1. Matrices

La notation matricielle fut utilisée pour la première fois en 1858 par le mathématicien anglais Arthur Cayley (1821-1895). Il l'a utilisée pour exprimer en abrégé un système d'équations linéaires. Parmi les instruments utilisés en mathématiques, cette notation demeura assez longtemps marginale parce qu'à cette époque l'emploi des mathématiques était surtout orienté vers les sciences physiques. En 1925, le physicien allemand Werner Heisenberg utilisa cet outil mathématique dans ses travaux sur la mécanique quantique. C'est toutefois l'avènement des ordinateurs ultras rapides qui a le plus influencé le développement de l'algèbre matricielle. Ceci devient très apparent depuis la fin de la seconde guerre mondiale. À partir de là, le champ d'application des matrices s'étend à l'administration, à la psychologie, à la génétique, aux statistiques, à l'économie, etc. Avec cet instrument s'est développé également un nouveau secteur des mathématiques, la programmation linéaire (recherche de solutions avec des coûts minimaux, respectant des contraintes imposées).

Quotidiennement, nous avons tous à lire, interpréter ou utiliser des tableaux de nombres. Par exemple, une échelle salariale est fréquemment donnée sous la forme :

expérience (années) / échelon	1	3	5	10
1	5'000	6'000	7'000	9'000
2	5'400	6'450	7'500	9'750
3	5'800	6'900	8'000	10'500
4	6'200	7'350	8'500	11'300

Nous appellerons ces tableaux des ***matrices***, leur manipulation nous permettra de résoudre certains problèmes.

Exemples

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Définition

Une ***matrice mxn*** (dite ***matrice m, n***) est un tableau rectangulaire de nombres où ***m*** représente le nombre de lignes et ***n*** le nombre de colonnes.

Nous emploierons une lettre majuscule pour représenter une matrice et des lettres minuscules affectées de 2 indices pour désigner les éléments de la matrice.

$a_{11} ; \ldots ; a_{ij} ; \ldots ; a_{mn}$ sont tous des nombres.
i parcourt les nombres entiers de 1 à m.
j parcourt les nombres entiers de 1 à n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.1. Somme de matrices

Si deux matrices A et B sont de même dimension, on peut obtenir leur **somme** en additionnant les éléments correspondants de chaque matrice :

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemples

1) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$

2) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} =$

1.2. Produit d'une matrice par un scalaire

C'est la matrice obtenue en multipliant chaque élément de la matrice A par le scalaire λ.
Cette opération est possible sur toute matrice et avec n'importe quel scalaire.

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Exemples

1) Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors $6 \cdot A =$

2) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ alors $-3 \cdot A =$

et $3A + 2B =$

1.3. Produit matriciel

La multiplication de matrices n'est pas une opération aussi simple que les deux opérations définies ci-dessus. Avant d'en donner la définition, nous allons étudier un problème particulier qui nous permettra de voir le sens de cette définition et ainsi de la justifier.
Considérons un marchand de tapis, tuiles et bâches qui commerce dans différentes villes de Suisse comme Genève, Lausanne, Fribourg et Neuchâtel. Les prix unitaires, au mètre carré, diffèrent selon le produit et la ville. Ainsi, le tapis se vend 60 CHF le mètre carré à Genève et Lausanne, 50 CHF à Fribourg et 70 CHF à Neuchâtel. La tuile se vend 80 CHF le mètre carré à Lausanne et Neuchâtel, 70 CHF à Genève et 90 CHF à Fribourg. La bâche se vend 40 CHF le mètre carré à Lausanne et Neuchâtel, 60 CHF à Genève et 50 CHF à Fribourg.
Complétez la matrice 4 x 3 ci-dessous, appelée matrice des prix :

Matrice des prix : $\begin{array}{c} \\ \text{Genève} \\ \text{Lausanne} \\ \text{Fribourg} \\ \text{Neuchâtel} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{tapis} & \text{tuiles} & \text{bâches} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \end{array}$

Imaginons maintenant que l'on dispose :
d'un camion n°1 contenant 120 m^2 de tapis, 140 m^2 de tuiles et 130 m^2 de bâches.
d'un camion n°2 contenant 140 m^2 de tapis, 130 m^2 de tuiles et 120 m^2 de bâches.
d'un camion n°3 contenant 130 m^2 de tapis, 110 m^2 de tuiles et 150 m^2 de bâches.

Regroupez ces 9 nombres dans une matrice 3 x 3.

dite matrice des quantités
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{camion 1} & \text{camion 2} & \text{camion 3}\end{array} \\ \begin{array}{l}\text{tapis}\\ \text{tuiles}\\ \text{bâches}\end{array} & \begin{pmatrix} \qquad & \qquad & \qquad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\end{array}$$

Selon la ville où il sera envoyé, chaque camion rapportera des revenus différents. En effet, voici le revenu en CHF de chaque camion suivant l'endroit où il est expédié :

	camion n°1	camion n°2	camion n°3
à Genève, il sera de :			
à Lausanne, il sera de :			
à Fribourg, il sera de :			
à Neuchâtel, il sera de :			

On a donc 12 revenus différents que l'on peut regrouper dans une matrice 4 x 3.

dite matrice des revenus :
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{camion 1} & \text{camion 2} & \text{camion 3}\end{array} \\ \begin{array}{l}\text{Genève}\\ \text{Lausanne}\\ \text{Fribourg}\\ \text{Neuchâtel}\end{array} & \begin{pmatrix} \qquad & \qquad & \qquad \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\end{array}$$

Ces revenus ont été obtenus en faisant la somme des produits des prix unitaires par les quantités. Ceci suggère que la matrice des revenus peut s'obtenir en multipliant la matrice des prix par celle des quantités de la façon définie à la page suivante :

Définition

Le **produit** d'une matrice A $m \times n$ par une matrice B $n \times p$ est une matrice C $m \times p$ dont chaque nombre c_{ij} s'obtient en effectuant une somme de produits, correspondant à un produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B :

$$\begin{pmatrix} . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ . & . & . & . \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} . & b_{1j} & . \\ . & b_{2j} & . \\ . & \dots & . \\ . & b_{nj} & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & c_{ij} & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \quad \text{où } c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} .$$

i parcourt les nombres entiers de 1 à m.
j parcourt les nombres entiers de 1 à n.

Exemples

1) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$

2) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} =$

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

Remarques

1. Il est important de noter que le produit d'une matrice A avec une matrice B est défini seulement si ...

2. Le produit $A \cdot B$ de deux matrices $n \times n$ est toujours défini et est ...

1.4. Matrice colonne

La définition précise d'un "*espace vectoriel*" ne sera pas donnée. Nous nous limiterons aux deux exemples suivants :
$\mathbb{R}^2$ est un **espace vectoriel** de dimension 2, qui peut être assimilé à un **plan muni d'un repère**.
$\mathbb{R}^3$ est un **espace vectoriel** de dimension 3, qui peut être assimilé à l'**espace muni d'un repère**.
Si $\vec{v}_1 ; \vec{v}_2 ; \ldots ; \vec{v}_n$ sont n vecteurs d'un espace vectoriel, et $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \ldots ; \alpha_n$ sont n nombres, on dit que le vecteur $\vec{x}$ défini par : $\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n$ est une **combinaison linéaire** des n vecteurs.
Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou $n = 3$).
Un ensemble de n vecteurs $B_n = \{\vec{e}_1 ; \vec{e}_2 ; \ldots ; \vec{e}_n\}$ est une **base** de $\mathbb{R}^n$ si tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de l'ensemble B_n.
n est la **dimension** de l'espace vectoriel.
Pour chaque vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$, il n'existera qu'un seul groupe de n nombres $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \ldots ; \alpha_n$ tel que $\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{e}_n$.
On peut donc associer à chaque vecteur $\vec{x}$ ce groupe de n nombres $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \ldots ; \alpha_n$ et la **matrice colonne** de $\vec{x}$ est définie par les coefficients : $M(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. La réciproque est aussi vraie.

Exemples

Pour $\vec{e}_1 = \langle 1 ; 0 \rangle$ et $\vec{e}_2 = \langle 0 ; 1 \rangle$, $B_2 = \{\vec{e}_1 ; \vec{e}_2\}$ est une base (sa **base naturelle**) de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
Écrivez le vecteur $\vec{x}$ = < 3 ; 2> comme combinaison linéaire : < 3 ; 2> = ___ $\cdot\ \vec{e}_1$ + ___ $\cdot\ \vec{e}_2$
Écrivez la *matrice colonne* correspondante au vecteur $\vec{x}$ = < 3 ; 2>. $M(\vec{x}) =$

Pour $\vec{e}_1 = \langle 1 ; 0 ; 0 \rangle$; $\vec{e}_2 = \langle 0 ; 1 ; 0 \rangle$ et $\vec{e}_3 = \langle 0 ; 0 ; 1 \rangle$, $B_3 = \{\vec{e}_1 ; \vec{e}_2 ; \vec{e}_3\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. C'est même sa **base naturelle**.
Écrivez la combinaison linéaire du vecteur $\vec{y}$ = < 4 ; –2 ; 3> = ___ $\cdot\ \vec{e}_1$ + ___ $\cdot\ \vec{e}_2$ + ___ $\cdot\ \vec{e}_3$
Écrivez la *matrice colonne* correspondante au vecteur $\vec{y}$ = < 4 ; –2 ; 3>. $M(\vec{y}) =$

1.5. Matrice identité et matrice inverse

Définition

La **matrice identité** $\boldsymbol{I}$ $n \times n$ est la matrice satisfaisant : $A \cdot I = I \cdot A = A$ pour toute matrice A.

Dans $\mathbb{R}^2$, $I =$

Dans $\mathbb{R}^3$ $I =$

Définition

La **matrice inverse** $\boldsymbol{A^{-1}}$ d'une matrice A $n \times n$ est la matrice satisfaisant : $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Remarque : si $A \cdot A^{-1} = I$, alors $A^{-1} \cdot A = I$ et réciproquement, donc il suffit de vérifier une égalité.

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Soit la matrice : $C = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$

Montrez que les matrices A et C sont inverses l'une de l'autre.
Voir la série 1 qui reprend cet exercice.

$A \cdot C =$

Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

Voir la série 1 qui reprend cet exercice.
Effectuez le produit matriciel :

$A \cdot D =$

Déduisez-en la matrice inverse de A.

$\boldsymbol{A^{-1}} =$

Est-ce que toute matrice A possède une matrice inverse ?

2. Transformations linéaires

Deux exemples comme introduction

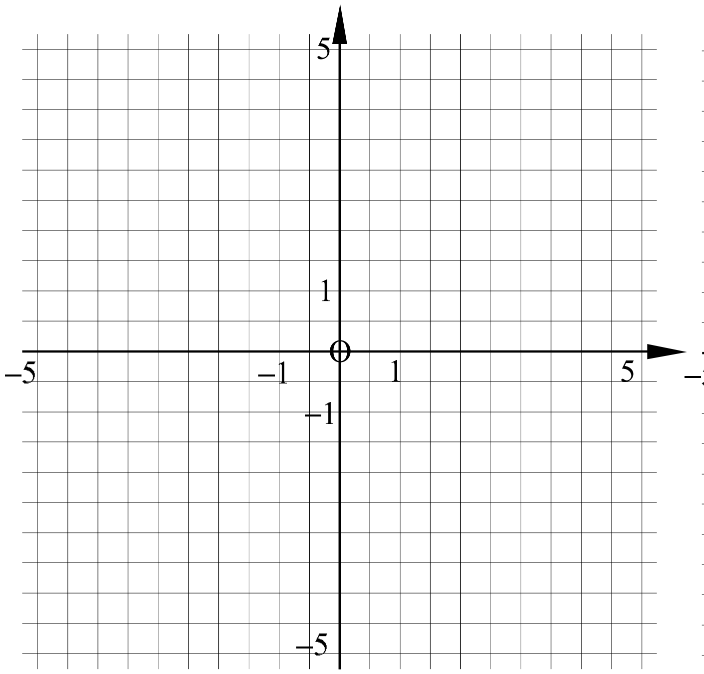
Voici deux exemples d'applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

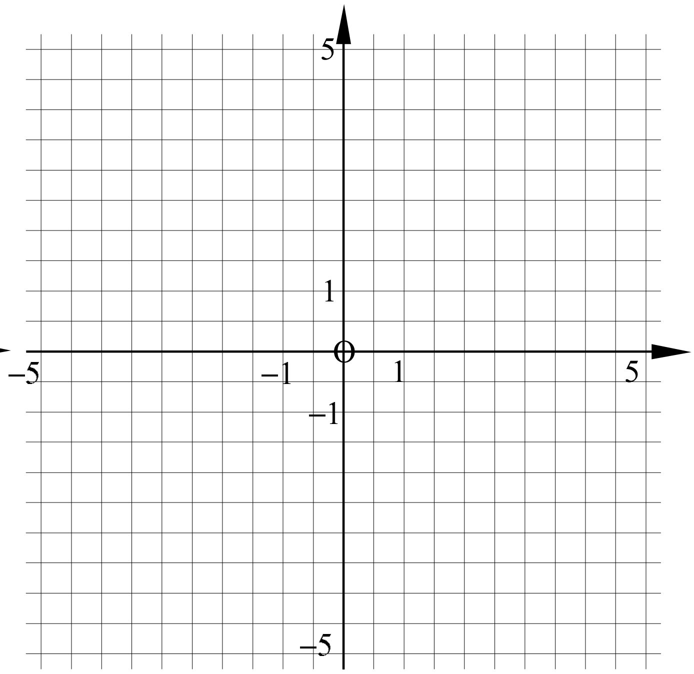
1) $f(\langle x\,;y\rangle)=\langle x\,;-y\rangle$ 2) $g(\langle x\,;y\rangle)=\langle 2x\,;2y\rangle$

Calculez les images suivantes:

$f(<-2\,;3>)=$	$f(<1\,;0>)=$	$f(<0\,;1>)=$
$g(<2\,;2.5>)=$	$g(<1\,;0>)=$	$g(<0\,;1>)=$
$f(<0\,;0>)=$	$g(<0\,;0>)=$	

Représentez les vecteurs et leur image, puis interprétez géométriquement f et g :





Ces deux exemples reviendront plus loin où leur matrice correspondante seront déterminées.

Définition
Une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est une **transformation linéaire** si et seulement si elle préserve les structures d'espace vectoriel, c'est-à-dire si:

(1) $f(\vec{v}+\vec{u})=f(\vec{v})+f(\vec{u}) \quad \forall \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$

(2) $f(\lambda \cdot \vec{v})=\lambda \cdot f(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Exercice 1
Sachant que f est une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et que $f(\langle 3;7\rangle)=\langle 5\ ;\ -3\rangle$, que vaut $f(\langle 6;14\rangle)$?

Exercice 2
Sachant que f est une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et que :

$f(\langle 1;0\rangle)=\langle 4\ ;\ 7\rangle$ et $f(\langle 0;1\rangle)=\langle -3\ ;\ 3.5\rangle$,

que valent :

1) $f(\langle 5;0\rangle)=$

2) $f(\langle 0;4\rangle)=$

3) $f(\langle 5;4\rangle)=$

4) $f(\langle x;y\rangle)=$

où x, y sont deux nombres réels.

5) Effectuez le produit : $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 3.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

6) Comparez les points 4) et 5).

Exercice 3
Sachant que f est une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et que :

$f(\langle 1;0\rangle)=\langle 2\ ;\ 1\rangle$ et $f(\langle 0;1\rangle)=\langle 0\ ;\ 1\rangle$. (Donc $f(\vec{e}_1)=\langle 2\ ;\ 1\rangle$ et $f(\vec{e}_2)=\langle 0\ ;\ 1\rangle$)

Déterminez :

$f(\langle x;y\rangle)=$

Quel produit matriciel correspondrait à $f(\langle x;y\rangle)$?

Quelle matrice caractérise la transformation linéaire f ?

Rappelons qu'une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est une **transformation linéaire** si et seulement si

(1) $f(\vec{v}+\vec{u})=f(\vec{v})+f(\vec{u}) \quad \forall \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$

(2) $f(\lambda \cdot \vec{v})=\lambda \cdot f(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Généralisation :

Sachant que f est une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et que :

$f(\langle 1;0\rangle)=\langle a_{11};a_{21}\rangle$ et $f(\langle 0;1\rangle)=\langle a_{12};a_{22}\rangle$. (Donc $f(\vec{e}_1)=\langle a_{11};a_{21}\rangle$ et $f(\vec{e}_2)=\langle a_{12};a_{22}\rangle$)

Déterminez :

$f(\langle x;y\rangle)=$

Quel produit matriciel correspondrait à $f(\langle x;y\rangle)$?

Quelle matrice caractérise la transformation linéaire f ?

Donc f est entièrement déterminée par la connaissance de l'image de chaque vecteur de base $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. C'est un cas particulier ($n = 2$) du théorème fondamental de l'algèbre linéaire, qui s'applique aux espaces de dimension n quelconque.

Propriété

Montrez que si f est une transformation linéaire, alors $f(\vec{0})=\vec{0}$.

3. Représentation matricielle d'une transformation linéaire

Pour la suite du cours, nous travaillerons exclusivement avec les bases naturelles.
Les matrices vont nous aider à donner une représentation plus simple et claire des transformations linéaires.

La page qui précède montre qu'à toute transformation linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ correspond une matrice 2 x 2.

Théorème :
Si f est une transformation linéaire satisfaisant $f(\vec{e}_1)=\langle a_{11}; a_{21}\rangle$ et $f(\vec{e}_2)=\langle a_{12}; a_{22}\rangle$, alors

$$\boxed{f(\langle x ; y\rangle) = \langle a_{11}\cdot x + a_{12}\cdot y \ ; \ a_{21}\cdot x + a_{22}\cdot y\rangle}$$

et la matrice associée à f est : $\boxed{M(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}$

Réciproquement, à toute matrice 2 x 2 correspond une transformation linéaire définie comme ci-dessus.

Ce théorème se généralise aux transformations linéaires f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Remarques :

1. Les colonnes de $M(f)$ sont constituées par les vecteurs images des vecteurs de base.
2. $M(\vec{v})$ et $M(f(\vec{v}))$ sont des matrices colonnes. $\vec{v} = \langle x ; y\rangle$.
3. La matrice colonne de l'image de $\vec{v}$ par f est égale au produit de la matrice de f par la matrice colonne de $\vec{v}$. C'est-à-dire :

$$\boxed{M(f)\cdot M(\vec{v}) = M(f(\vec{v}))}$$

Écrit explicitement : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot x + a_{12}\cdot y \\ a_{21}\cdot x + a_{22}\cdot y \end{pmatrix}$

Exercice
Reprenez les deux exemples du début du chapitre sur les transformations linéaires :
1) $f(<x ; y>)=\langle x ; -y\rangle$ 2) $g(<x ; y>)=\langle 2x ; 2y\rangle$
et déterminez la matrice M(f) et M(g) de chacune de ces transformations linéaires.

Image d'une droite par une transformation linéaire
Théorème
L'image par une transformation linéaire d'une droite (d'un segment de droite) est une droite (un segment de droite).

Exercice :
Soit la transformation linéaire $f\left(\langle x\ ;\ y\rangle\right)=\langle 2x+y\ ;\ 3x-5y\rangle$
Soit la droite D d'équation cartésienne : $3x + 5y = 15$.
Déterminez une équation vectorielle et une équation cartésienne de l'image par f de la droite D.

Démonstration du théorème du début de la page :
Soit f une transformation linéaire.
Soit $\vec{v} = \vec{p}+\lambda\cdot\vec{d}$ $\quad \lambda\in\mathbb{R}$ l'équation vectorielle d'une droite.
$f(\vec{v}) = f(\vec{p}+\lambda\cdot\vec{d}) = f(\vec{p})+f(\lambda\cdot\vec{d}) = f(\vec{p})+\lambda\cdot f(\vec{d}) \quad \lambda\in\mathbb{R}$
Notons $\vec{w}$ l'image de $\vec{v}$, $\vec{p}\,' = f(\vec{p})$ et $\vec{d}\,' = f(\vec{d})$
L'équation ci-dessus s'écrit : $\vec{w} = \vec{p}\,'+\lambda\cdot\vec{d}\,'$ $\quad \lambda\in\mathbb{R}$ qui est bien l'équation vectorielle d'une droite.
CQFD

Cette démonstration indique également que :
° un vecteur position de la droite image est l'image d'un vecteur position de la droite d'origine ;
° un vecteur directeur de la droite image est l'image d'un vecteur directeur de la droite d'origine.

4. Les principales transformations linéaires

4.1. Un exemple

Voici un dessin dans le plan muni d'un repère : $E = \mathbb{R}^2$.
Vous pouvez repérer quelques points qui vous serviront à déterminer l'image de ce dessin par les huit transformations linéaires proposées ci-dessous.
Pour chacune : déterminez sa matrice, dessinez l'image, identifiez la transformation.

1) $f_1(\langle x ; y\rangle)=\langle -x \ ; \ y\rangle$

2) $f_2(\langle x ; y\rangle)=\langle -y \ ; \ -x\rangle$

3) $f_3(\langle x ; y\rangle)=\langle 0 \ ; \ y\rangle$

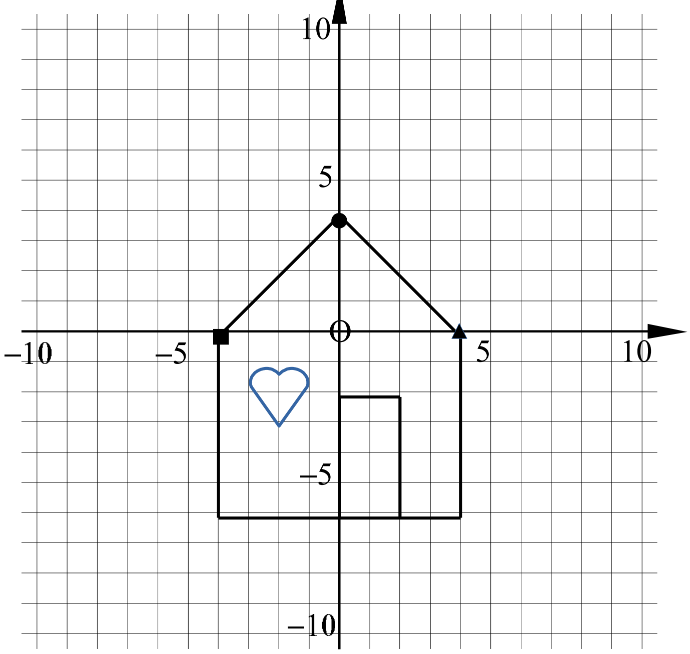
4) $f_4(\langle x ; y\rangle)=\langle -x \ ; \ -y\rangle$

5) $f_5(\langle x ; y\rangle)=\left\langle \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y \ ; \ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right\rangle$

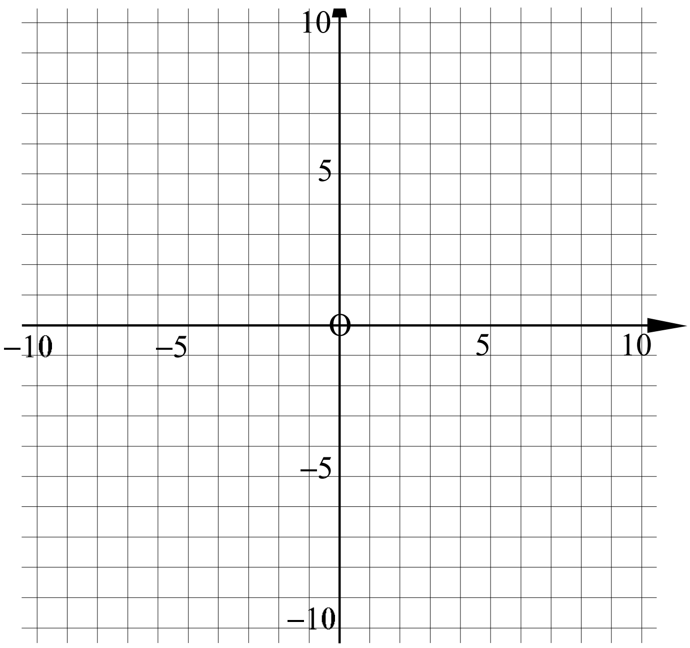
6) $f_6(\langle x ; y\rangle)=\langle 1{,}5\,x \ ; \ 1{,}5\,y\rangle$

7) $f_7(\langle x ; y\rangle)=\left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y \ ; \ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right\rangle$

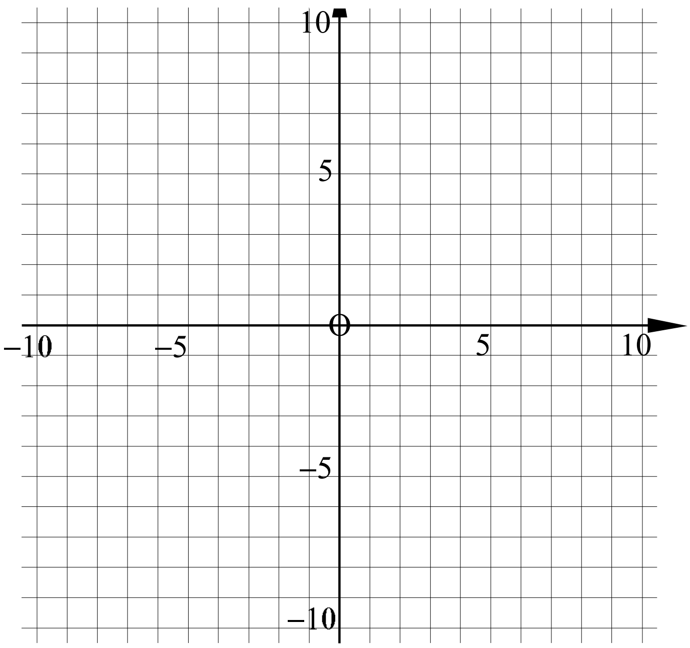
8) $f_8(\langle x ; y\rangle)=\langle -x+y \ ; \ 2x\rangle$



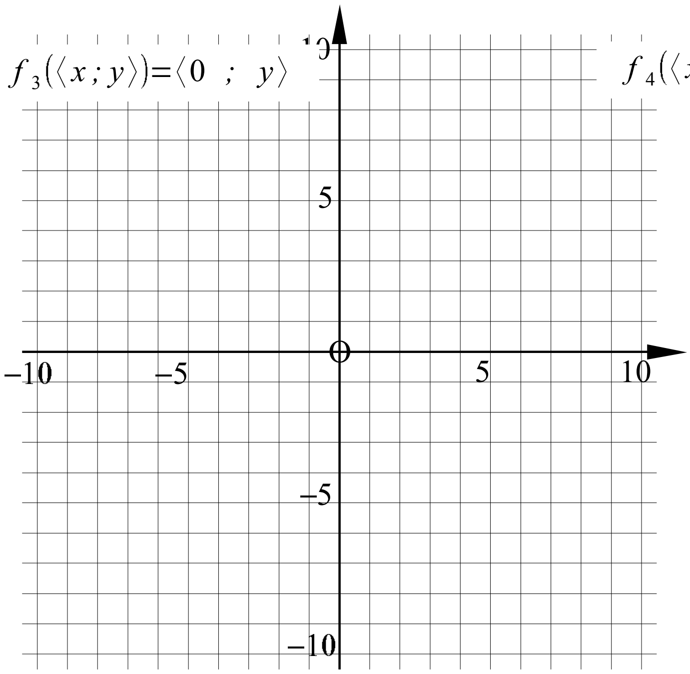
$f_1(\langle x ; y\rangle)=\langle -x \ ; \ y\rangle$



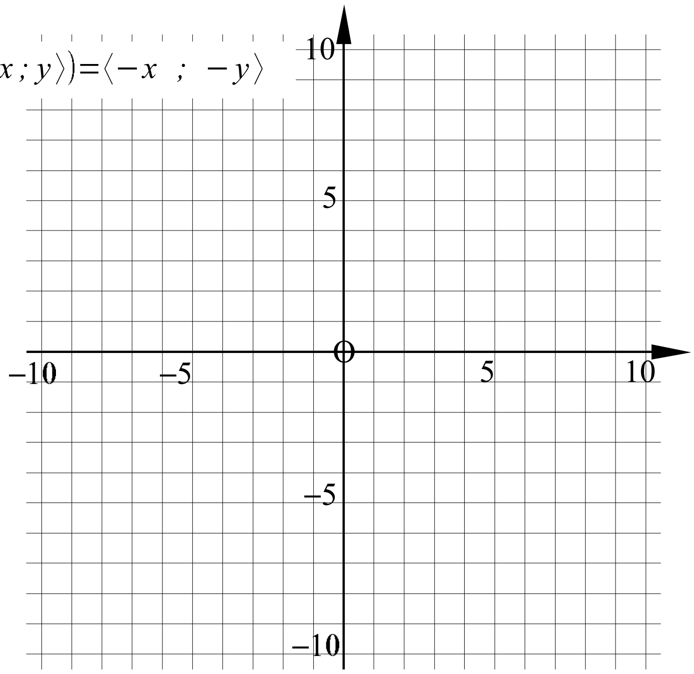
$f_2(\langle x ; y\rangle)=\langle -y \ ; \ -x\rangle$



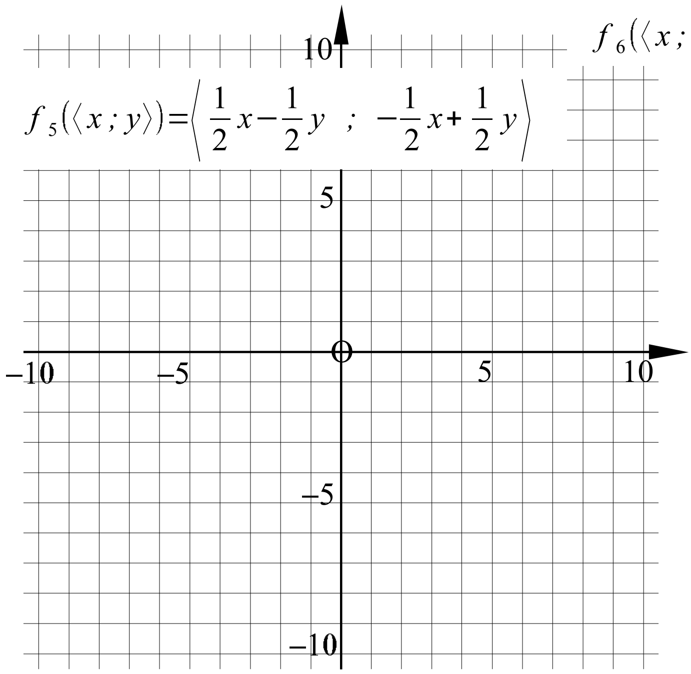
$f_3(\langle x\,;y\rangle)=\langle 0\ \ ;\ \ y\rangle$



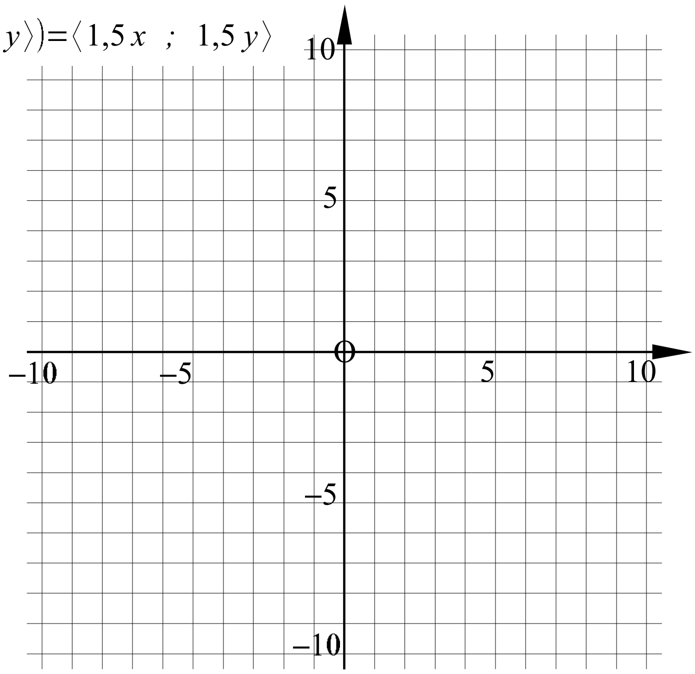
$f_4(\langle x\,;y\rangle)=\langle -x\ \ ;\ \ -y\rangle$



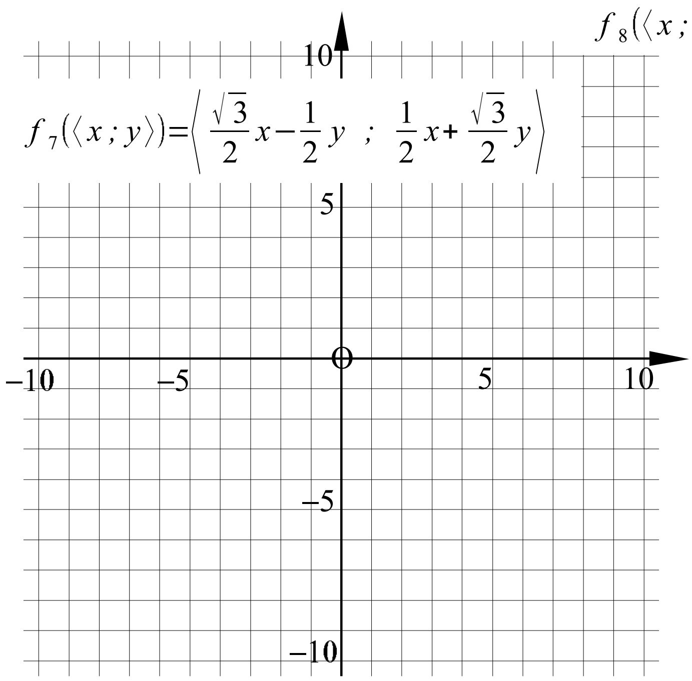
$f_5(\langle x\,;y\rangle)=\left\langle \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\ \ ;\ \ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right\rangle$



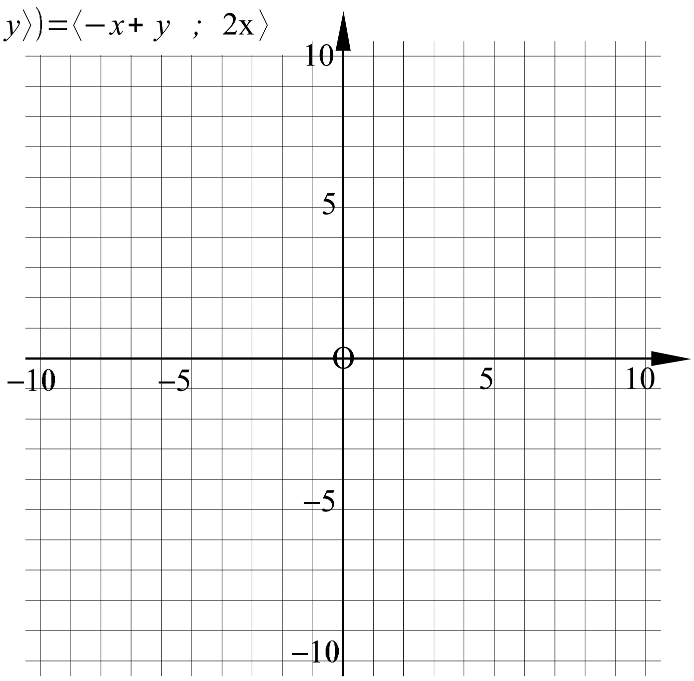
$f_6(\langle x\,;y\rangle)=\langle 1{,}5\,x\ \ ;\ \ 1{,}5\,y\rangle$



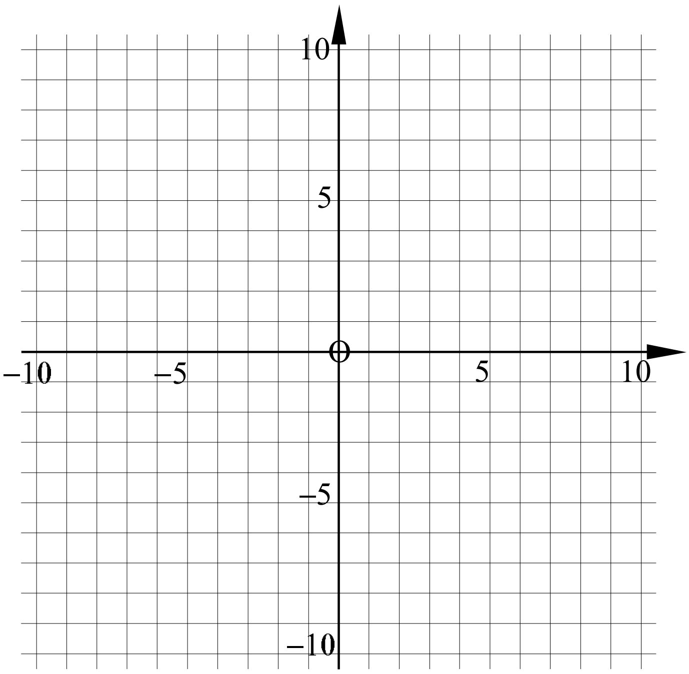
$f_7(\langle x\,;y\rangle)=\left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\ \ ;\ \ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right\rangle$



$f_8(\langle x\,;y\rangle)=\langle -x+y\ \ ;\ \ 2\mathrm{x}\rangle$



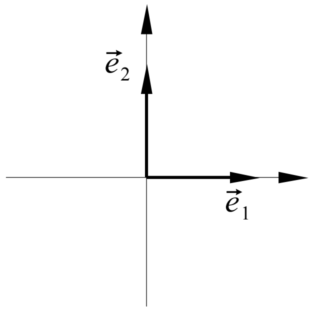
Et si on prend l'application suivante : $f_9(\langle x\,;y\rangle)=\langle x+1\;\;;\;\;y-2\rangle$, qu'advient-il de ce dessin ?
f_9 est-elle linéaire ?



4.2. Matrices des principales Transformations Linéaires de $\mathbb{R}^2$ (base canonique)

1. Symétrie orthogonale par rapport à l'axe C_1 (notons-la S_1)

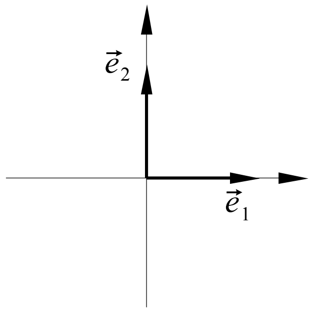
$M(S_1) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$



$S_1(\langle x\;\;;\;\;y\rangle) =$

2. Symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice (notons-la S_{B1})

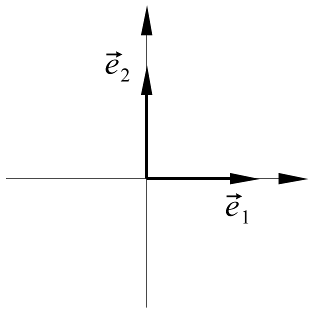
$M(S_{B1}) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$



$S_{B1}(\langle x\;\;;\;\;y\rangle) =$

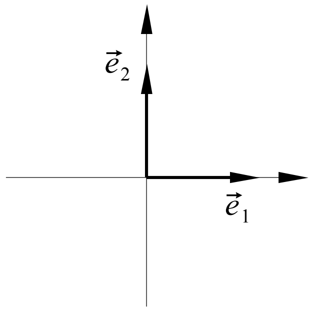
3. Symétrie centrale par rapport à l'origine (notons-la S_0)

$M(S_0) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$



$S_0(\langle x\;\;;\;\;y\rangle) =$

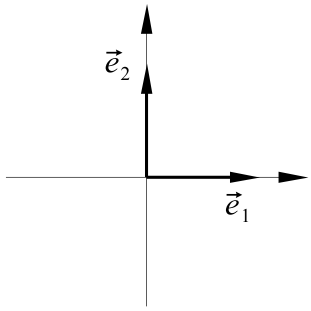
4. Projection orthogonale sur l'axe C_1 (notons-la P_1)



$$M(P_1) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$P_1(\langle x \;;\; y\rangle) =$

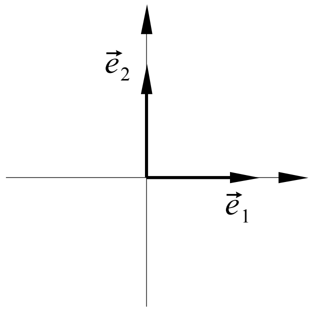
5. Projection orthogonale sur la première bissectrice (notons-la P_{B1})



$$M(P_{B1}) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$P_{B1}(\langle x \;;\; y\rangle) =$

6. Homothétie de centre l'origine et de rapport k (notons-la H_k)

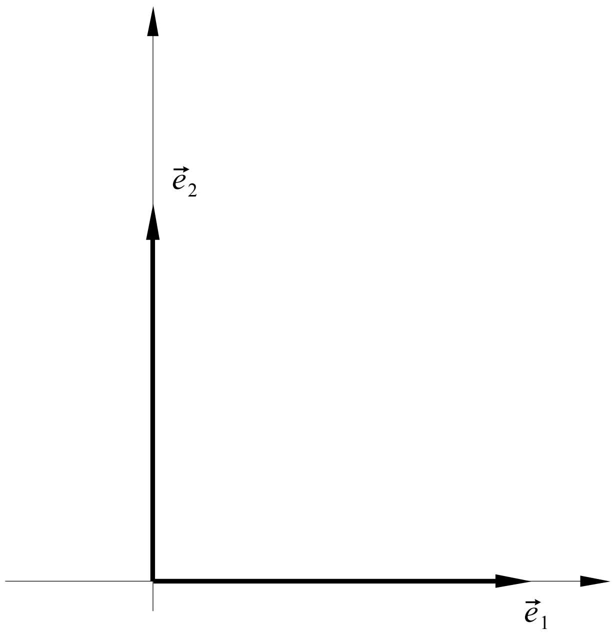


$$M(H_k) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$H_k(\langle x \;;\; y\rangle) =$

7. Rotation d'angle α dans le sens trigonométrique et de centre l'origine (notons-la R_α)

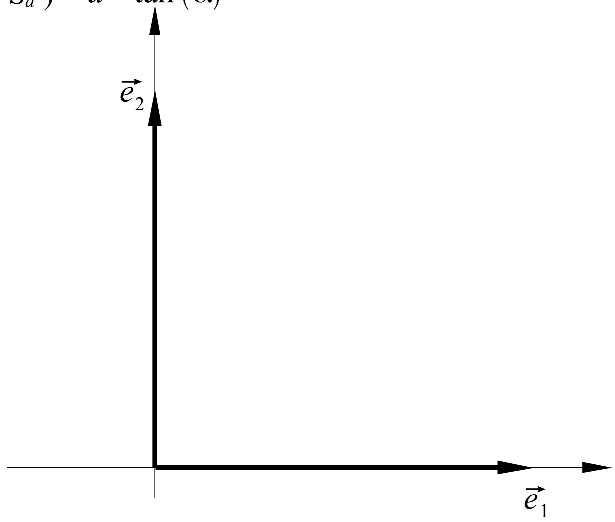
$$M(R_\alpha) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$



$R_\alpha(\langle x \;;\; y\rangle) =$

8. Symétrie orthogonale d'axe $y = a \cdot x$ (notons-la S_a) $a = \tan(\alpha)$

$$M(S_a) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$



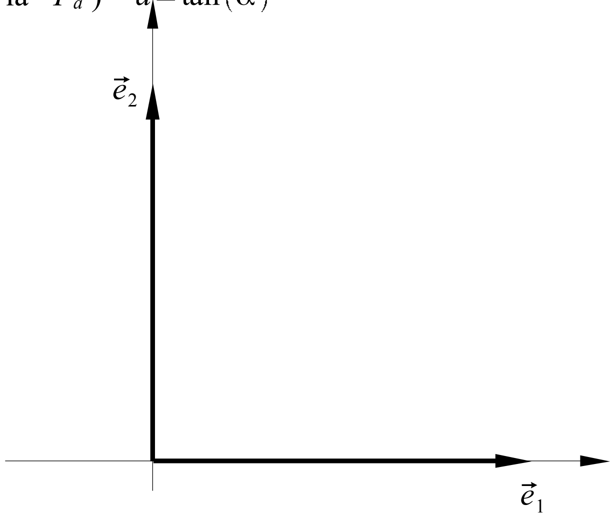
$S_a(\langle x \;;\; y\rangle) =$

Autre manière de déterminer la matrice d'une symétrie orthogonale S_a d'axe $y = a \cdot x$.
Exemple pour la droite d'équation $y = 6 \cdot x$.
Pour trouver la matrice de S_6 il suffit de trouver les images des deux vecteurs de bases.
Un vecteur directeur de cette droite est : $\vec{v} = \langle 1 \;;\; 6\rangle = \vec{e}_1 + 6\cdot\vec{e}_2$.
L'image par S_6 de ce vecteur directeur est égal à lui même.
1) $S_6(\vec{e}_1 + 6\cdot\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 6\cdot\vec{e}_2$
L'image par S_6 d'un vecteur perpendiculaire au vecteur directeur est égal à son opposé.
2) $S_6(6\cdot\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = -6\cdot\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ $6\cdot\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ est perpendiculaire à $\vec{e}_1 + 6\cdot\vec{e}_2$!
Sachant que S_6 est une transformation linéaire, de 1) et de 2) on en déduit que :
1') $S_6(\vec{e}_1) + 6\cdot S_6(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 6\cdot\vec{e}_2$
2') $6\cdot S_6(\vec{e}_1) - S_6(\vec{e}_2) = -6\cdot\vec{e}_1 + \vec{e}_2$
En multipliant les deux membres de la deuxième égalité par 6 et en additionnant 1) et 2) :
$$37\cdot S_6(\vec{e}_1) = -35\cdot\vec{e}_1 + 12\cdot\vec{e}_2 \quad \text{donc : } S_6(\vec{e}_1) = \frac{-35}{37}\cdot\vec{e}_1 + \frac{12}{37}\cdot\vec{e}_2$$
En multipliant les deux membres de la première égalité par 6 et en soustrayant 2) de 1) :
$$37\cdot S_6(\vec{e}_2) = 12\cdot\vec{e}_1 + 35\cdot\vec{e}_2 \quad \text{donc : } S_6(\vec{e}_2) = \frac{12}{37}\cdot\vec{e}_1 + \frac{35}{37}\cdot\vec{e}_2$$
On en déduit : $M(S_6) = \begin{pmatrix} -\frac{35}{37} & \frac{12}{37} \\ \frac{12}{37} & \frac{35}{37} \end{pmatrix}$.

L'avantage de cette méthode est d'avoir un résultat exact sous forme de fraction.

9. Projection orthogonale sur l'axe $y = a \cdot x$ (notons-la P_a) $a = \tan(\alpha)$

$$M(P_a) = \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix}$$



$P_a(\langle x \ ; \ y \rangle) =$

Autre manière de déterminer la matrice d'une projection orthogonale P_a sur l'axe $y = a \cdot x$.
Exemple pour la droite d'équation $y = 6 \cdot x$.
Pour trouver la matrice de P_6 il suffit de trouver les images des deux vecteurs de bases.
Un vecteur directeur de cette droite est : $\vec{v} = \langle 1 \ ; 6 \rangle = \vec{e}_1 + 6\cdot\vec{e}_2$.

L'image par P_6 de ce vecteur directeur est égal à lui-même.

1) $P_6(\vec{e}_1 + 6\cdot\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 6\cdot\vec{e}_2$

L'image par P_6 d'un vecteur perpendiculaire au vecteur directeur est le vecteur nul.

2) $P_6(6\cdot\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \vec{0}$ $\qquad$ $6\cdot\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ est perpendiculaire à $\vec{e}_1 + 6\cdot\vec{e}_2$!

Sachant que P_6 est une transformation linéaire, de 1) et de 2) on en déduit que :

1') $P_6(\vec{e}_1) + 6\cdot P_6(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 6\cdot\vec{e}_2$

2') $6\cdot P_6(\vec{e}_1) - P_6(\vec{e}_2) = 0$

En multipliant les deux membres de la deuxième égalité par 6 et en additionnant 1) et 2) :

$37\cdot P_6(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 6\cdot\vec{e}_2$ donc : $P_6(\vec{e}_1) = \frac{1}{37}\cdot\vec{e}_1 + \frac{6}{37}\cdot\vec{e}_2$

En multipliant les deux membres de la première égalité par 6 et en soustrayant 2) de 1) :

$37\cdot P_6(\vec{e}_2) = 6\cdot\vec{e}_1 + 36\cdot\vec{e}_2$ donc : $P_6(\vec{e}_2) = \frac{6}{37}\cdot\vec{e}_1 + \frac{36}{37}\cdot\vec{e}_2$

On en déduit : $M(P_6) = \begin{pmatrix} \frac{1}{37} & \frac{6}{37} \\ \frac{6}{37} & \frac{36}{37} \end{pmatrix}$.

L'avantage de cette méthode est d'avoir un résultat exact sous forme de fraction.

5. Composée d'applications linéaires et réciproque

5.1 Composée d'applications linéaires

Si on désire composer successivement des applications linéaires, la matrice finale s'obtient par multiplication des matrices correspondantes.

Théorème *:*

Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ sont deux applications linéaires, alors :

1) $g \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ est linéaire
2) $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$

Remarques *:*

$M(g)$ est une matrice $p \times n$; $M(f)$ est une matrice $n \times m$ et $M(g \circ f)$ est une matrice $p \times m$.

Exemple

Étant donné : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(\langle x ; y \rangle) = \langle x ; x+y \rangle$ et

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(\langle x ; y \rangle) = \langle 2x ; y ; x-y \rangle$,

calculez $(g \circ f)(\langle x ; y \rangle)$

5.2 Réciproque d'une application linéaire et matrice associée

Définition :

L'application linéaire **identité** $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est celle définie par : $I(\vec{v}) = \vec{v}$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Définition :

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire.

S'il existe une application linéaire ${}^r f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que ${}^r f \circ f = I$ et $f \, {}^r \circ f = I$, alors

${}^r f$ est appelée l'**application linéaire réciproque** de l'application linéaire *f*.

C'est la même notion de réciproque d'une fonction.

Exercice :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par la matrice : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

Montrez que la matrice de l'application linéaire réciproque de f est : $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Théorème :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par la matrice : $M(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

On définit $Det = Det(M(f)) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ qui s'appelle le **déterminant** de la matrice *M*(*f*).

Montrez que si $Det \neq 0$, la matrice de l'application linéaire réciproque de f est : $\frac{1}{Det} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.