rangle$$



3. Symétrie centrale par rapport à l'origine ( notons-la  $S_0$  )

$$M(S_0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

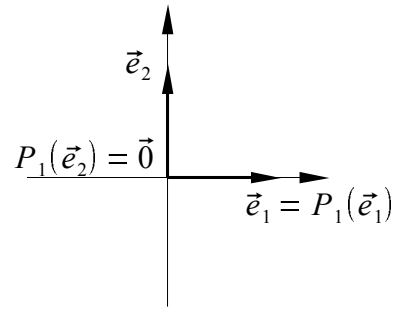
$$S_0(\langle x ; y \rangle) = \langle -x ; -y \rangle$$



4. Projection orthogonale sur l'axe  $C_1$  (notons-la  $P_1$ )

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

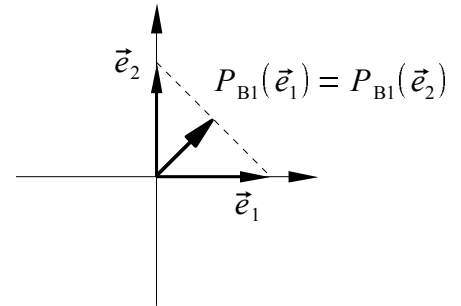
$$P_1(\langle x ; y \rangle) = \langle x ; 0 \rangle$$



5. Projection orthogonale sur la première bissectrice (notons-la  $P_{B1}$ )

$$M(P_{B1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

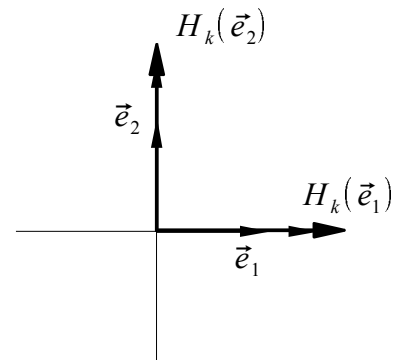
$$P_{B1}(\langle x ; y \rangle) = \langle 0,5 \cdot (x+y) ; 0,5 \cdot (x+y) \rangle$$



6. Homothétie de centre l'origine et de rapport  $k$  (notons-la  $H_k$ )

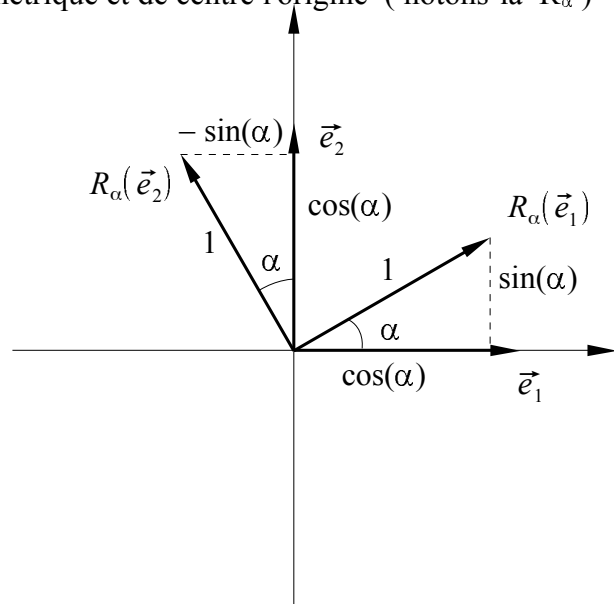
$$M(H_k) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$H_k(\langle x ; y \rangle) =$$



7. Rotation d'angle  $\alpha$  dans le sens trigonométrique et de centre l'origine (notons-la  $R_\alpha$ )

$$M(R_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$



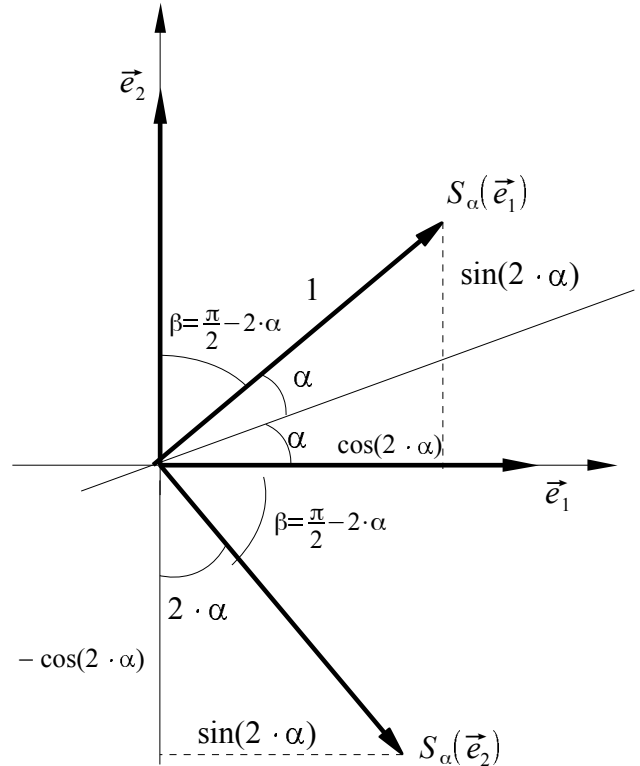
$$R_\alpha(\langle x ; y \rangle) = \langle \cos(\alpha) \cdot x - \sin(\alpha) \cdot y ; \sin(\alpha) \cdot x + \cos(\alpha) \cdot y \rangle$$

c.f. plus loin dans ce corrigé du cours, le point 6, traitant des matrices de rotation et de symétrie.



8. Symétrie orthogonale d'axe  $y = a \cdot x$  (notons-la  $S_a$ )

$$M(S_a) = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$



$$S_a(\langle x ; y \rangle) = \langle \cos(2\alpha) \cdot x + \sin(2\alpha) \cdot y ; \sin(2\alpha) \cdot x - \cos(2\alpha) \cdot y \rangle \quad \text{Annexes c.f. section 6.}$$

**Autre manière** de déterminer la matrice d'une symétrie orthogonale  $S_a$  d'axe  $y = a \cdot x$ .

Exemple pour la droite d'équation  $y = 6 \cdot x$ .

Pour trouver la matrice de  $S_6$  il suffit de trouver les images des deux vecteurs de bases.

Un vecteur directeur de cette droite est :  $\vec{v} = \langle 1 ; 6 \rangle = \vec{e}_1 + 6 \cdot \vec{e}_2$ .

**L'image par  $S_6$  de ce vecteur directeur est égal à lui-même.**

$$1) S_6(\vec{e}_1 + 6 \cdot \vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 6 \cdot \vec{e}_2$$

**L'image par  $S_6$  d'un vecteur perpendiculaire au vecteur directeur est égal à son opposé.**

$$2) S_6(6 \cdot \vec{e}_1 - \vec{e}_2) = -6 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \quad 6 \cdot \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \text{ est perpendiculaire à } \vec{e}_1 + 6 \cdot \vec{e}_2 !$$

Sachant que  $S_6$  est une transformation linéaire, de 1) et de 2) on en déduit que :

$$1') S_6(\vec{e}_1) + 6 \cdot S_6(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 6 \cdot \vec{e}_2$$

$$2') 6 \cdot S_6(\vec{e}_1) - S_6(\vec{e}_2) = -6 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

En multipliant les deux membres de la deuxième égalité par 6 et en additionnant 1) et 2) :

$$37 \cdot S_6(\vec{e}_1) = -35 \cdot \vec{e}_1 + 12 \cdot \vec{e}_2 \quad \text{donc : } S_6(\vec{e}_1) = \frac{-35}{37} \cdot \vec{e}_1 + \frac{12}{37} \cdot \vec{e}_2$$

En multipliant les deux membres de la première égalité par 6 et en soustrayant 2) de 1) :

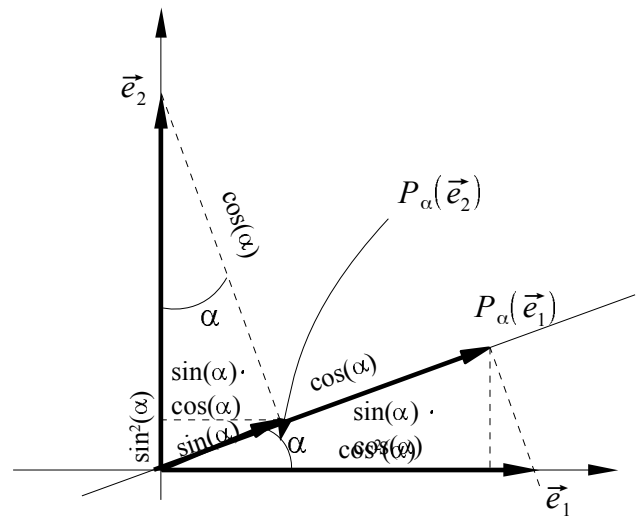
$$37 \cdot S_6(\vec{e}_2) = 12 \cdot \vec{e}_1 + 35 \cdot \vec{e}_2 \quad \text{donc : } S_6(\vec{e}_2) = \frac{12}{37} \cdot \vec{e}_1 + \frac{35}{37} \cdot \vec{e}_2$$

$$\text{On en déduit : } M(S_6) = \begin{pmatrix} \frac{-35}{37} & \frac{12}{37} \\ \frac{12}{37} & \frac{35}{37} \end{pmatrix}.$$

**L'avantage** de cette méthode est d'avoir un résultat exact sous forme de fraction.

9. Projection orthogonale sur l'axe  $y = a \cdot x$  (notons-la  $P_a$ )  $a = \tan(\alpha)$

$$M(P_a) = \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix}$$



$$P_a(\langle x ; y \rangle) = \langle \cos^2(\alpha) \cdot x + \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot y ; \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot x + \sin^2(\alpha) \cdot y \rangle$$

**Autre manière** de déterminer la matrice d'une projection orthogonale  $P_a$  sur l'axe  $y = a \cdot x$ .

Exemple pour la droite d'équation  $y = 6 \cdot x$ .

Pour trouver la matrice de  $P_6$  il suffit de trouver les images des deux vecteurs de bases.

Un vecteur directeur de cette droite est :  $\vec{v} = \langle 1 ; 6 \rangle = \vec{e}_1 + 6 \cdot \vec{e}_2$ .

**L'image par  $P_6$  de ce vecteur directeur est égal à lui même.**

$$1) P_6(\vec{e}_1 + 6 \cdot \vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 6 \cdot \vec{e}_2$$

**L'image par  $P_6$  d'un vecteur perpendiculaire au vecteur directeur est le vecteur nul.**

$$2) P_6(6 \cdot \vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \vec{0} \quad 6 \cdot \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \text{ est perpendiculaire à } \vec{e}_1 + 6 \cdot \vec{e}_2 !$$

Sachant que  $P_6$  est une transformation linéaire, de 1) et de 2) on en déduit que :

$$1') P_6(\vec{e}_1) + 6 \cdot P_6(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 6 \cdot \vec{e}_2$$

$$2') 6 \cdot P_6(\vec{e}_1) - P_6(\vec{e}_2) = \vec{0}$$

En multipliant les deux membres de la deuxième égalité par 6 et en additionnant 1) et 2) :

$$37 \cdot P_6(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 6 \cdot \vec{e}_2 \quad \text{donc : } P_6(\vec{e}_1) = \frac{1}{37} \cdot \vec{e}_1 + \frac{6}{37} \cdot \vec{e}_2$$

En multipliant les deux membres de la première égalité par 6 et en soustrayant 2) de 1) :

$$37 \cdot P_6(\vec{e}_2) = 6 \cdot \vec{e}_1 + 36 \cdot \vec{e}_2 \quad \text{donc : } P_6(\vec{e}_2) = \frac{6}{37} \cdot \vec{e}_1 + \frac{36}{37} \cdot \vec{e}_2$$

$$\text{On en déduit : } M(P_6) = \begin{pmatrix} \frac{1}{37} & \frac{6}{37} \\ \frac{6}{37} & \frac{36}{37} \end{pmatrix}.$$

**L'avantage** de cette méthode est d'avoir un résultat exact sous forme de fraction.

## 5. Composée d'applications linéaires

### 5.1 Composée d'applications linéaires

Si on désire composer successivement des applications linéaires, la matrice finale s'obtient par multiplication des matrices correspondantes.

**Théorème :**

Si  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  sont deux applications linéaires, alors :

- 1)  $g \circ f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  est linéaire
- 2)  $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$

**Remarques :**

$M(g)$  est une matrice  $p \times n$  ;  $M(f)$  est une matrice  $n \times m$  et  $M(g \circ f)$  est une matrice  $p \times m$ .

**Exemple**

Étant donné :  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(\langle x; y \rangle) = \langle x; x+y \rangle$  et

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $g(\langle x; y \rangle) = \langle 2x; y; x-y \rangle$ ,

$(g \circ f)(\langle x; y \rangle) = g(f(\langle x; y \rangle)) = g(\langle x; x+y \rangle) = \langle 2x; x+y; x-x-y \rangle$

$$M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

### 5.2 Réciproque d'une application linéaire et matrice associée

**Définition :**

L'application linéaire **identité**  $I: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est celle définie par :  $I(\vec{v}) = \vec{v}$  pour tout  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .

**Définition :**

Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application linéaire.

S'il existe une application linéaire  ${}^r f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  ${}^r f \circ f = I$  et  $f \circ {}^r f = I$ , alors

${}^r f$  est appelée l'**application linéaire réciproque** de l'application linéaire  $f$ .

C'est la même notion de réciproque d'une fonction.

**Exercice :**

Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire définie par la matrice :  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \\ 5 \cdot 8 + 8 \cdot (-5) & 5 \cdot (-3) + 8 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = \text{matrice identité}$$

$$\text{Donc } M({}^r f) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Théorème :**

Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire définie par la matrice :  $M(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

On définit  $Det = Det(M(f)) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$  qui s'appelle le **déterminant** de la matrice  $M(f)$ .

Montrez que si  $Det \neq 0$ , la matrice de l'application linéaire réciproque de  $f$  est :  $\frac{1}{Det} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{Det} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{Det} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Exercices

1. Étant donné  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(\langle x; y \rangle) = \langle x; x+y \rangle$  et

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $g(\langle x; y \rangle) = \langle 2x; y; x-y \rangle$ , calculez  $(g \circ f)(\langle x; y \rangle)$ .

$$(g \circ f)(\langle x; y \rangle) = g(f(\langle x; y \rangle)) = g(\langle x; x+y \rangle) = \langle 2x; x+y; x-(x+y) \rangle = \langle 2x; x+y; -y \rangle$$

2. Montrez que dans le plan, la composée d'une rotation d'angle  $\alpha$  et d'une rotation d'angle  $\beta$  est une rotation d'angle  $\gamma$ , à déterminer.

La composée de deux rotations se calcule par un produit matriciel de matrices de rotation.

$$M(R_\alpha) \cdot M(R_\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) & -\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) & -\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \quad \text{Les règles d'additions d'angles ont été utilisées.}$$

On pouvait le dire à l'avance, qu'une rotation d'angle  $\alpha$  suivie d'une rotation d'angle  $\beta$  est une rotation d'angle  $\gamma = \alpha + \beta$ .

3. A quelle transformation linéaire correspond une symétrie orthogonale d'axe  $C_1$ , suivie d'une rotation d'angle  $-2\alpha$ . (c'est-à-dire d'angle  $2\alpha$ . dans le sens des aiguilles d'une montre) ?

Prouvez votre réponse algébriquement et graphiquement.

Comment se traduit matriciellement l'expression "suivie de" ?

"Suivie de" se traduit par un produit matriciel.

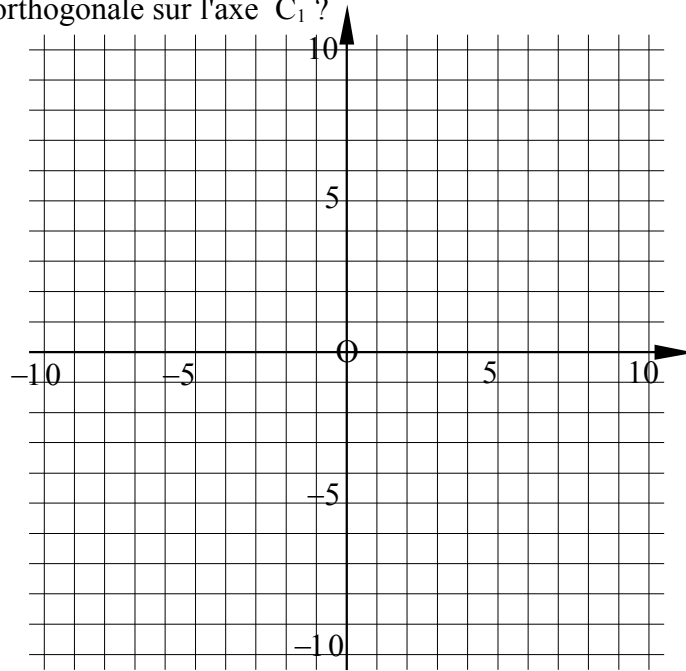
La matrice correspondante est le produit des deux matrices correspondantes à celle d'une symétrie orthogonale d'axe  $C_1$  et d'une rotation d'angle  $-2\alpha$ .

$$M(S_1) \cdot M(R_{2\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ -\sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

On obtient la matrice d'une symétrie orthogonale d'axe  $y = a \cdot x$ , où  $a = \tan(\alpha)$  !

Ce n'était pas évident. Cela peut se constater géométriquement sur un graphique.

4. Quelle est l'image du triangle de sommets  $\langle 2 ; 0 \rangle$ ,  $\langle 2 ; 3 \rangle$  et  $\langle 5 ; 3 \rangle$  par une rotation d'angle de  $30^\circ$ , suivie d'une homothétie de rapport 2, suivie d'une symétrie d'axe  $C_1$ , suivie d'une projection orthogonale sur l'axe  $C_1$  ?



Montrons que la **matrice d'une rotation** d'angle  $\alpha$  dans le sens trigonométrique (inverse des aiguilles d'une montre) est donnée par la matrice :

$$M(R_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

C'est une transformation linéaire, car additionner des vecteurs avant de les tourner ou après, cela revient au même.

Il faut donc chercher les images des deux vecteurs de base.

Les coordonnées de l'image du premier vecteur de base  $\vec{e}_1$  s'obtiennent par de la trigonométrie simplement :

La projection de  $R_\alpha(\vec{e}_1)$  sur l'axe  $C_1$  vaut  $\cos(\alpha)$ ,

La projection de  $R_\alpha(\vec{e}_1)$  sur l'axe  $C_2$  vaut  $\sin(\alpha)$ .

$$\text{Donc } M(R_\alpha(\vec{e}_1)) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

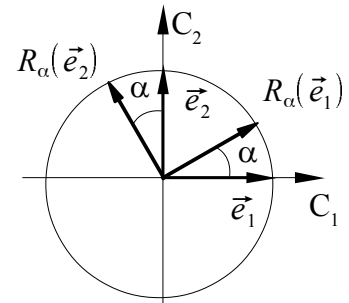
Les coordonnées de  $R_\alpha(\vec{e}_2)$  s'obtiennent par de la trigonométrie en regardant ses projections sur les deux axes :

La projection de  $R_\alpha(\vec{e}_2)$  sur l'axe  $C_1$  vaut  $-\sin(\alpha)$ ,

La projection de  $R_\alpha(\vec{e}_2)$  sur l'axe  $C_2$  vaut  $\cos(\alpha)$ .

$$\text{Donc } M(R_\alpha(\vec{e}_2)) = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

On trouve bien la matrice de rotation donnée ci-dessus.



Montrons que la **matrice d'une symétrie orthogonale** d'axe  $y = \tan(\alpha) \cdot x$  est donnée par la matrice :

$$M(S_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(2\cdot\alpha) & \sin(2\cdot\alpha) \\ \sin(2\cdot\alpha) & -\cos(2\cdot\alpha) \end{pmatrix}$$

C'est une transformation linéaire, car additionner des vecteurs avant ou après la symétrie, cela revient au même.

Il faut donc chercher les images des deux vecteurs de base.

Les coordonnées de l'image du premier vecteur de base  $\vec{e}_1$  s'obtiennent par de la trigonométrie simplement :

La projection de  $S_\alpha(\vec{e}_1)$  sur l'axe  $C_1$  vaut  $\cos(2\cdot\alpha)$ ,

La projection de  $S_\alpha(\vec{e}_1)$  sur l'axe  $C_2$  vaut  $\sin(2\cdot\alpha)$ .

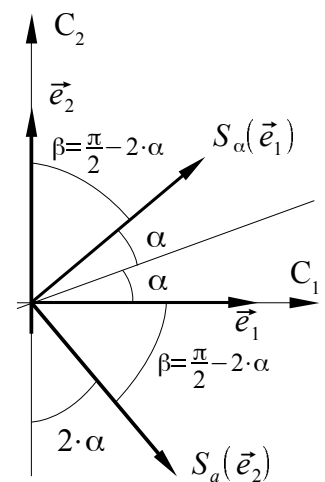
$$\text{Donc } M(S_\alpha(\vec{e}_1)) = \begin{pmatrix} \cos(2\cdot\alpha) \\ \sin(2\cdot\alpha) \end{pmatrix}.$$

Pour les coordonnées de  $S_\alpha(\vec{e}_2)$ , il faut compléter certains angles.

La projection de  $S_\alpha(\vec{e}_2)$  sur l'axe  $C_1$  vaut  $\sin(2\cdot\alpha)$ ,

La projection de  $S_\alpha(\vec{e}_2)$  sur l'axe  $C_2$  vaut  $-\cos(2\cdot\alpha)$ .

On trouve bien la matrice de la symétrie orthogonale donnée ci-dessus.



Montrons **d'une autre manière** que la **matrice d'une symétrie orthogonale** d'axe  $y = \tan(\alpha) \cdot x$  est donnée par la matrice : ( $a = \tan(\alpha)$  est la pente de l'axe)

$$M(S_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(2\cdot\alpha) & \sin(2\cdot\alpha) \\ \sin(2\cdot\alpha) & -\cos(2\cdot\alpha) \end{pmatrix}$$

Cette symétrie orthogonale peut être obtenue en faisant :

- 1) une rotation d'angle  $-\alpha$  pour amener l'axe de symétrie sur l'axe horizontale  $C_1$ .
- 2) une symétrie orthogonale par rapport à l'axe  $C_1$ .
- 3) une rotation d'angle  $\alpha$  pour ramener l'axe  $C_1$  sur l'axe de symétrie initial.

Donc

$$M(S_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$M(S_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$M(S_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) & 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) \\ 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) & \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

En utilisant les règles de trigonométrie d'additions d'angles, on obtient la matrice donnée en tête de page.

**Voici une troisième manière de faire.**

L'axe d'équation  $y = a \cdot x$  suit le vecteur  $\vec{v} = \vec{e}_1 + a \cdot \vec{e}_2$ .  $a = \tan(\alpha)$

On sait que l'axe est envoyé sur lui-même, donc :  $S_\alpha(\vec{e}_1 + a \cdot \vec{e}_2) = \vec{e}_1 + a \cdot \vec{e}_2$

La direction orthogonale est envoyée sur son opposé :  $S_\alpha(a \cdot \vec{e}_1 - \vec{e}_2) = -a \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_2$

Par le fait que  $S_\alpha$  est une transformation linéaire,

$$S_\alpha(\vec{e}_1) + a \cdot S_\alpha(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + a \cdot \vec{e}_2 \quad \text{et}$$

$$a \cdot S_\alpha(\vec{e}_1) - S_\alpha(\vec{e}_2) = -a \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

Multiplions la deuxième équation par  $a$  et additionnons les deux équations :

$$(1+a^2) \cdot S_\alpha(\vec{e}_1) = (1-a^2) \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot a \cdot \vec{e}_2. \quad \text{Donc } M(S_\alpha(\vec{e}_1)) = \begin{pmatrix} \frac{1-a^2}{1+a^2} \\ \frac{2 \cdot a}{1+a^2} \end{pmatrix}$$

Multiplions la première équation par  $a$ , la deuxième par  $-1$  et additionnons les deux équations :

$$(1+a^2) \cdot S_\alpha(\vec{e}_1) = 2 \cdot a \cdot \vec{e}_1 - (1-a^2) \cdot \vec{e}_2 \quad \text{Donc } M(S_\alpha(\vec{e}_2)) = \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot a}{1+a^2} \\ -\frac{1-a^2}{1+a^2} \end{pmatrix}$$

On trouve donc que la matrice d'une symétrie orthogonale d'axe  $y = a \cdot x$  est :

$$M(S_\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{1-a^2}{1+a^2} & \frac{2 \cdot a}{1+a^2} \\ \frac{2 \cdot a}{1+a^2} & -\frac{1-a^2}{1+a^2} \end{pmatrix} \quad \text{En utilisant } a = \tan(\alpha) \text{ et des formules de trigonométrie, on obtient : } M(S_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(2\cdot\alpha) & \sin(2\cdot\alpha) \\ \sin(2\cdot\alpha) & -\cos(2\cdot\alpha) \end{pmatrix}$$