1. Matrices

La notation matricielle fut utilisée pour la première fois en 1858 par le mathématicien anglais Arthur Cayley (1821-1895). Il l'a utilisée pour exprimer en abrégé un système d'équations linéaires. Parmi les instruments utilisés en mathématiques, cette notation demeura assez longtemps marginale parce qu'à cette époque l'emploi des mathématiques était surtout orienté vers les sciences physiques. En 1925, le physicien allemand Werner Heisenberg utilisa cet outil mathématique dans ses travaux sur la mécanique quantique. C'est toutefois l'avènement des ordinateurs ultra rapides qui a le plus influencé le développement de l'algèbre matricielle. Ceci devient très apparent depuis la fin de la seconde guerre mondiale. À partir de là, le champ d'application des matrices s'étend à l'administration, à la psychologie, à la génétique, aux statistiques, à l'économie, etc. Avec cet instrument s'est développé également un nouveau secteur des mathématiques, la programmation linéaire (recherche de solutions avec des coûts minimaux, respectant des contraintes imposées).

Quotidiennement, nous avons tous à lire, interpréter ou utiliser des tableaux de nombres. Par exemple, une échelle salariale est fréquemment donnée sous la forme :

expérience (années) échelon	1	3	5	10
1	5'000	6'000	7'000	9'000
2	5'400	6'450	7'500	9'750
3	5'800	6'900	8'000	10'500
4	6'200	7'350	8'500	11'300

Nous appellerons ces tableaux des ***matrices***, leur manipulation nous permettra de résoudre certains problèmes.

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Définition :
Une ***matrice $m \times n$*** (dite ***matrice m, n***) est un tableau rectangulaire de nombres où m représente le nombre de lignes et n le nombre de colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Nous emploierons une lettre majuscule pour représenter une matrice et des lettres minuscules affectées de 2 indices pour désigner les éléments de la matrice :

On la note aussi : $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

1.1. Somme de matrices

Si deux matrices A et B sont de même dimension, on peut obtenir leur **somme** en additionnant les éléments correspondants de chaque matrice : $A+B \; = \; (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$

Exemples

1) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} =$

1.2. Produit d'une matrice par un scalaire

C'est la matrice obtenue en multipliant chaque élément de la matrice A par le scalaire λ :
$\lambda \cdot A \; = \; (\lambda \cdot a_{ij})_{m\times n}$. Cette opération est possible sur toute matrice et avec n'importe quel scalaire.

Exemples

1) Si $A \; = \; \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors $6 \cdot A =$

2) Si $A \; = \; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ alors $-3 \cdot A =$

et $3A + 2B =$

1.3. Produit matriciel

La multiplication de matrices n'est pas une opération aussi simple que les deux opérations définies ci-dessus. Avant d'en donner la définition, nous allons étudier un problème particulier qui nous permettra de voir le sens de cette définition et ainsi de la justifier.
Considérons un marchand de tapis, tuiles et bâches qui commerce dans différentes villes du Canada comme Sept-Iles, Rouyn, Rimouski et Montréal. Les prix unitaires, au mètre carré, diffèrent selon le produit et la ville. Ainsi, le tapis se vend 7 dollars le mètre carré à Sept-Iles, mais 6 dollars à Montréal. La tuile se vend 5 dollars le mètre carré à Rouyn et 4 dollars à Rimouski, et ainsi de suite.
Regroupons ces prix dans la matrice suivante :

ce des prix.

$$\begin{array}{l c} & \begin{matrix} \text{tapis} & \text{tuiles} & \text{bâches} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Sept-Iles} \\ \text{Rouyn} \\ \text{Rimouski} \\ \text{Montréal} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ 8 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Imaginons maintenant que l'on dispose d'un camion contenant 1'200 m^2 de tapis, 1'400 m^2 de tuiles et 1'500 m^2 de bâches.

On peut regrouper ces nombres dans une matrice 3 x 1.

dite matrice des quantités $\begin{array}{l} \text{tapis} \\ \text{tuiles} \\ \text{bâches} \end{array} \begin{pmatrix} 1'200 \\ 1'400 \\ 1'500 \end{pmatrix}$

Selon la ville où il sera envoyé, le camion rapportera des revenus différents. En effet, voici le revenu suivant l'endroit ou il est expédié :

à Sept-Iles, il sera de :

à Rouyn, il sera de :

à Rimouski, de :

et enfin à Montréal, il sera de :

On a donc 4 revenus différents que l'on peut regrouper dans une matrice 4 x 1.

dite matrice des revenus. $\begin{array}{l} \text{Sept}-\text{Iles} \\ \text{Rouyn} \\ \text{Rimouski} \\ \text{Montréal} \end{array} \begin{pmatrix} 28'800 \\ 27'100 \\ 20'600 \\ 23'100 \end{pmatrix}$

Ces revenus ont été obtenus en faisant le produit des prix par les quantités. Ceci suggère que la matrice des revenus peut s'obtenir en multipliant la matrice des prix par celle des quantités de la façon suivante :

Définition

Le produit d'une matrice A $m \times n$ par une matrice B $n \times p$ est une matrice C $m \times p$ dont chaque élément c_{ij} s'obtient en multipliant la $i^{ème}$ ligne de A par la $j^{ème}$ colonne de B :

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ . \\ . \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ c_{ij} \\ \\ \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} \,.$$

Exemples :

1) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$

2) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} =$

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

Remarques

1. Il est important de noter que le produit d'une matrice A avec une matrice B est défini seulement si ...

2. Le produit $A \cdot B$ de deux matrices $n \times n$ est toujours défini et est ...

1.4. Matrice colonne

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $B = [\vec{b}_1 \ ; \ \vec{b}_2 \ ; \ ... \ ; \ \vec{b}_n]$ une base de E.

Par exemple : le plan $E = \mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel de dimension 2 et B = [<1 ; 0> ; <0 ; 1>] en est une base, car on peut exprimer n'importe quel vecteur de E comme combinaison linéaire des vecteurs <1 ; 0> et <0 ; 1>. Exemple : < 3 ; 2> = ... · <1 ; 0> + ... · <0 ; 1>.
L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension 3 et B = [<1 ; 0 ; 0> ; <0 ; 1 ; 0> ; <0 ; 0 ; 1>] en est une base, car on peut exprimer n'importe quel vecteur de E comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs. Exemple : < 4 ; –2 ; 3> = ... · <1 ; 0 ; 0> + ... · <0 ; 1 ; 0> + ... · <0 ; 0 ; 1>.

Si E est un espace vectoriel de dimension n et $B = [\vec{b}_1 \ ; \ \vec{b}_2 \ ; \ ... \ ; \ \vec{b}_n]$ est une base de E, alors tout vecteur $\vec{x}$ de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de base :

$$\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{b}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{b}_2 + ... + \alpha_n \cdot \vec{b}_n$$

et la matrice colonne de $\vec{x}$ est définie par les coefficients : $M(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

Exemples :

Dans $E = \mathbb{R}^2$ et B = [<1 ; 0> ; <0 ; 1>], la matrice colonne de <3 ; 2> =

Dans $E = \mathbb{R}^3$ et B = [<1 ; 0 ; 0> ; <0 ; 1 ; 0> ; <0 ; 0 ; 1>], la matrice colonne de <4 ; –2 ; 3> =

2. Transformations linéaires

Deux exemples comme introduction

Voici deux exemples d'applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

1) $f(\langle x;y\rangle)=\langle x;-y\rangle$ 2) $g(\langle x;y\rangle)=\langle 2x;2y\rangle$

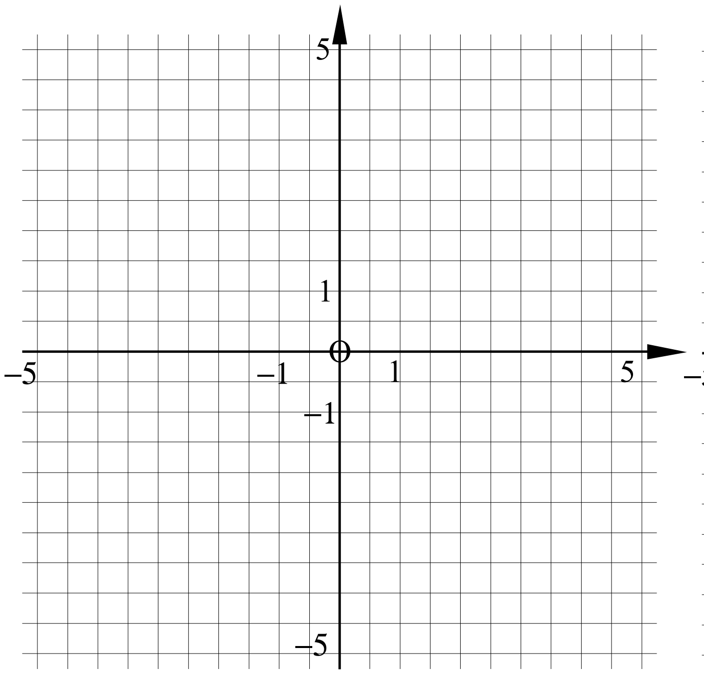
Pourquoi ces relations sont-elles des applications ?
Calculez les images suivantes:

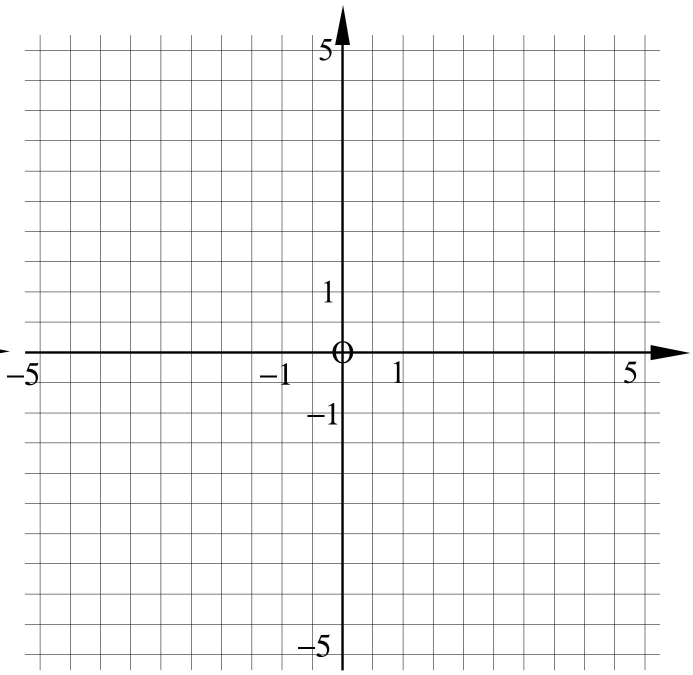
$f(<-2;3>)=$ $f(<1;0>)=$ $f(<0;1>)=$

$g(<2;3>)=$ $g(<1;0>)=$ $g(<0;1>)=$

$f(<0;0>)=$ $g(<0;0>)=$

Interprétez géométriquement f et g :





Remarque
On a $f(<3;2>)=\langle 3;-2\rangle$
Mais aussi, en exprimant tous les vecteurs comme combinaison linéaire des vecteurs de base $\langle 1;0\rangle$ et $\langle 0;1\rangle$:

$f(<3;2>)=f...$

$\langle 3;-2\rangle=...$

Toute application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant ces deux propriétés est appelée une **transformation linéaire**.

Définition
Une application de E dans E est une **transformation linéaire** si et seulement si elle préserve les structures d'espace vectoriel, c'est-à-dire si:

(1) $f(\vec{v}+\vec{u})=f(\vec{v})+f(\vec{u}) \quad \forall\ \vec{v},\vec{u}\in E$

(2) $f(\lambda\cdot\vec{v})=\lambda\cdot f(\vec{v}) \quad \forall\ \vec{v}\in E,\ \forall\ \lambda\in\mathbb{R}$

En général:

Tout $\vec{v}=\langle x\,;y\rangle$ relativement à la **base canonique** $[\vec{e}_1\ ;\ \vec{e}_2]$ s'écrit aussi $\vec{v}=x\cdot\vec{e}_1+y\cdot\vec{e}_2$.
Si f est une transformation linéaire, alors :

$f(\vec{v})=...$

Donc f est entièrement déterminée par la connaissance de l'image de chaque vecteur de base $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.
C'est un cas particulier ($n=2$) du théorème fondamental de l'algèbre linéaire, qui s'applique aux espaces de dimension n quelconque.

Exercice

Montrez que si f est une transformation linéaire, alors $f(\vec{0})=\vec{0}$.

Exercice

Considérons l'application $f(<x\,;y>)=\langle 2x\ ;\ x+y\rangle$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

1) Vérifiez qu'il s'agit d'une transformation linéaire.
2) Calculez l'image par f de chacun des vecteurs de base, puis exprimez-la comme combinaison linéaire des vecteurs de base $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.
3) Exprimez $f(\vec{v})$ comme combinaison linéaire des vecteurs de base $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.
4) Essayez de deviner quel calcul matriciel pourrait résumer tous les calculs précédents.

3. Représentation matricielle d'une transformation linéaire

Les matrices vont nous aider à donner une représentation plus simple et claire des transformations linéaires. Pour le voir, reprenons l'exercice précédent :

Soit la transformation linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(<x\,;y>)=\langle 2x\ ;\ x+y\rangle$.

Nous avons obtenu : $f(\vec{e}_1)=2\cdot\vec{e}_1+1\cdot\vec{e}_2$

$f(\vec{e}_2)=0\cdot\vec{e}_1+1\cdot\vec{e}_2$

$f(\vec{v})=f(<x\,;y>)=2\cdot x\cdot\vec{e}_1+(x+y)\cdot\vec{e}_2$

Ce qui se traduit matriciellement par : $\begin{pmatrix}2 & . \\ 1 & .\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}. & 0 \\ . & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\x+y\end{pmatrix}$$

La matrice associée à f est donc $M(f)=\begin{pmatrix}2 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$

Exercice

Reprenez les deux exemples du paragraphe précédent:

1) $f(<x\,;y>)=\langle x\,;-y\rangle$ 2) $g(<x\,;y>)=\langle 2x\,;2y\rangle$

et déterminez la matrice de chacune de ces transformations linéaires.

Conclusion

Il est plus facile de calculer des images pour une transformation linéaire f en construisant sa matrice $M(f)$ et en employant les matrices colonnes pour $\vec{v}$ et $f(\vec{v})$:

$$M(f)\cdot M(\vec{v})=M(f(\vec{v}))$$

Remarques

1. Les colonnes de $M(f)$ sont constituées par les vecteurs images des vecteurs de base.
2. $M(\vec{v})$ et $M(f(\vec{v}))$ sont des matrices colonnes.

4. Les principales transformations linéaires

4.1. Un exemple

Voici un dessin dans le plan $E = \mathbb{R}^2$.

Vous pouvez repérer quelques points qui vous serviront à déterminer l'image de ce dessin par les huit transformations linéaires proposées ci-dessous.
Pour chacune : déterminez sa matrice, dessinez l'image, identifiez la transformation.

1) $f_1(\langle x\,;y\rangle)=\langle -x\ ;\ y\rangle$

2) $f_2(\langle x\,;y\rangle)=\langle -y\ ;\ -x\rangle$

3) $f_3(\langle x\,;y\rangle)=\langle 0\ ;\ y\rangle$

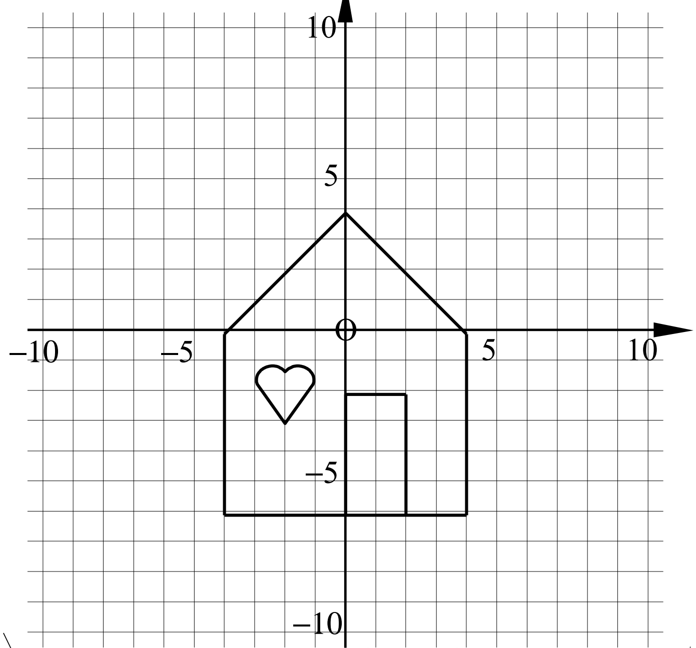
4) $f_4(\langle x\,;y\rangle)=\langle -x\ ;\ -y\rangle$

5) $f_5(\langle x\,;y\rangle)=\left\langle \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\ ;\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right\rangle$

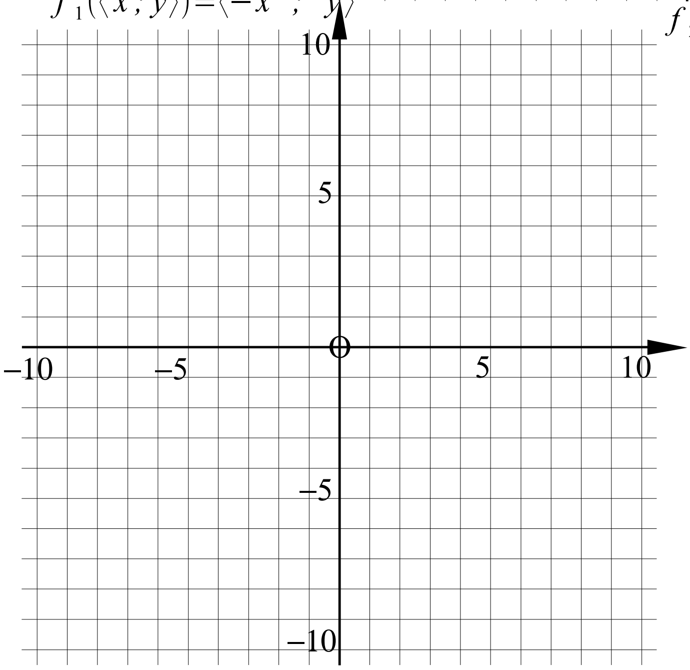
6) $f_6(\langle x\,;y\rangle)=\langle 1.5\,x\ ;\ 1.5\,y\rangle$

7) $f_7(\langle x\,;y\rangle)=\left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\ ;\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right\rangle$

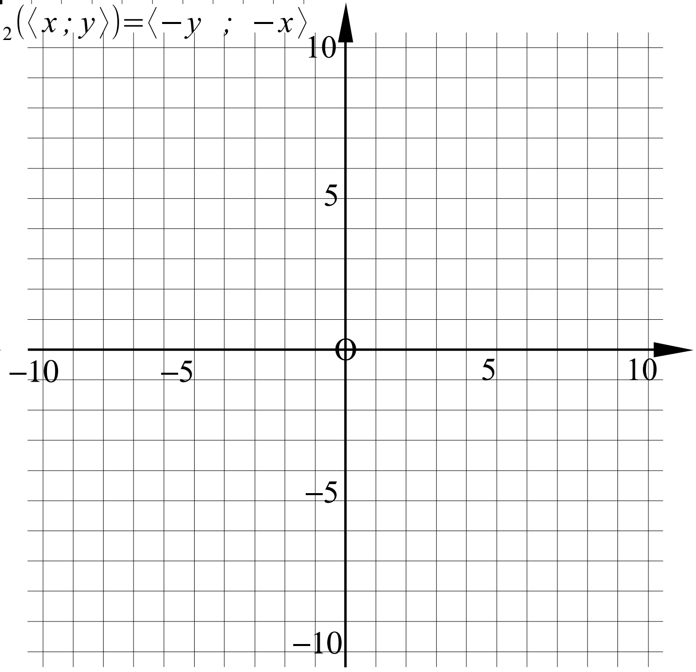
8) $f_8(\langle x\,;y\rangle)=\langle -x+y\ ;\ 2\mathrm{x}\rangle$



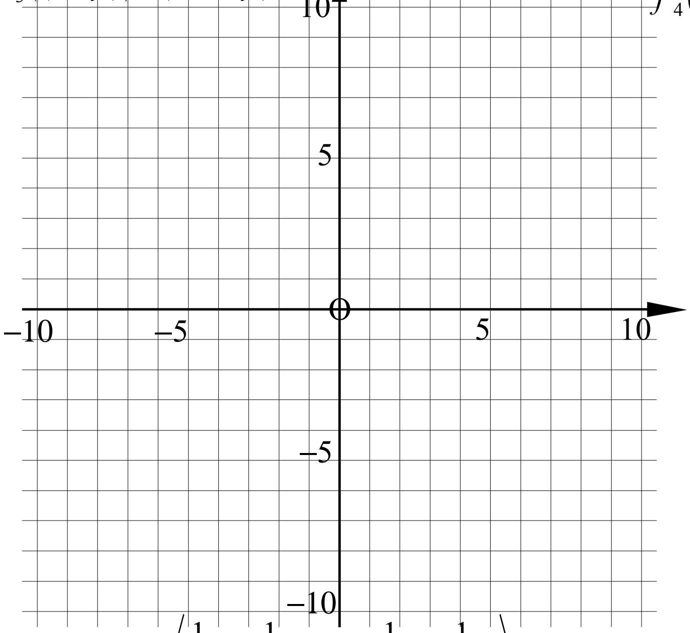
$f_1(\langle x\,;y\rangle)=\langle -x\ ;\ y\rangle$



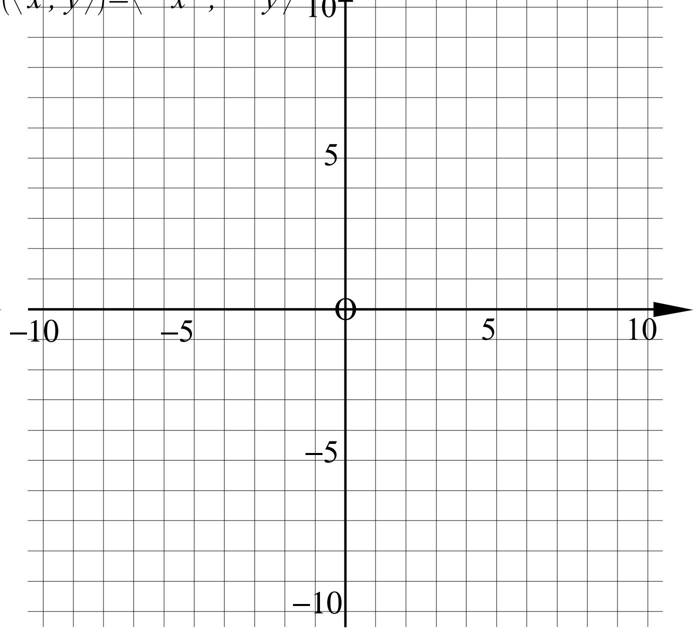
$f_2(\langle x\,;y\rangle)=\langle -y\ ;\ -x\rangle$



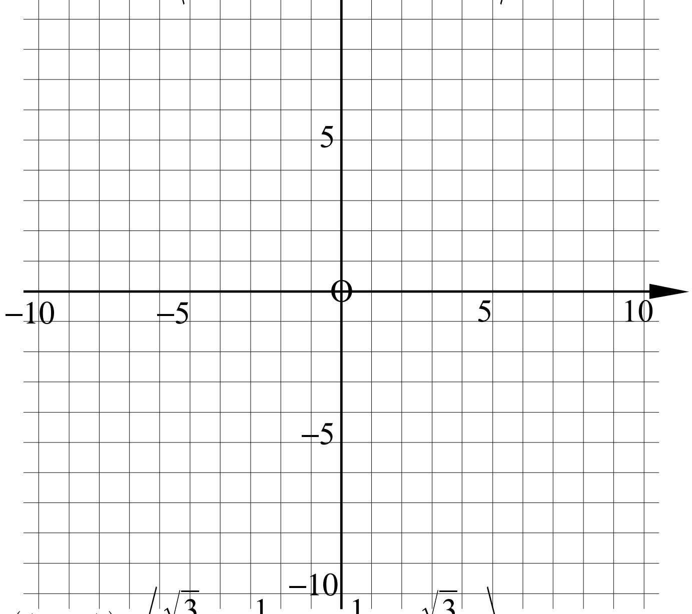
$f_3(\langle x\,;y\rangle)=\langle 0\ \ ;\ \ y\rangle$



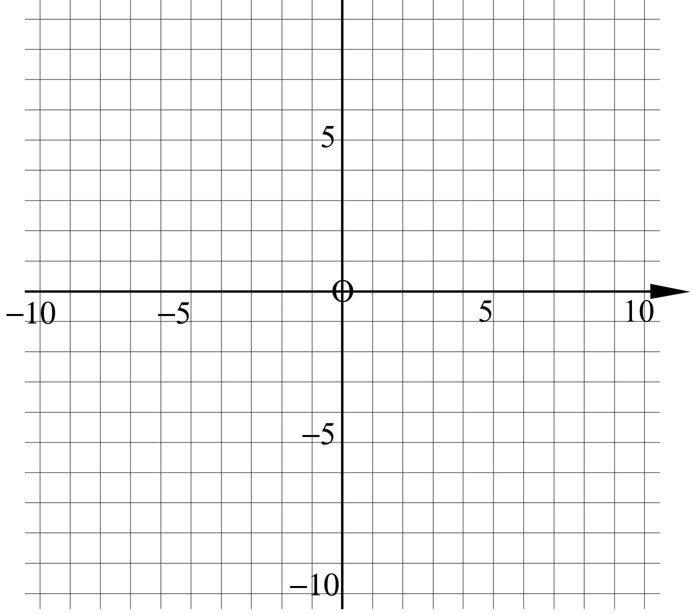
$f_4(\langle x\,;y\rangle)=\langle -x\ \ ;\ \ -y\rangle$



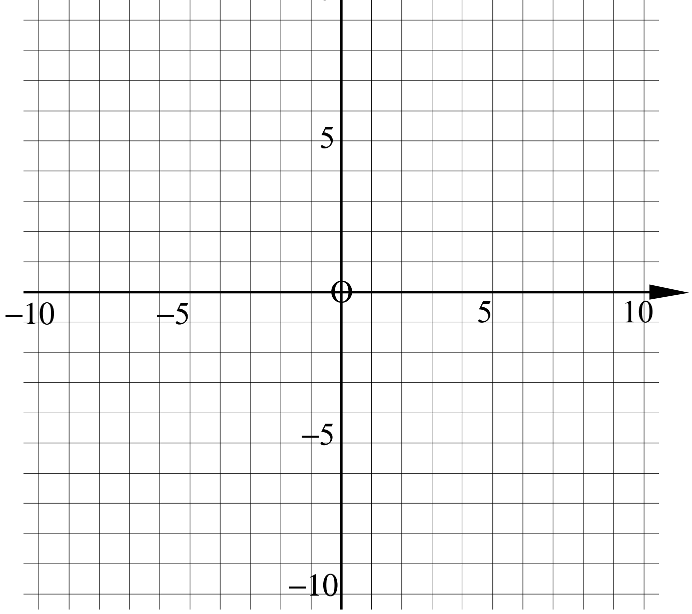
$f_5(\langle x\,;y\rangle)=\left\langle \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\ \ ;\ \ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right\rangle$



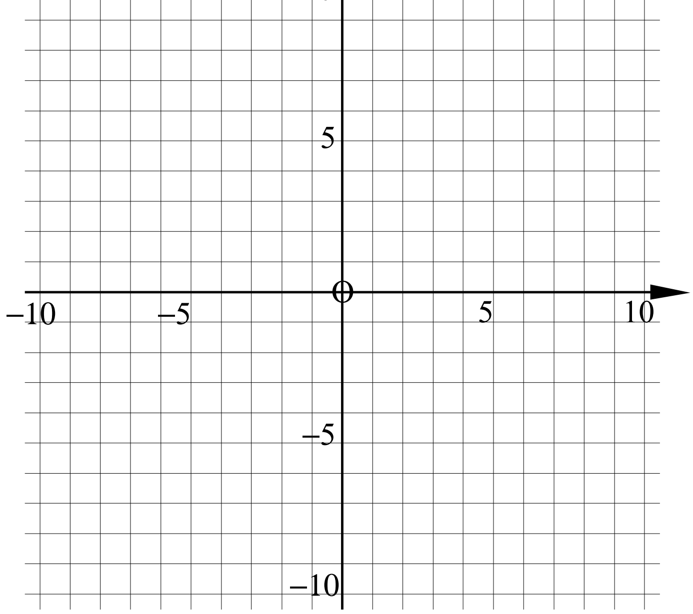
$f_6(\langle x\,;y\rangle)=\langle 1.5x\ \ ;\ \ 1.5y\rangle$



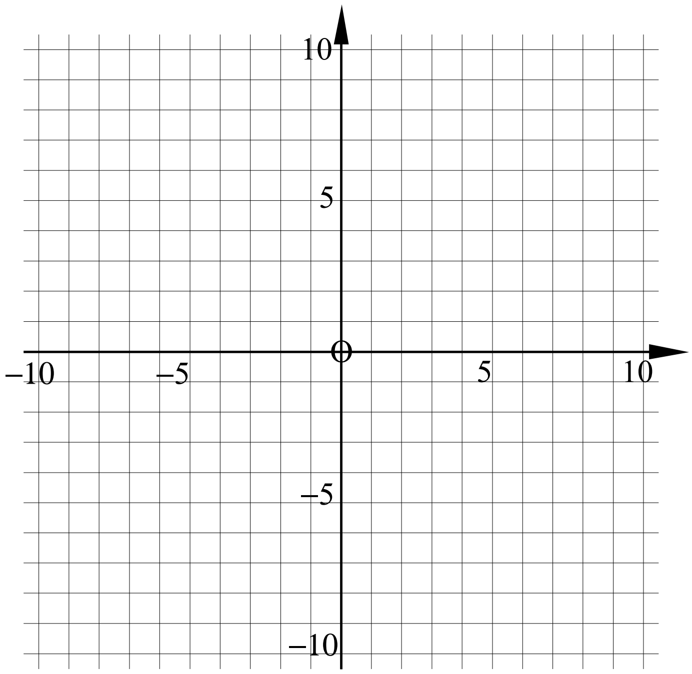
$f_7(\langle x\,;y\rangle)=\left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\ \ ;\ \ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right\rangle$



$f_8(\langle x\,;y\rangle)=\langle -x+y\ \ ;\ \ 2x\rangle$

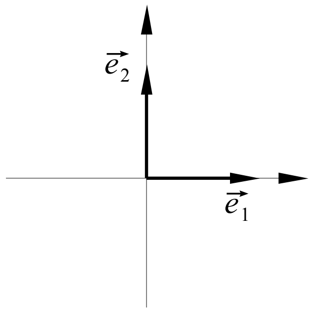


Et si on prend l'application suivante : $f_9(\langle x\,;y\rangle)=\langle x+1 \;\; ; \;\; y-2\rangle$, qu'advient-il de ce dessin ?
f_9 est-elle linéaire ?



4.2. Matrices des principales Transformations Linéaires de $\mathbb{R}^2$ (base canonique)

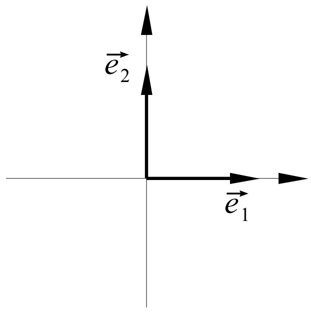
1. Symétrie orthogonale par rapport à l'axe C_1 (notons-là S_1)



$M(S_1) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

$S_1(\langle x \;\; ; \;\; y\rangle) =$

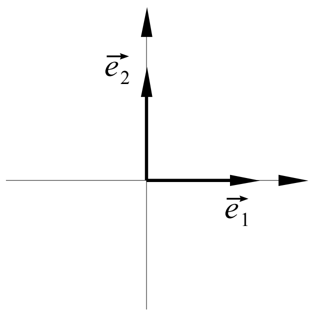
2. Symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice (notons-là S_{B1})



$M(S_{B1}) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

$S_{B1}(\langle x \;\; ; \;\; y\rangle) =$

3. Symétrie centrale par rapport à l'origine (notons-là S_0)

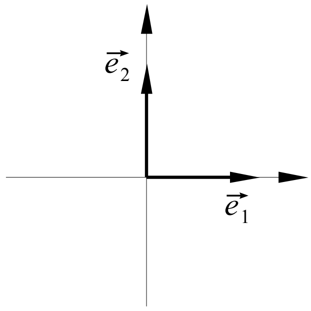


$M(S_0) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

$S_0(\langle x \;\; ; \;\; y\rangle) =$

4. Projection orthogonale sur l'axe C_1 (notons-la P_1)

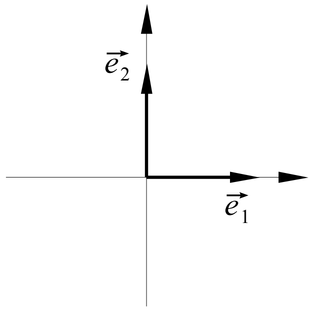
$$M(P_1) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$



$P_1(\langle x \ ; \ y \rangle) =$

5. Projection orthogonale sur la première bissectrice (notons-là P_{B1})

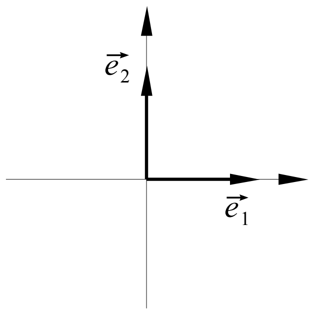
$$M(P_{B1}) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$



$P_{B1}(\langle x \ ; \ y \rangle) =$

6. Homothétie de centre l'origine et de rapport k (notons-là H_k)

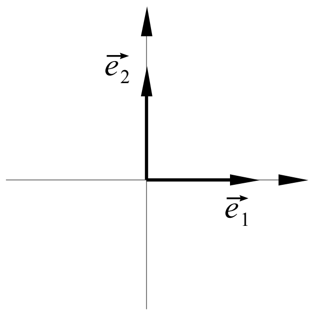
$$M(H_k) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$



$H_k(\langle x \ ; \ y \rangle) =$

7. Rotation d'angle α dans le sens trigonométrique et de centre l'origine (notons-là R_α)

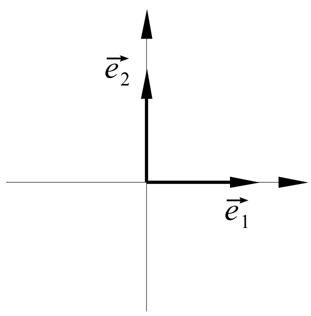
$$M(R_\alpha) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$



$R_\alpha(\langle x \ ; \ y \rangle) =$

8. Symétrie orthogonale d'axe $y = a \cdot x$ (notons-là S_a) $a = \tan(\alpha)$

$$M(S_a) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$



$S_a(\langle x \ ; \ y \rangle) =$

5. Composée d'applications linéaires

Si on désire composer successivement des applications linéaires, la matrice finale s'obtient par multiplication des matrices correspondantes.

Théorème :

Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ sont deux applications linéaires, alors :

1) $g \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ est linéaire
2) $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$

Remarques :

$M(g)$ est une matrice $p \times n$; $M(f)$ est une matrice $n \times m$ et $M(g \circ f)$ est une matrice $p \times m$.

Exercices

1. Etant donné $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(<x\,;y>) = \langle x\,; x+y \rangle$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(<x\,;y>) = \langle 2x\ ;\ y\ ;\ x-y \rangle$, calculez $(g \circ f)(<x\,;y>)$.

2. Montrez que dans le plan, la composée d'une rotation d'angle α et d'une rotation d'angle β est une rotation d'angle γ, à déterminer.

3. A quelle transformation linéaire correspond une symétrie orthogonale d'axe C_1, suivie d'une rotation d'angle -2α. (c'est-à-dire d'angle 2α. dans le sens des aiguilles d'une montre) ?
   Prouvez votre réponse algébriquement et graphiquement.
   Comment se traduit matriciellement l'expression "suivie de" ?

4. Quelle est l'image du triangle de sommets $\langle 2\ ;\ 0 \rangle$, $\langle 2\ ;\ 3 \rangle$ et $\langle 5\ ;\ 3 \rangle$ par une rotation d'angle de 30°, suivie d'une homothétie de rapport 2, suivie d'une symétrie d'axe C_1, suivie d'une projection orthogonale sur l'axe C_1 ?