I. Rappels et introduction

En troisième année, vous avez étudié la notion de limite et diverses applications, telles que la recherche d'asymptotes, la définition de la continuité, l'utilisation de la dérivée pour déterminer des extremums de fonctions et leurs variations.

Définition :
Lorsque x tend vers a, la limite de $f(x)$ égale L, signifie que lorsque x tend vers a, $f(x)$ tend vers L.

Notation : $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = L}$

Parfois on ne s'intéresse qu'au cas où $x < a$.
On parle alors de "**la limite à gauche**". On écrit : $\boxed{\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L}$

De manière similaire, on peut s'intéresse au cas où $x > a$.
On parle alors de "**la limite à droite**". On écrit : $\boxed{\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L}$

La dérivée d'une fonction f en un point a est une *limite particulière*. Rappelons sa définition.
Définition :
Si la limite : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, on dit que "**la fonction f est dérivable en a**".
Dans ce cas, on définit le **nombre dérivé** de la fonction f au point a par :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

$f'(a)$ s'appelle aussi : "**la dérivée de la fonction f en a**".
Géométriquement, **la dérivée de f en a vaut la pente de la tangente à f en $(a\,;f(a))$.**

Cette année, vous allez rencontrer une autre limite particulière.
En *additionnant énormément de nombres minuscules*, vers quelle limite tendent ces sommes ?

$$S_{10} = \underbrace{\frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{11} + \frac{1}{11}}_{10 \text{ termes}} \qquad S_{100} = \underbrace{\frac{1}{101} + \frac{1}{101} + \ldots + \frac{1}{101} + \frac{1}{101}}_{100 \text{ termes}}$$

$$S_{1'000} = \underbrace{\frac{1}{1'001} + \frac{1}{1'001} + \ldots + \frac{1}{1'001} + \frac{1}{1'001}}_{1'000 \text{ termes}} \qquad S_N = \underbrace{\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+1} + \ldots + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+1}}_{N \text{ termes}} = \frac{N}{N+1}$$

$$\lim_{N \to \infty} S_N = ?\ldots = \lim_{N \to \infty} \frac{N}{N+1} = 1$$

Il est moins facile de déterminer vers quel nombre se rapproche : $\tilde{S}_N = \dfrac{1}{N^2} + \dfrac{2}{N^2} + \dfrac{3}{N^2} + \dfrac{4}{N^2} + \ldots + \dfrac{N}{N^2}$

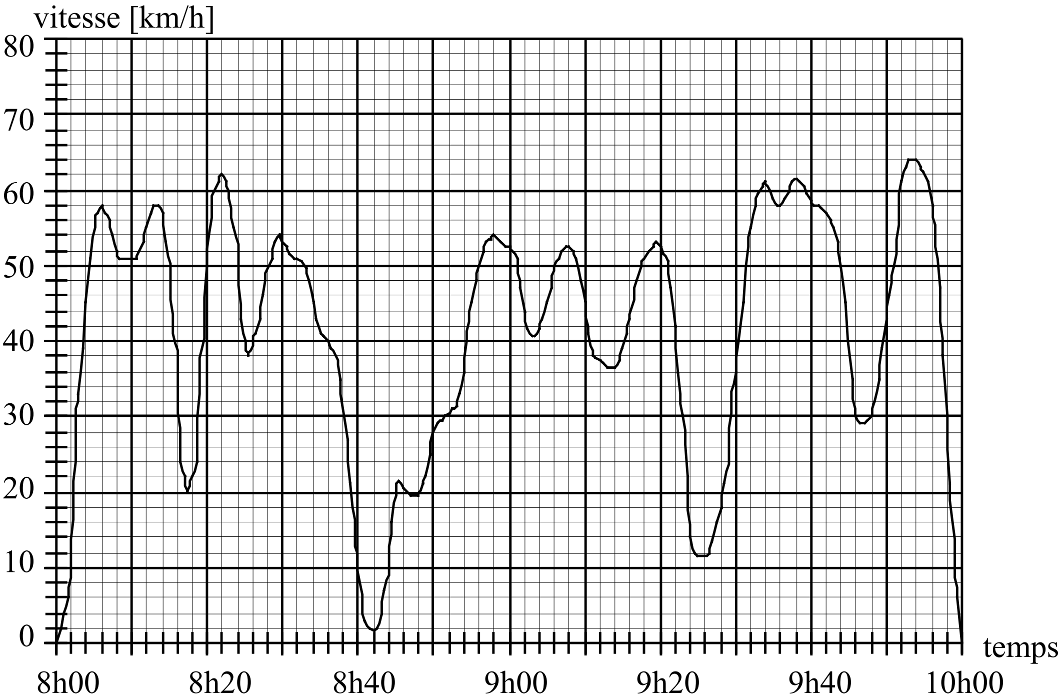
lorsque N tend vers l'infini. $\tilde{S}_N = \lim\limits_{N \to \infty} \dfrac{N \cdot (N+1)}{2 \cdot N^2} = \dfrac{1}{2}$

II. Sommes de nombreux petits nombres

Activité II.1. Le tachygraphe

La sécurité routière a pensé que le nombre des accidents de la route diminuerait si l'on parvenait à contrôler plus efficacement la vitesse des camions. Elle a alors proposé que tous les camions soient équipés d'un tachygraphe (appareil qui enregistre la vitesse du véhicule à chaque instant). Néanmoins, on peut craindre que les appareils ou les enregistrements ne soient modifiés frauduleusement dans le but de montrer que la vitesse maximale autorisée n'a été dépassée à aucun moment. Un moyen simple de repérer les éventuels fraudeurs serait de comparer la distance au compteur effectivement parcourue et la distance calculée à partir de l'enregistrement donné par le tachygraphe. Encore faut-il pouvoir calculer cette distance !

Ci-dessous vous trouverez le graphique d'un enregistrement de la vitesse d'un camion en fonction du temps, pour une durée de 2 heures.

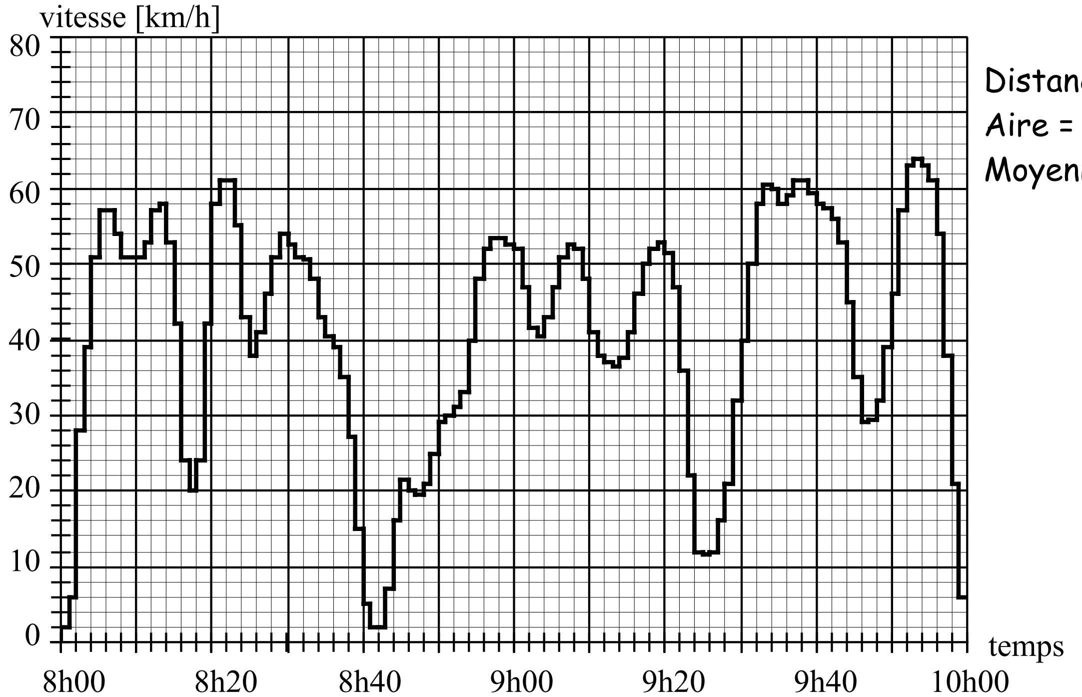


1.1 Estimez, le plus précisément possible, la distance totale parcourue par le camion durant ces deux heures.
Si le graphique ci-dessus ne vous suffit pas, cherchez de l'inspiration à la page suivante.
Les graphiques suivants permettent de d'estimer l'aires sous la courbe et donc la distance parcourue en 2 heures. Elle est d'environ 82,20 [km].

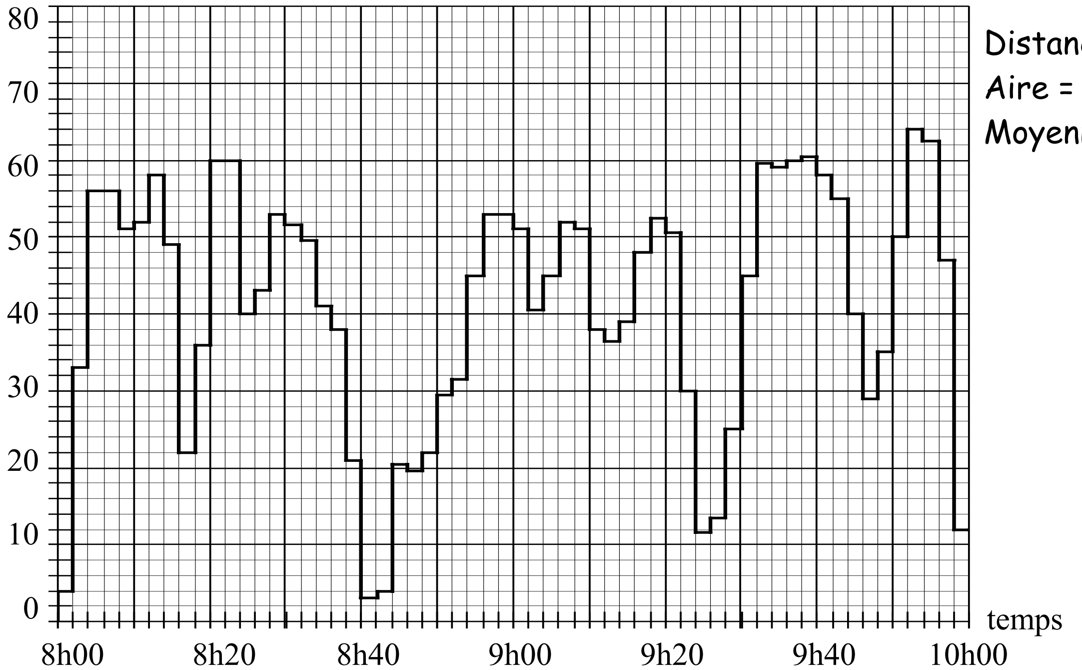
1.2 Estimez la vitesse moyenne de ce même camion durant ce même laps de temps. Pouvez-vous faire apparaître cette vitesse moyenne sur le graphique ?
La vitesse moyenne est donc d'environ 82,20 [km] / (2 [h]) = 41,10 [km/h].

Rappelez-vous que si la vitesse est constante, la distance égale : vitesse fois temps. $d = v \cdot t$.

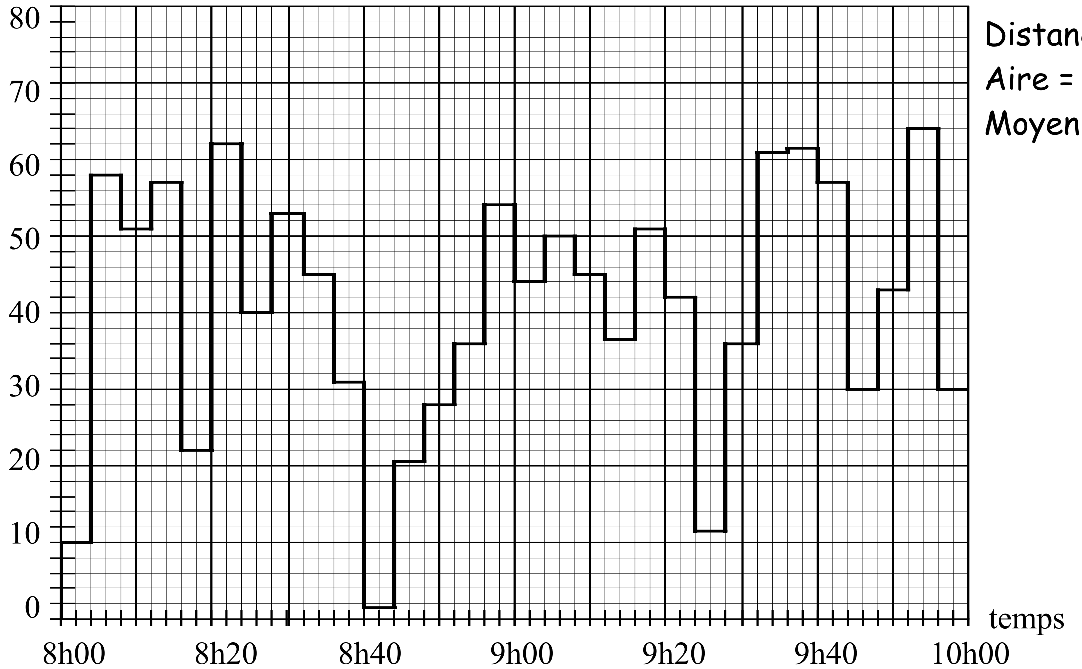
Travaillez par groupe en essayant de trouver une méthode commune dans votre groupe.



Distance =
Aire = 82,20 [km]
Moyenne = 41,10 [km/h]

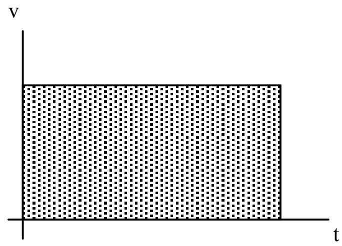


Distance =
Aire = 82,52 [km]
Moyenne = 41,26 [km/h]

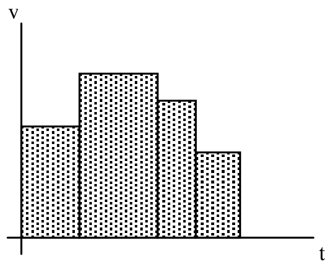


Distance =
Aire = 82,10 [km]
Moyenne = 41,05 [km/h]

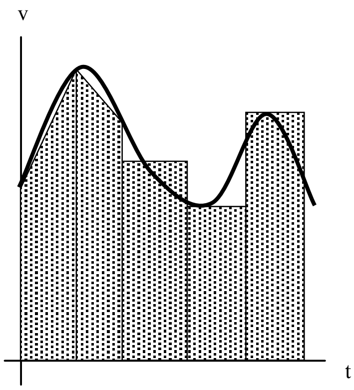
Synthèse de l'activité II.1.



Lorsqu'un véhicule se déplace à vitesse constante, la distance parcourue est égale à la vitesse multipliée par le temps. Sur le graphique de la vitesse en fonction du temps, **la distance** est représentée par **l'aire rectangulaire sous le graphe de la fonction.**

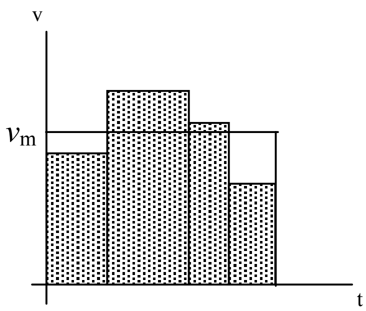


Si la vitesse change d'un intervalle de temps à l'autre, mais reste constante sur un intervalle donné, le graphique de la vitesse est composé de segments horizontaux (fonction en escalier). On peut trouver la *distance totale parcourue* en **additionnant** les aires des différents rectangles.



Si le graphe de la vitesse est celui d'une courbe quelconque, il faut se contenter d'approcher par une fonction en escalier ou affine par morceaux. La *distance totale* est obtenue en **additionnant** les aires des différents quadrilatères choisis.
On adaptera les intervalles de temps en fonction de l'importance des variations de la vitesse.

Ainsi d'une manière générale, on peut considérer que **l'aire sous la courbe $v(t)$ représente la distance totale parcourue. Elle est approchée par une somme de petites aires.**

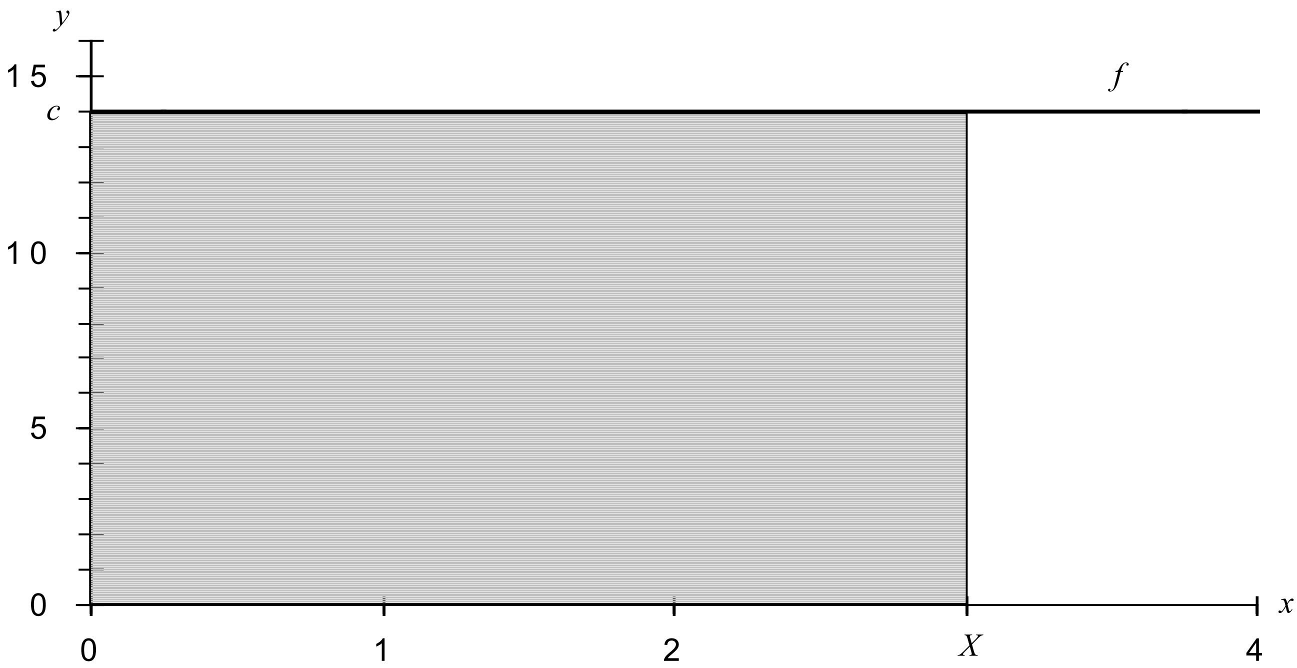


La **vitesse moyenne v_m** est égale à la distance totale parcourue divisée par la durée du trajet.
Elle représente la vitesse constante à laquelle il faudrait se déplacer pendant le même laps de temps, pour parcourir la même distante.
Elle est représentée sur le graphique par la hauteur du rectangle dont l'aire est égale à l'aire sous la courbe $v(t)$.

III. Déterminer des aires en calculant des sommes

Problème III.1, fonction constante.

On se propose de trouver l'aire $A(X)$ du domaine ombré ci-dessous. Elle dépendra des deux paramètres X et c.
Ce domaine est limité par la courbe d'équation $f(x) = c$, l'axe Ox, ainsi que par les droites d'équation $x = 0$ et $x = X$, où X et c sont deux nombres positifs quelconques.
Sur le graphique ci-dessous, les valeurs particulières $X = 3$ et $c = 14$ ont été utilisées.



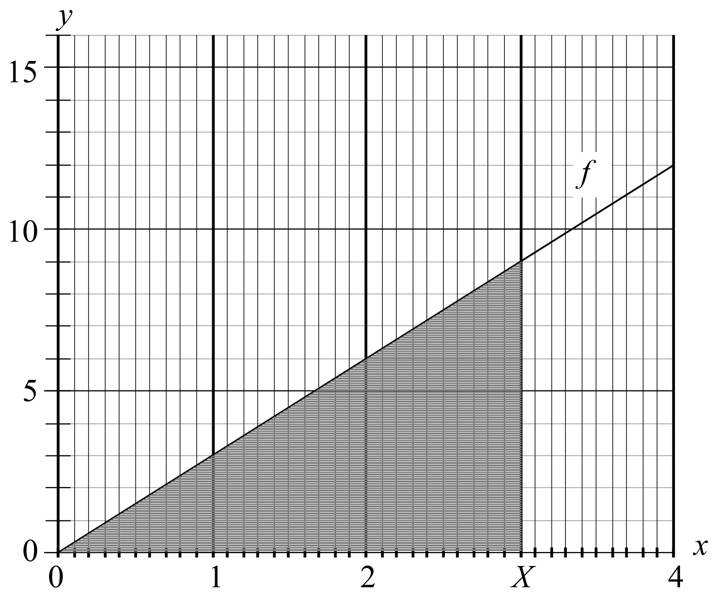
Ce problème est très simple, il consiste à calculer l'aire d'un rectangle.
Donc $A(X) = X \cdot c$.

Une constatation qui sera très importante par la suite, est le lien entre la dérivée de la fonction aire $A(X)$ et la fonction $f(X)$.

Le lien est : $A'(X) = f(X)$

Problème III.2, fonction linéaire.

On se propose de trouver l'aire $A(X)$ du domaine ombré ci-dessous. Elle dépendra des deux paramètres X et λ.
Ce domaine est limité par la courbe d'équation $f(x) = \lambda \cdot x$, l'axe Ox, ainsi que par les droites d'équation $x = 0$ et $x = X$, où X est un nombre positif quelconque.
Sur le graphique ci-dessous, les valeurs particulières $X = 3$ et $\lambda = 3$ ont été utilisées.



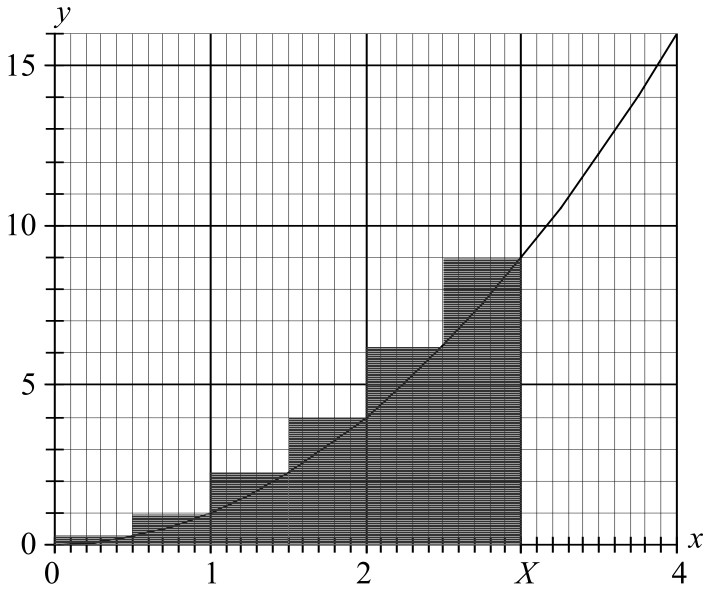
Ce problème est de nouveau très simple, il consiste à calculer l'aire d'un triangle.
Donc $A(X) = \frac{1}{2} \cdot X \cdot f(X)$, donc $A(X) = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot X^2$.

Une constatation qui sera très importante par la suite, est le lien entre la dérivée de la fonction aire $A(X)$ et la fonction $f(X)$.

Le lien est : $A'(X) = f(X)$

Problème III.3, fonction parabolique.

On se propose de trouver l'aire $A(X)$ du domaine ombré ci-dessous. Elle dépendra des deux paramètres X et λ.
Ce domaine est limité par la courbe d'équation $f(x) = \lambda \cdot x^2$, l'axe Ox, ainsi que par les droites d'équation $x = 0$ et $x = X$, où X est un nombre positif quelconque.
Sur le graphique ci-dessous, les valeurs particulières $X = 3$ et $\lambda = 1$ ont été utilisées.



Cette fois-ci, ce problème n'est pas simple. Voici une aide pour le résoudre.

Il faudra décomposer l'intervalle $[0 ; X]$ en N intervalles de largeur $\Delta x = \dfrac{X}{N}$,
où N sera un nombre qui tendra vers l'infini.

a) Pour vous aider à visualiser l'idée de la résolution, tracez sur le graphique des rectangles de bases Δx et de hauteur $f(x_i)$, où $x_i = i \cdot \Delta x$, en utilisant 6 comme valeur pour N.
i varie de 1 à N.
Remarquez que la somme des N aires des rectangles est une approximation de l'aire cherchée.

b) Ecrivez en fonction de N, X et λ la somme $S(N)$ des aires des rectangles de base Δx et de hauteur $f(x_i)$, où $x_i = i \cdot \Delta x$, i varie de 1 à N. Cette somme $S(N)$ approxime l'aire cherchée $A(X)$.
Utilisez une formule de la page 15 de la table CRM pour simplifier l'écriture de $S(N)$.

$$S(N) = \Delta x \cdot \lambda \cdot (1 \cdot \Delta x)^2 + \Delta x \cdot \lambda \cdot (2 \cdot \Delta x)^2 + \Delta x \cdot \lambda \cdot (3 \cdot \Delta x)^2 + \ldots + \Delta x \cdot \lambda \cdot (N \cdot \Delta x)^2$$

$$S(N) = \lambda \cdot \Delta x^3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + N^2\right)$$

$$S(N) = \lambda \cdot \left(\frac{X}{N}\right)^3 \cdot \frac{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{6} = \lambda \cdot X^3 \cdot \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6N^3}$$

c) Calculez la limite : $\lim\limits_{N \to \infty} S(N)$ et remarquez qu'elle correspond à l'aire cherchée $A(X)$.

$$\lim_{N \to \infty} S(N) = \lim_{N \to \infty} \lambda \cdot X^3 \cdot \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6N^3} = \lim_{N \to \infty} \lambda \cdot X^3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2}\right)$$

$$\lim_{N \to \infty} S(N) = \lambda \cdot X^3 \cdot \lim_{N \to \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2}\right) = \lambda \cdot X^3 \cdot \frac{1}{3}$$

Donc $\underline{\underline{A(X) = \dfrac{\lambda \cdot X^3}{3}}}$

Remarquez que le lien entre la dérivée de la fonction aire $A(X)$ et la fonction $f(X)$ est de nouveau satisfait. Le lien est : $A'(X) = f(X)$

La méthode utilisée ci-dessus qui consiste subdiviser $[0\,;X]$ en N intervalles puis à approximer l'aire sous la parabole par une somme d'aires de petits rectangles a déjà été utilisée par le mathématicien Pierre de Fermat au 17ème siècle.
On peut constater que cette méthode fait appel à un certain nombre d'astuces ou de connaissances algébriques, comme par exemple ici, la formule de la somme des carrés des N premiers nombres naturels. De nombreuses méthodes furent ainsi astucieusement établies pour différentes courbes, mais en l'absence de méthode générale, chaque courbe représentait un nouveau problème.

Le symbole $\sum$ pour noter des sommes.

Par la suite, il sera souvent utile de calculer des sommes du genre :

$$S = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{N-1}) + f(x_N)$$

Les trois petits points "..." ne sont pas précis et cette manière d'écrire est longue. Les mathématiciens ont donc introduit le symbole $\sum$ pour simplifier cette écriture. On note :

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)} \qquad \text{où } N \text{ est un entier positif .}$$

Donc $\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$ est une manière abrégée d'écrire $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{N-1}) + f(x_N)$.

L'indice "i" est dit **muet**, car il peut être remplacé par n'importe quelle lettre.

$\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$; $\sum_{j=1}^{N} f(x_j)$; $\sum_{k=1}^{N} f(x_k)$ représente exactement la même somme.

Synthèse de ce chapitre III.

Soit f l'une des fonctions des problèmes précédentes.

Notons $A(X)$ la fonction qui au nombre positif X, fait correspondre l'aire du domaine limité par la courbe $f(x)$, l'axe Ox, ainsi que par les droites d'équation $x = 0$ et $x = X$.

Ce chapitre montre deux points importants :

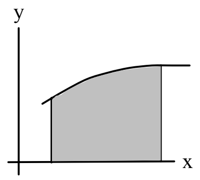
1) Une aire sous une courbe f peut être calculée comme limite de somme d'aires rectangulaires. Souvent **une limite de somme de nombreux petits nombres** correspond à un calcul d'aire sous une courbe.

   $Aire = A(X) \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \cdot \Delta x$, où $\Delta x = \dfrac{X}{N}$, x_i appartient au $i^{ème}$ intervalle.

   L'approximation est d'autant meilleure que N est grand.

2) La dérivée de la fonction A est égale à la fonction f, en abrégé : $A'(X) = f(X)$.
   Cette formule n'a pas été démontrée, mais elle a été observée de manière heuristique dans les problèmes précédents. Nous verrons que cette égalité est toujours vraie et très utiles, si la fonction f est continue.

IV. Un peu d'histoire



De nombreux problèmes peuvent être résolus grâce au calcul de l'aire « sous une courbe », c'est-à-dire de l'aire comprise entre le graphe, l'axe horizontal et deux droites verticales.
Comment calculer de telles aires ?

Intuitivement, chacun pense savoir ce qu'est l'aire d'une région délimitée par des courbes, alors que les formules que l'on connaît ne s'appliquent qu'à des surfaces limitées par des droites, telles les rectangles ou les triangles ou des cercles. La situation est semblable à celle qui consiste à déterminer la « pente » d'une courbe alors que notre définition ne s'applique qu'à la pente d'une droite.

Pendant plus de deux mille ans, différentes méthodes de calculs d'aires délimitées par des courbes ont été appliquées. En voici quelques exemples :

L'Egypte et Babylone

Dans l'antiquité, le calcul d'aire était nécessaire dans de nombreuses situations pratiques telles que le partage des terres fertiles après les crues du Nil. Différentes formules étaient alors utilisées, donnant parfois des résultats assez approximatifs.

Pour l'aire d'un disque, par exemple, les Babyloniens utilisaient la formule $\frac{c^2}{12}$, c étant le périmètre du disque. Il semble que cette formule était couramment admise, mais aucune trace de sa provenance ou d'une justification ne semble exister.

La Grèce classique

Dans la Grèce classique le point de vue adopté fut différent. L'aspect pratique devient secondaire, ce sont les questions théoriques (« qu'est-ce que l'aire ? ») et la déduction logique qui dominent.

Eudoxe[1] inventa une méthode pour le calcul de l'aire d'une surface courbe, décrite comme « le premier pas de l'analyse ». Cette méthode, appelée *méthode d'exhaustion* est décrite dans *les Eléments,* texte célèbre écrit par **Euclide**[2].

1 **Eudoxe** *vécut environ de 408 à 355 avant JC.*
2 **Euclide** *vécut environ 50 ans après Eudoxe.*

Voici un exemple d'application de cette méthode : pour trouver l'aire d'un disque, on trace, à l'intérieur du disque, un carré dont les sommets sont sur le cercle .
A chaque sommet du carré, on trace la tangente au cercle. Ces droites forment un autre carré. Le cercle est maintenant pris en sandwich entre deux carrés. Son aire est plus grande que l'aire du premier carré et plus petite que celle du deuxième carré (voir figure 1).

On partage ensuite les arcs AB, BC, CD et DA en deux parties égales et on trace l'octogone APBQCRDS (voir figure 2). L'aire de l'octogone est plus grande que celle du carré, mais reste inférieure à celle du cercle.

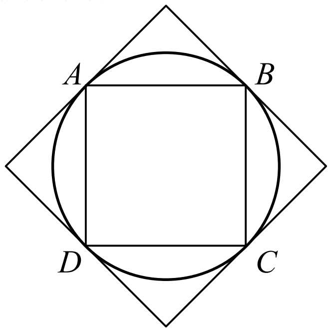


figure 1

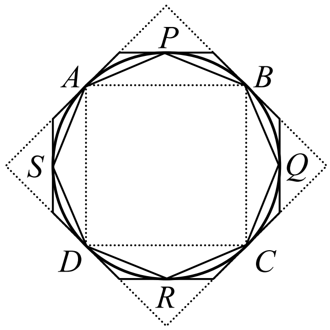


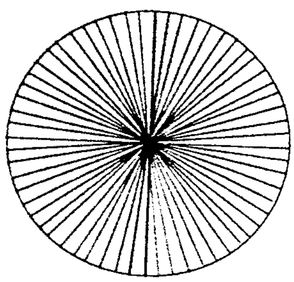
figure 2

On trace alors les tangentes au cercle aux points P, Q, R et S. Ces tangentes coupent les sommets du grand carré et forment un autre octogone extérieur au cercle.
Le disque est maintenant pris en sandwich entre deux octogones.

Ce procédé peut être répété autant de fois que l'on veut. Il conduira à un cercle pris en sandwich entre deux polygones possédant un grand nombre de côtés dont, moyennant un certain effort, il est possible de calculer l'aire. De cette manière, il est non seulement possible d'approcher l'aire du disque, mais également de connaître la précision de cette approximation.

Par la suite, **Archimède**[3] utilisa abondamment la méthode d'exhaustion décrite ci-dessus pour déterminer des aires et des volumes, en particulier l'aire déterminée par un segment de parabole. Pendant les 2000 ans qui suivirent, il y eu peu de travaux sur le calcul d'aires et de volumes.

Johannes Kepler[4]
Au début du 17^{e} siècle, Johannes Kepler fut l'un des premiers de l'époque moderne à s'intéresser à ce genre de problèmes. Son père, semble-t-il, tenait une taverne, et le jeune Kepler, qui aidait souvent au service, aurait eu l'impression que les marchands de vin gonflaient leurs prix. Il chercha donc une méthode qui lui permette de calculer le volume de vin contenu dans un tonneau.

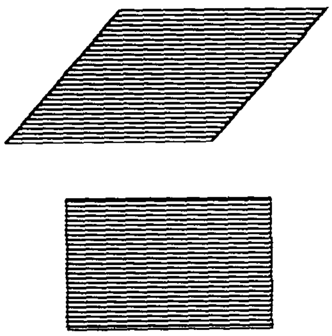


Il commença par travailler sur l'aire d'un disque. Il considérait que le disque est composé d'un nombre infini de triangles dont la base infiniment petite est sur la circonférence du cercle et le sommet au centre du cercle. Comme l'aire d'un triangle s'obtient en multipliant la moitié de sa base par sa hauteur (infiniment proche du rayon du cercle), il décida que l'aire de tous les triangles réunis devait être obtenue en multipliant la moitié de la circonférence par le rayon.

De la même manière, il considéra que le volume d'un tonneau était constitué d'un nombre infini de tranches infiniment minces.

[3] **Archimède** *vécut à Syracuse en Sicile au 3^{e} siècle avant JC. Il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.*
[4] **Johannes Kepler** (1571 - 1630) *est surtout connu pour la découverte des lois des mouvements planétaires*.

Bonaventura Cavalieri[5]



Bonaventura Cavalieri considérait qu'une aire est composée d'une infinité de segments parallèles. Pour montrer que l'aire d'un parallélogramme est la même que celle d'un rectangle de même base et de même hauteur, il affirmait que toutes deux sont composées du même nombre de segments de mêmes longueurs, et que ces deux figures devaient par conséquent avoir la même aire.

Cavalieri considérait également qu'un volume est constitué d'un nombre infini de plans parallèles, comme les pages d'un livre ou un paquet de cartes. Il les appelait segments ou plans indivisibles. Ces segments et ces plans étaient, selon lui, les éléments de base à partir desquels les aires et les volumes étaient construits, et qu'ils ne pouvaient pas être divisés en plus petits morceaux.

Pierre Fermat[6]

Pendant le siècle suivant, de nombreuses méthodes de calcul d'aire furent développées. Simon Stevin[7], puis Pierre Fermat utilisèrent une adaptation de la méthode grecque d'exhaustion, mais au lieu d'utiliser des polygones, ils développèrent une méthode d'approximation de l'aire sous une courbe par des rectangles.

Bernhard Riemann[8]

Les bases du calcul différentiel et intégral furent établies par Isaac Newton[9], et Gottfried Wilhelm Leibniz[10] durant la 2ème moitié du 17ème siècle, puis réinventées par les frères Jakob et Johann Bernoulli quelques décennies plus tard. Mais il fallut attendre presque deux siècles pour que Bernhard Riemann définisse rigoureusement l'intégral d'une fonction et démontre rigoureusement le théorème fondamental du calcul intégral, permettant de calculer des aires, des volumes, des longueurs et de résoudre de nombreux problèmes faisant intervenir des sommes de nombreux petits nombres. C'est essentiellement l'intégral de Riemann que nous étudierons dans ce cours. Plus tard, des généralisations de la notion d'intégral ont été faites par Henri Lebesgue[11], par Jaroslav Kurzweil[12] et Ralph Henstock[13], mais elles dépassent largement le niveau du collège.

---

5 Bonaventura Cavalieri, (né à Milan en 1598, mort en 1647), ami de Gallileo Galliei.
6 Pierre Fermat (1601-1665), inventeur des décimaux
7 Simon Stevin (1548 - 1620)
8 Bernhard Riemann (Allemagne, 1826 -1866)
9 Isaac Newton (1642 - 1727), un des plus grand physicien de tout les temps, fondateur du calcul différentiel.
10 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), fondateur du calcul différentiel et concurrent de Newton.
11 Henri Léon Lebesgue (1875-1941), il généralisa l'intégral de Riemann en 1901.
12 Jaroslav Kurzweil (né le 7 mai 1926 à Prague). En 1957 il modifia légèrement la définition de l'intégral de Riemann pour la généraliser. c.f. http://www.learned.cz/eng/engbio/kurzweil.pdf et http://www.math.cas.cz/~schwabik/jk80.pdf
13 Ralph Henstock (né le 2 juin 1923 en Angleterre). En 1961 il fit la même découverte que Kurzweil, indépendamment de lui. Ceci montre que les recherches sur ce sujet continuent encore de nos jours ! De nos jours, peu de mathématiciens connaissent les généralisations faites par Kurzweil et Henstock.
c.f. http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/ccc/gauge/

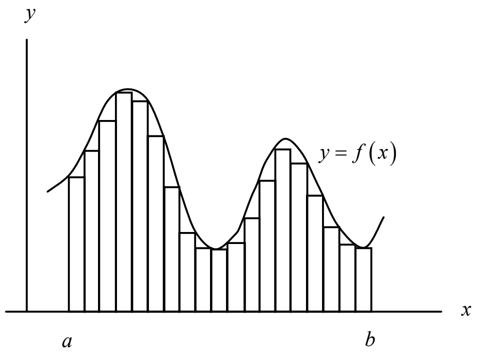
V. Intégrale définie

V.1. Somme minorante et somme majorante.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.

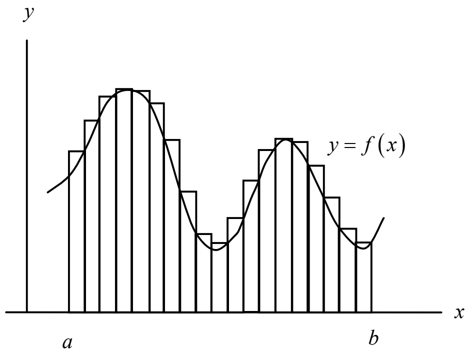
Une valeur approchée de l'aire sous la courbe f peut être obtenue par un découpage en N bandes rectangulaires verticales. En particulier on peut réaliser un encadrement de cette aire à l'aide d'une **somme minorante** A_m et d'une **somme majorante** A_M pour un découpage donné.

L'aire de chaque rectangle est de la forme : $\Delta x_i \cdot f(x_i)$; Δx_i = largeur du $i^{\text{ème}}$ rectangle.



Somme minorante

A_m = la somme des aires des rectangles minorants.



Somme majorante

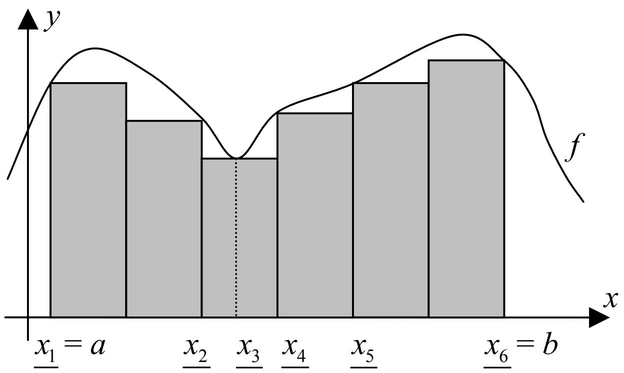
A_M = la somme des aires des rectangles majorants.

$f(\underline{x_i})$ = la plus petite valeur de $f(x)$ sur le $i^{\text{ème}}$ intervalle.
= la hauteur du $i^{\text{ème}}$ rectangle minorant.

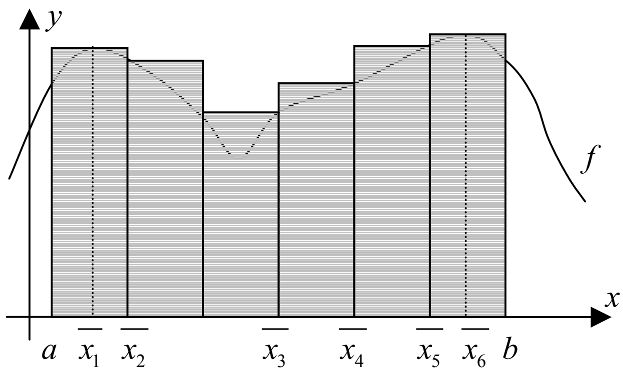
$f(\overline{x_i})$ = la plus grande valeur de $f(x)$ sur le $i^{\text{ème}}$ intervalle.
= la hauteur du $i^{\text{ème}}$ rectangle majorant.

Voici un exemple de découpage en 6 rectangles.

Ici, la largeur de tous les rectangles est la même, mais ce n'est pas une obligation.



Somme minorante : A_m



Somme majorante : A_M

$$A_m = \sum_{i=1}^{6} f(\underline{x_i})\cdot \Delta x_i = f(\underline{x_1})\cdot\Delta x_1 + f(\underline{x_2})\cdot\Delta x_2 + f(\underline{x_3})\cdot\Delta x_3 + f(\underline{x_4})\cdot\Delta x_4 + f(\underline{x_5})\cdot\Delta x_5 + f(\underline{x_6})\cdot\Delta x_6$$

$$A_M = \sum_{i=1}^{6} f(\overline{x_i})\cdot \Delta x_i = f(\overline{x_1})\cdot\Delta x_1 + f(\overline{x_2})\cdot\Delta x_2 + f(\overline{x_3})\cdot\Delta x_3 + f(\overline{x_4})\cdot\Delta x_4 + f(\overline{x_5})\cdot\Delta x_5 + f(\overline{x_6})\cdot\Delta x_6$$

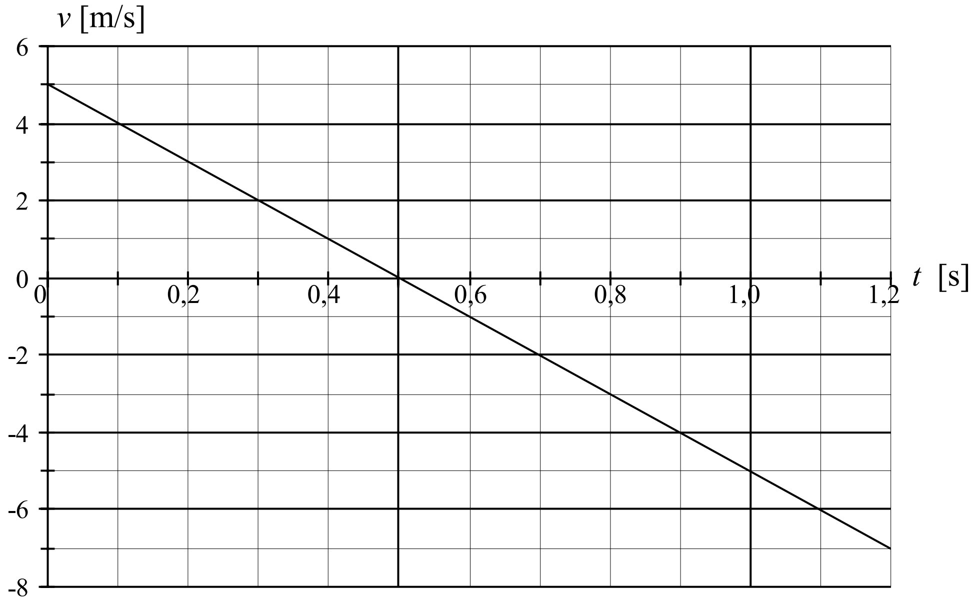
Quel que soit le découpage choisi, on a toujours : $A_m \le Aire\ \ sous\ \ la\ \ courbe \le A_M$.

V.2. Que se passe-t-il si la fonction est négative ?

Activité V.2.1. La chute libre.

Paul lance verticalement une pierre en l'air.
Au temps t = 0 [s], la pierre se trouve à 1,5 mètres du sol et sa vitesse initiale est de 5 [m / s].
La gravitation agit sur la pierre et lui imprime une décélération $a = -10\,[\mathrm{m}/\mathrm{s}^2]$:
la vitesse décroît de 10 [m / s] par seconde, c'est-à-dire $v(t) = v_0 + a \cdot t = 5 - 10 \cdot t$.
Pour $t = 0,5$ [s] , la vitesse est nulle et après 0,5 [s], la vitesse devient négative :
ceci signifie que la trajectoire change de sens et que la pierre retombe.

Voici le graphique de la vitesse v de la pierre en fonction du temps t.



Notons $h(t)$ la hauteur de la pierre à l'instant t.

<u>Question</u> :
A quelle hauteur se trouve la pierre après 1,2 secondes ?

Pour vous aider à répondre à cette question, complétez le tableau ci-dessous.
Vous pouvez utiliser des considérations géométriques (aires de triangles, de trapèzes …) :

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
$h(t)$	1,5	1,95	2,3	2,55	2,7	2,75	2,7	2,55	2,3	1,95	1,5	0.95	0,3

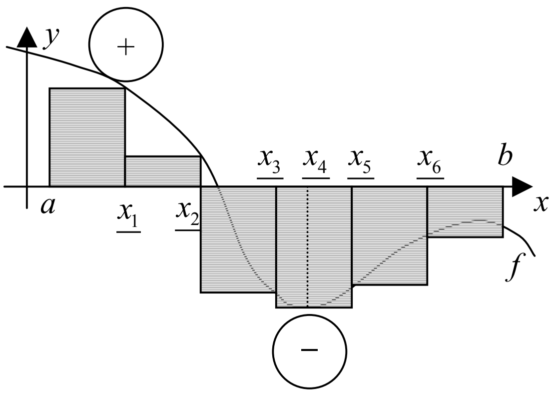
<u>Question</u> :
Est-il correct de dire que la hauteur $h(t)$ est la somme de 1,5 [m] et de l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses ?
Non, car l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses sous l'axe doit être comptée négativement pour que la hauteur h(t) correspond à une aire.

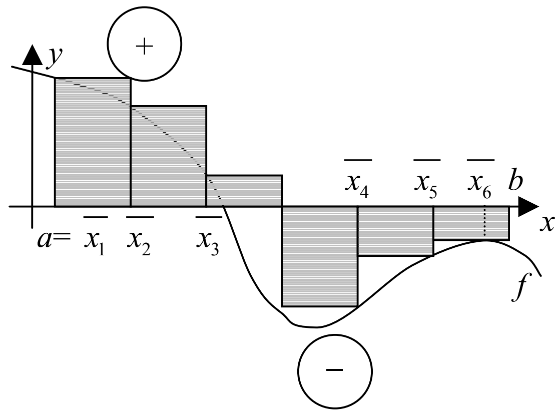
Généralisation

Lorsque la fonction possède des images négatives, l'activité précédente montre que certains termes des sommes sont négatifs. Ils ne représentent plus des **aires géométriques**.
On parle alors d'**aire algébrique**, étant entendu que les aires algébriques sous l'axe des abscisses sont négatives tandis que les aires algébriques au-dessus de l'axe des abscisses sont positives.

Pour en revenir aux sommes minorante et majorante habituelles, les deux graphiques ci-dessous illustrent le fait que :

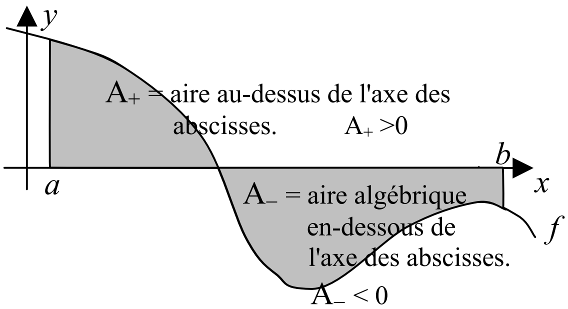
Somme minorante $\leq$ **aire algébrique** *entre la courbe et l'axe des abscisses* $\leq$ somme majorante





Somme minorante : $A_{\mathrm{m}} = \sum_{i=1}^{6} f(\underline{x_i}) \cdot \Delta x_i$ Somme majorante : $A_{\mathrm{M}} = \sum_{i=1}^{6} f(\overline{x_i}) \cdot \Delta x_i$

$A_m \leq$ **aire algébrique ombrée** $\leq A_M$.



L'aire algébrique $= A_+ + A_- = A_+ - |A_-|$

L'aire géométrique $= A_+ + |A_-|$

$|A_-|$ représente l'aire géométrique sous l'axe des abscisses

Remarques :
1) Une <u>aire géométrique</u> est toujours positive ou à la limite nulle.
2) Une <u>aire algébrique</u> peut être positive, nulle ou négative.
3) Une <u>aire géométrique</u> est égale à la somme de l'aire algébrique au-dessus de l'axe des abscisses et de la *valeur absolue* de l'aire algébrique au-dessous de l'axe des abscisses.
4) Une <u>aire algébrique</u> est égale à la différence de l'aire géométrique au-dessus de l'axe des abscisses et de l'aire géométrique en dessous de l'axe des abscisses.

V.3. Définition de l'intégrale définie.

Supposons que le nombre N de bandes tend vers l'infini et donc que la largeur de chaque bande tend vers 0.

Si la **somme minorante** $A_m = \sum_{i=1}^{N} f(\underline{x_i}) \cdot \Delta x_i$ et la **somme majorante** $A_M = \sum_{i=1}^{N} f(\overline{x_i}) \cdot \Delta x_i$ ont toutes deux une limite lorsque le nombre N de bandes tend vers l'infini, alors l'aire algébrique A entre la courbe et l'axe des abscisses est comprise entre ces deux limites.

On a : $$\underbrace{\lim_{N\to\infty} A_m}_{L_m} \leq A \leq \underbrace{\lim_{N\to\infty} A_M}_{L_M}.$$

Si en outre ces deux limites sont égales, leur valeur est celle de l'aire algébrique A.

$$\boxed{\text{Si } L_m = L_M, \text{ alors } A = L_m = L_M.}$$

Nous avons rencontré cette situation à plusieurs reprises au chapitre III.
Il s'ensuit la définition suivante :

Définition

Soit un intervalle $[a;b]$, divisé en N parties, soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a;b]$, soit A_m, la somme minorante et soit A_M, la somme majorante.

On appelle **intégrale définie** de f, depuis a jusqu'à b, notée $\int_a^b f(x)\,dx$, le nombre A tel que

$A = \lim_{N\to\infty} A_m = \lim_{N\to\infty} A_M$ pourvu que ces deux limites existent et soient égales.

Intuitivement, il est évident que lorsque $b = a$, on étend la définition ainsi : $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Remarque

Pour calculer la somme minorante et la somme majorante, il n'est pas nécessaire que la largeur des intervalles du découpage soit la même partout.
Par contre la largeur de tous les intervalles doit tendre vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

Vocabulaire

- Si ces deux limites L_m et L_M existent et sont égales, alors on dit que f est **intégrable** sur $[a;b]$ et que l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.
- Le fait de chercher cette limite s'appelle "**calculer l'intégrale définie**".
- Les nombres a et b sont appelés les **bornes d'intégration**, a est la b**orne inférieure,** b est la **borne supérieure**.
- D'autres lettres que x peuvent être employées dans la notation de l'intégrale définie.

  Ainsi si f est intégrable sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(s)\,ds$ = un nombre réel.

  C'est la raison pour laquelle la variable x de la définition est dite **variable muette**. Elle n'apparaît pas dans le résultat.

A propos de la notation

Le symbole $\int$ en forme de « S » allongé, abréviation de *Summa Integralis,* fut introduit par Leibniz (1644-1716). Il calculait l'aire sous les courbes en faisant la **S**omme des aires de rectangles étroits, de largeur infinitésimale dx, et de hauteur infiniment proche de $y = f(x)$.

Ainsi $\int_a^b f(x)\,dx$ signifie :

Somme des aires d'une infinité de rectangles de largeur dx et de hauteur $f(x)$.

Important

• Une *intégrale définie*, notée $\int_a^b f(x)\,dx$ est un **NOMBRE** réel, pas une fonction !

Remarque

Toute fonction n'est pas intégrable sur un intervalle donné. Mais on peut montrer que si f est une fonction continue sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ existe toujours. Il s'ensuit le

Théorème : continue $\Rightarrow$ intégrable de Cauchy (1823)

Si f est une fonction **continue** sur $[a;b]$, alors f est **intégrable** sur $[a;b]$.

Nous ne démontrerons pas ce théorème.

Remarque

La continuité sur un intervalle fermé est une condition suffisante d'intégrabilité, mais non nécessaire. Lorsqu'une fonction n'est pas continue, on peut parfois calculer une intégrale définie. C'est le cas en particulier des fonctions en escalier.

Définition :

Une fonction f est **continue par morceaux** sur $[a\,;\,b]$ si et seulement si on peut subdiviser l'intervalle $[a\,;\,b]$ en plusieurs intervalles : $[a\,;\,c_1]$; $[c_1\,;\,c_2]$; $[c_2\,;\,c_3]$; ... ; $[c_{n-1}\,;\,c_n]$; $[c_n\,;\,b]$ de sorte que f soit continue sur chacun des ces intervalles.

Théorème qui généralise le précédent.

Si f est une fonction **continue par morceaux** sur $[a;b]$, alors f est **intégrable** sur $[a;b]$.

VI. Propriétés de l'intégrale définie

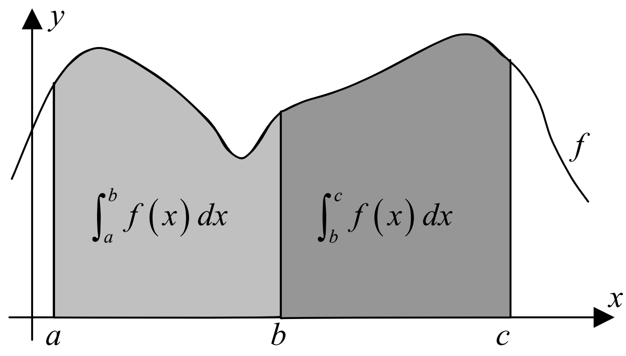
(1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

C'est une extension naturelle de la définition de l'intégrale définie.

(2) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

Cette propriété est illustrée par le dessin ci-contre.

L'aire gris claire plus l'aire gris foncée égale l'aire grise (claire + foncée).



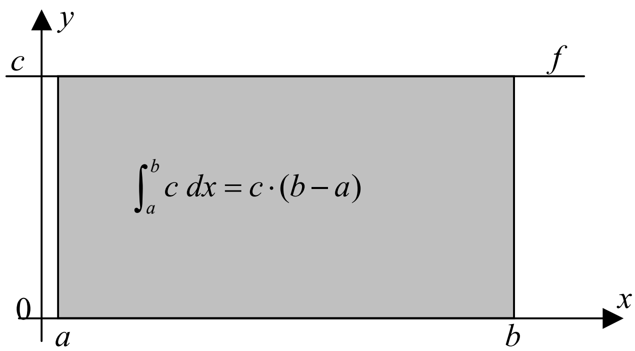
(3) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

C'est une extension de la définition de l'intégrale définie, qui satisfait les propriétés 1 et 2.

Utilisons la propriété (2), avec $c = a$: $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$ Propriété 1

Si f est constante égale à c, alors

(4) $\int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)$



$\int_a^b c\,dx$ = aire grise = base · hauteur = $(b - a)\cdot c$

Si $c < 0$ et/ou $b < a$, l'égalité reste correcte !

$$\textit{(5)} \qquad \int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

en effet :

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x_1 \cdot c \cdot f(x_1) + \Delta x_2 \cdot c \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x_n \cdot c \cdot f(x_n)\right]$$

$$= c \cdot \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x_1 \cdot f(x_1) + \Delta x_2 \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x_n \cdot f(x_n)\right] = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Δx_i = largeur du i$^{\text{ème}}$ rectangle.

$f(x_i)$ = la hauteur du i$^{\text{ème}}$ rectangle

$$\textit{(6)} \qquad \int_a^b \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

en effet :

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right) dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x_1 \cdot \left(f(x_1) + g(x_1)\right) + \Delta x_2 \cdot \left(f(x_2) + g(x_2)\right) + \ldots + \Delta x_n \cdot \left(f(x_n) + g(x_n)\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x_1 \cdot f(x_1) + \Delta x_2 \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x_n \cdot f(x_n) \quad + \quad \Delta x_1 \cdot g(x_1) + \Delta x_2 \cdot g(x_2) + \ldots + \Delta x_n \cdot g(x_n)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x_1 \cdot f(x_1) + \Delta x_2 \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x_n \cdot f(x_n)\right] + \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x_1 \cdot g(x_1) + \Delta x_2 \cdot g(x_2) + \ldots + \Delta x_n \cdot g(x_n)\right]$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Δx_i = largeur du i$^{\text{ème}}$ rectangle.

$f(x_i)$ = la hauteur du i$^{\text{ème}}$ rectangle

(7)	Si $a < b$ et $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

en effet :

$\int_a^b f(x)\,dx$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\Delta x_1 \cdot f(x_1) + \Delta x_2 \cdot f(x_2) + ... + \Delta x_n \cdot f(x_n)\right]$

Δx_i = largeur du ième rectangle. Ces nombres sont positifs, car $a < b$.

$f(x_i)$ = la hauteur du ième rectangle. Ces nombres sont positifs ou nuls, car $f(x) \geq 0$

Donc la somme dans la limite est positive ou nulle.

Donc l'intégrale est positive ou nulle.

(8)	Si $a < b$ et $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [\,a;b\,]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

en effet : $\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \underbrace{\left(g(x) - f(x)\right)}_{\geq 0} dx \geq 0$, par la propriété 7.

(9)	Si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [\,a;b\,]$, alors $m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a)$

en effet : $m \leq f(x) \leq M \quad \Rightarrow \quad \int_a^b m \cdot dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M \cdot dx$

$\Rightarrow \quad m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a)$

VII. Primitives d'une fonction continue

Le théorème fondamental du calcul intégral, que nous verrons au chapitre IX, fournit une manière de calculer des intégrales définies à l'aide de primitives de fonctions continues. Il affirme que :

Si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

C'est la principale motivation de l'étude des primitives.

VII.1 Définition

Nous savons comment trouver, lorsque c'est possible, la fonction dérivée d'une fonction f, définie sur un intervalle I de ℝ. Ce processus est appelé "**dérivation** d'une fonction".
Le théorème fondamental du calcul intégral montre l'intérêt du problème inverse qui consiste à trouver une nouvelle fonction F dont f serait la dérivée. Ce processus s'appelle "**intégration**" ou "**anti-dérivation**".
La définition suivante, ne fait qu'attribuer à F un nom particulier.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de ℝ.
On appelle **primitive** de f sur I, toute fonction F dérivable sur I et telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I.

Exemple :

$F(x) = \frac{1}{2}x^2$ est une primitive de $f(x) = x$, parce que $F'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x = f(x)$.

Ce n'est pas la seule, car $\frac{1}{2}x^2 + 3$; $\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}$; $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}$ etc. sont aussi des primitives de f.

D'une manière générale, $\frac{1}{2}x^2 + C$, quel que soit le nombre réel C, est une primitive de f parce que $\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)' = x + 0 = x$.

Remarques :

1) Certaines fonctions comme $x \mapsto e^{-x^2}$ sont continues, donc admettent une primitive mais celle-ci n'est pas exprimable avec les opérations usuelles. Cette fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est importante dans la théorie des probabilités.
2) Il existe des fonctions non continues qui admettent des primitives.

VII.2 Ensemble de primitives

Théorème

Soit F une primitive de f sur un intervalle $[a\,;b]$. Alors:

1) Pour tout réel C, la fonction $G : x \to F(x)+C$ est aussi une primitive de f sur $[a\,;b]$.

2) Toute primitive de f sur $[a\,;b]$ est de ce type.

On dit que deux primitives d'une même fonction ***diffèrent d'une constante***.

démonstration :

1) Il suffit de montrer que la dérivée de $G(x)$ est f, c'est immédiat:

$$G'(x) = \left(F(x)+C\right)' = F'(x)+C' = F'(x) = f(x)$$

2) Soit H une autre primitive de f.
Le corollaire du théorème des accroissements finis, appelé "théorème de la fonction constante", s'applique ici à la fonction $H-F$.
Les hypothèses du corollaire sont satisfaites :
i) et ii) La fonction $H-F$ est dérivable sur $[a\,;b]$, donc continue sur $[a\,;b]$ et
iii) $(H-F)' = H' - F' = f - f = 0$.
Sa conclusion dit justement que $(H-F)(x)=C$, $\forall x \in [a\,;b]$, où C est une constante.
Or $(H-F)(x) = H(x)-F(x)$, donc $H(x)-F(x)=C$. CQFD

VII.3 Terminologie et notation

- La notation suivante : $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ désigne la **famille des primitives** de f.
- Ceci se lit : - "intégrale de f de x dx ", ou
  - "intégrale indéfinie de f par rapport à x".
- Le symbole dx permet de reconnaître la variable d'intégration.

  Par exemple, vérifiez que : $\int \alpha \cdot x^2\,dx \neq \int \alpha \cdot x^2\,d\alpha$.
- Le symbole $\int$ est le **symbole d'intégration.**
- L'expression $\int f(x)\,dx$ s'appelle l'**intégrale indéfinie** de f. C'est une <u>famille de fonctions</u>.
- f est la **fonction à intégrer.**
- C est la **constante d'intégration**.

Résoudre le problème noté $\int f(x)\,dx$, c'est-à-dire chercher les fonctions $F(x)+C$, est appelé **recherche des primitives de *f*** ou **intégration indéfinie** ou **intégration de** $f(x)$ ou **calcul de l'intégrale**. L'adjectif "*indéfinie*" se rapporte au fait que $\int f(x)\,dx$ représente une famille de primitives et non pas une primitive bien précise.

VIII. Propriétés des primitives

VIII.1 Quelques primitives

Complétez le tableau suivant :

fonction $f(x)$	***primitive*** $F(x)$
0	$c \;=\; constante$
a	$a \cdot x + c$
x	$\dfrac{x^2}{2} + c$
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$, où $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + c$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2 \cdot \sqrt{x} + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
e^x	$e^x + c$
$\ln(x)$	$x \cdot (\ln(x) - 1))$
$\tan^2(x)$	$\tan(x) - x$
$\sin^2(x)$	$\dfrac{1}{2} \cdot (x - \sin(x) \cdot \cos(x))$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$

$n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

VIII.2 Propriétés des primitives

Pour établir chacune des propriétés ci-dessous, il suffit de constater que les égalités sont correctes après dérivation des deux membres des égalités et d'utiliser le théorème de la fonction constante, qui dit que si les dérivées de deux fonctions sont égales, alors les fonctions diffèrent d'une constante.

f et g sont deux fonctions continues, λ est un nombre réel, C est une constante.

1) $\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x)$ par définition

2) $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$ f est supposée dérivable.

3) $\int \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

4) $\int \left(f(x) - g(x)\right) dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

5) $\int \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int f(x)\,dx$

6) $\int \lambda \cdot g\left(f(x)\right) \cdot f'(x)\,dx = \lambda \cdot G(f(x)) + C$ où G est une primitive de g.

7) $\int \lambda \cdot f^n(x) \cdot f'(x)\,dx = \lambda \cdot \dfrac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$ où $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. *c'*est un cas particulier de 6), avec $g(x) = x^n$.

8) $\int \lambda \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \lambda \cdot \ln\left|f(x)\right| + C$ *c'*est un cas particulier de 6), avec $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

<u>Attention</u>, en général : $\int \left(f(x) \cdot g(x)\right) dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$!!!

IX. Le théorème fondamental du calcul intégral

Le théorème fondamental du calcul intégral indique comment calculer une intégrale définie à l'aide d'une primitive de la fonction à intégrer.

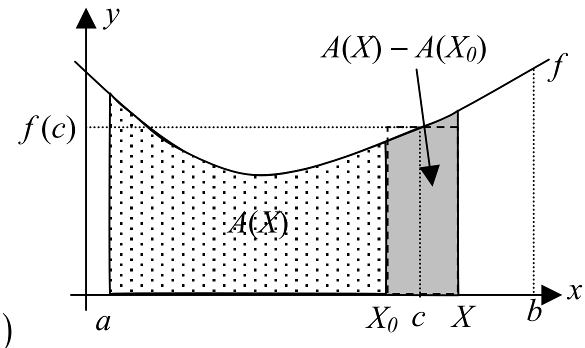
Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a;b]$.

Partie I. Si A est la fonction définie par $A(X)=\int_a^X f(t)\,dt$ pour tout X dans $[a;b]$, alors A est la primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

Partie II. Si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors $\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)}$.

Démonstration dans le cas d'une fonction positive

Partie I : Soit la fonction $A(X)=\int_a^X f(t)\,dt$.



Comme $X>a$, on peut se représenter $A(X)$ comme l'aire sous la courbe de f depuis $t=a$ jusqu'à $t=X$.
Pour démontrer que A est une primitive de f, on va prouver que $A'=f$.

Considérons X et X_0, tels que : $b \geq X > X_0 \geq a$.

Selon la définition de la dérivée : $A'(X_0)=\lim\limits_{X\to X_0}\dfrac{A(X)-A(X_0)}{X-X_0}$

Définissons $f_m(X)$ le minimum et $f_M(X)$ le maximum de f sur $[X_0\,;X]$.

On a : $f_m(X)\leq \dfrac{A(X)-A(X_0)}{X-X_0}\leq f_M(X)$ car $f_m(X)\cdot(X-X_0)$ représente l'aire minorante et $f_M(X)\cdot(X-X_0)$ représente l'aire majorante.

Puisque f est une <u>fonction continue</u>, $\lim\limits_{X\to X_0} f_m(X)=f(X_0)$ et $\lim\limits_{X\to X_0} f_M(X)=f(X_0)$.

En conséquence (du théorème des deux gendarmes), $\lim\limits_{X\to X_0}\dfrac{A(X)-A(X_0)}{X-X_0}=f(X_0)$.

Nous venons de montrer que $A'(X_0)=f(X_0)$ pour tout $X_0\in[a;b]$, donc la dérivée de la fonction aire A est la fonction f.
Ainsi A est une primitive de f sur $[a\,;b]$.
Comme $A(a)=0$, A est bien la primitive de f qui s'annule en a. CQFD $_{\text{partie I}}$

Remarquons que les cas où f est négative et/ou $X<X_0$ se démontrent de manière similaire.

Partie II

Soit F une autre primitive de f.

Notre but est de montrer que : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Au point VII.2, nous avons vu que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Donc $A(X) = F(X) + C$ pour une constante C. Rappelons que : $A(X) = \int_a^X f(t)\,dt$.

Nous avons vu que $A(a) = 0$, donc $0 = F(a) + C$.

On en déduit que $C = -F(a)$ et donc que $A(X) = F(X) - F(a)$.

Cette identité est valable pour tout X de l'intervalle $[a\,,b]$, elle est vraie en particulier pour $X = b$.

D'où $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ CQFD $_{\text{partie II}}$

En résumé

1) Si une fonction est continue, elle est intégrable.
2) On peut toujours calculer, ou du moins approcher, son intégrale à l'aide des partages et de la définition des sommes minorante et majorante.
3) Néanmoins, lorsque l'on peut trouver une primitive de f, on évite ce procédé long et difficile grâce au théorème fondamental.
4) Malheureusement, certaines fonctions continues ont des primitives très difficiles à trouver, voire non exprimables à l'aide des opérations usuelles, comme par exemple $x \mapsto e^{-x^2}$.

Notation :

Lorsqu'on calcule une intégrale, il est pratique d'utiliser la notation suivante :

$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b}$; $F(x)\Big|_a^b$ signifie $F(b) - F(a)$.

Exemple : $\int_5^9 2 \cdot x\,dx = x^2\Big|_5^9 = 9^2 - 5^2 = 56$.

X. Le théorème de la moyenne

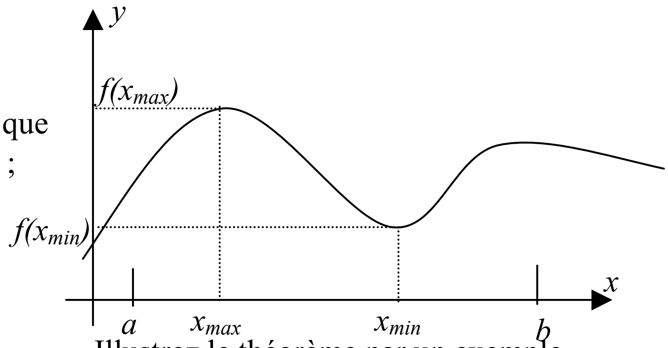
Théorème de Weierstrass : (1861, appelé "Hauptlehrsatz" dans les cours de Weierstrass)

Si une fonction $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ est **continue sur [a ; b]**,

alors

a) il existe deux nombre $x_{\min}$ et $x_{\max}$ dans $[a\,;b]$ tels que $f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$ pour tout nombre $x \in [a\,;b]$;

b) pour tout nombre Y tel que $f(x_{\min}) \leq Y \leq f(x_{\max})$, il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = Y$.



Illustrez le théorème par un exemple.

Ce théorème semble évident, mais il est beaucoup plus difficile à démontrer qu'il n'y parait. Pour le faire, il faut avoir défini très précisément ce que sont les nombres réels.
Ce n'est qu'en 1872, que Cantor, Heine, Méray et Dedekind ont indépendamment construit rigoureusement l'ensemble des nombres réels. Si quatre mathématiciens ont effectué ce travail indépendamment la même année, cela montre l'importance qu'ils accordaient à ce sujet.
Nous accepterons ce théorème sans démonstration, comme les mathématiciens d'avant 1872 l'ont fait.

Définition :

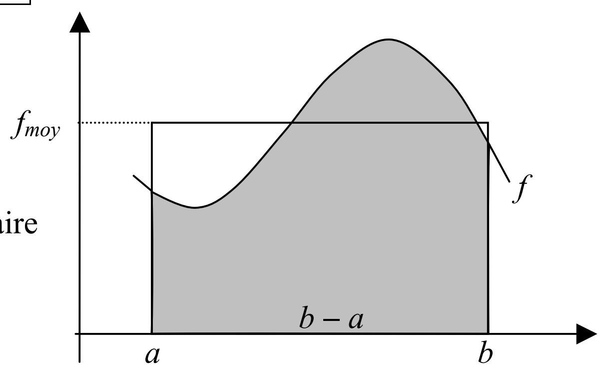
Si f est une fonction intégrable sur $[a;b]$, la **valeur moyenne** de f sur $[a;b]$ est définie par :

$$\boxed{f_{moy} = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx}$$

Interprétation géométrique de f_{moy} :

$$f_{moy} = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx \quad\Leftrightarrow\quad f_{moy}\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

f_{moy} est donc la hauteur du rectangle de largeur $b-a$ dont l'aire égale l'aire sous la courbe f, entre $x=a$ et $x=b$.



Interprétation arithmétique de f_{moy} :

Par définition nous avons $f_{moy} = \dfrac{1}{b-a}\cdot\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \dfrac{1}{b-a}\cdot\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot\Delta x_i$

Dans le cas de N intervalles de même largeurs on a : $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{N}$

Donc $f_{moy} = \dfrac{1}{\cancel{b-a}}\cdot\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{\cancel{b-a}}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} f(x_i) = \lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{N} f(x_i)}{N} = \lim_{N\to\infty}\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_N)}{N}$

$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_N)}{N}$ représente la moyenne arithmétique de N valeurs de $f(x)$,

d'où l'expression *« valeur moyenne »*.

Théorème de la valeur moyenne :

Soit $f : [\,a;b\,] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe au moins un élément c de $[\,a;b\,]$ dont l'image par f est égale à la valeur moyenne de f sur $[\,a;b\,]$. Autrement dit :

$$\boxed{\exists\ c\ \in [\,a;b\,] \text{ tel que } f(c) = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx}$$

démonstration :

Grâce à la continuité de f nous savons que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe. On sait aussi, par le point a) du théorème de Weierstrass, qu'il existe deux réels x_{min} et x_{max} tels que :

$$f(x_{\min}) \le f(x) \le f(x_{\max}) \text{ , } \quad \text{et ce pour tout } x \text{ dans } [\,a;b\,]$$

D'où :

$$\int_a^b f(x_{\min})\,dx \ \le\ \int_a^b f(x)\,dx \ \le\ \int_a^b f(x_{\max})\,dx \qquad \text{propriété 9}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x_{\min})\cdot(b-a) \ \le\ \int_a^b f(x)\,dx \ \le\ f(x_{\max})\cdot(b-a) \qquad \text{propriété 4 (intégrale d'une constante)}$$

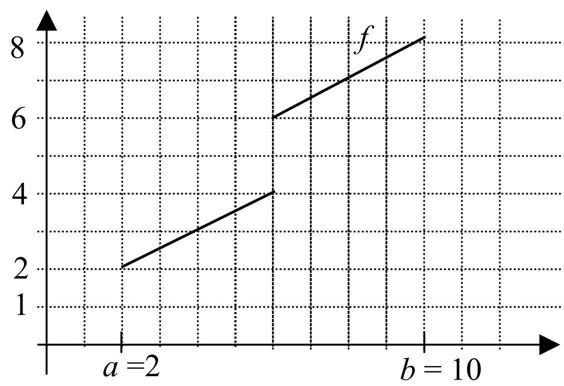
$$\Leftrightarrow \quad f(x_{\min}) \ \le\ \underbrace{\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx}_{=\text{ la valeur moyenne de } f \text{ sur } [a\ ;\ b]} \ \le\ f(x_{\max}) \qquad \text{division par } (b-a)$$

Puisque la valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b]$ est comprise entre $f(x_{min})$ et $f(x_{max})$, le point b) du théorème de Weierstrass nous assure de l'existence d'un nombre c de $[\,a;b\,]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{CQFD}$$

Remarque :
Dans le langage de tous les jours, ce théorème semble une évidence. Il dit, par exemple, que si un automobiliste, durant un trajet, roule à une certaine vitesse moyenne, alors, pendant ce trajet, il doit effectivement rouler exactement à cette vitesse moyenne, au moins une fois !

Exercice X.1
On donne la fonction f par le graphique ci-contre.



1) Déterminez : $I = \int_2^{10} f(x)\,dx$

   I = 12 + 28 = 40

2) Déterminez la valeur moyenne f_{moy} de f sur l'intervalle [2 ; 10].

   f_{moy}= 40 / 8 = 5

3) Déterminez, si elle existe, la préimage c dans l'intervalle [2 ; 10], telle que $f(c) = f_{moy}$

   Non, f_{moy} ne possède pas de préimage dans [2 ; 10] !

4) Le théorème de la valeur moyenne est-il applicable ? Justifiez votre réponse.

   Le théorème de la moyenne n'est pas applicable sur l'intervalle [2 ; 10], pour cette fonction f, car elle n'est pas continue sur cet intervalle.

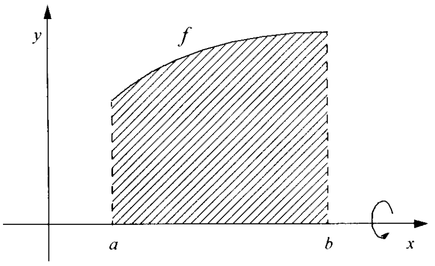
XI. Volume d'un corps de révolution

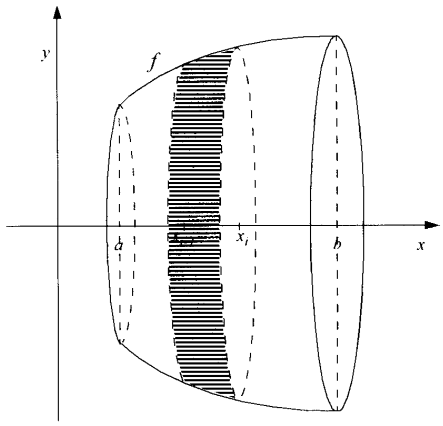
Nous avons vu que l'intégration permet de déterminer l'aire de certaines surfaces. Elle permet également de déterminer le volume de certains corps. Pour simplifier nous nous limiterons au volume d'un corps engendré par la rotation de la représentation graphique d'une fonction continue sur un intervalle autour de l'axe des x. Comment calculer le volume ?

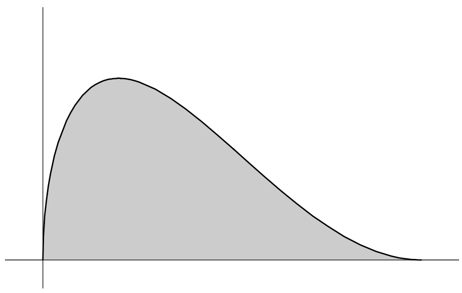
Un corps ainsi formé s'appelle un **corps de révolution**.

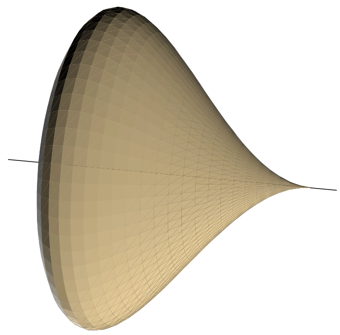
Fonction continue sur un intervalle

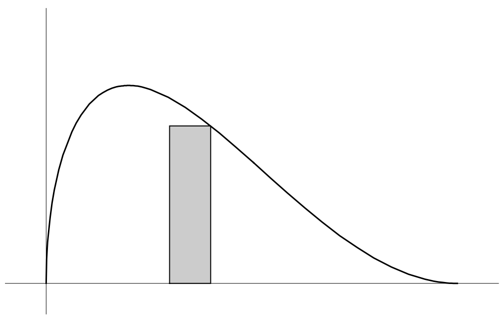
Volume de révolution autour de l'axe des x

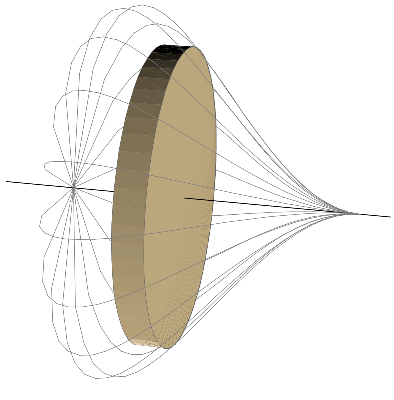


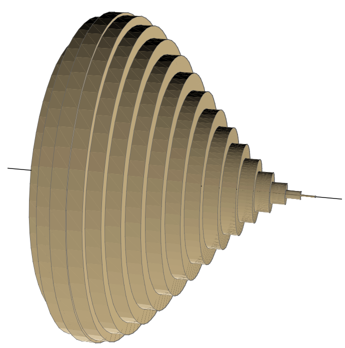












Théorème :

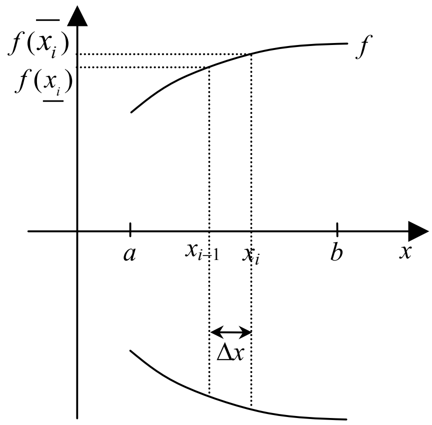
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.
Le volume V du solide engendré par la révolution de D autour de Ox est déterminé par la formule :

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx$$

Démonstration :

On partage l'intervalle $[a\ ;\ b]$ en N intervalles $[x_{i-1}\ ;\ x_i]$ de même largeur Δx dans le but de découper le solide en N « tranches ».
Notons V_i le volume de la $i^{\text{ème}}$ tranche.
Soit $f(\underline{x_i})$ le minimum et $f(\overline{x_i})$ le maximum de f sur $[x_{i-1}\ ;\ x_i]$.
Le volume V_i d'une tranche est compris entre celui d'un cylindre de rayon $f(\underline{x_i})$ et d'épaisseur Δx et celui d'un cylindre de rayon $f(\overline{x_i})$ et d'épaisseur Δx :

$$\pi \cdot \left(f(\underline{x_i}) \right)^2 \cdot \Delta x \le V_i \le \pi \cdot \left(f(\overline{x_i}) \right)^2 \cdot \Delta x .$$



Dans cet exemple, $\underline{x_i} = x_{i-1}$ et $\overline{x_i} = x_i$.

Donc : $$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \pi \cdot \left(f(\underline{x_i}) \right)^2 \cdot \Delta x}_{\text{somme minorante}} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{N} V_i}_{\substack{\text{volume} \\ \text{du corps de} \\ \text{révolution}}} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \pi \cdot \left(f(\overline{x_i}) \right)^2 \cdot \Delta x}_{\text{somme majorante}}$$

Le membre de gauche représente une somme minorante associée à la fonction $\pi \cdot f^2$.

Celui de droite représente une somme majorante.

Comme f est continue, $\pi \cdot f^2$ est aussi continue, donc intégrable.

En conséquence, lorsque N tend vers l'infini, les sommes minorante et majorante convergent vers $\pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx$.

Cette intégrale représente le volume du corps de révolution, puisque celui-ci est compris entre les sommes minorantes et majorantes.

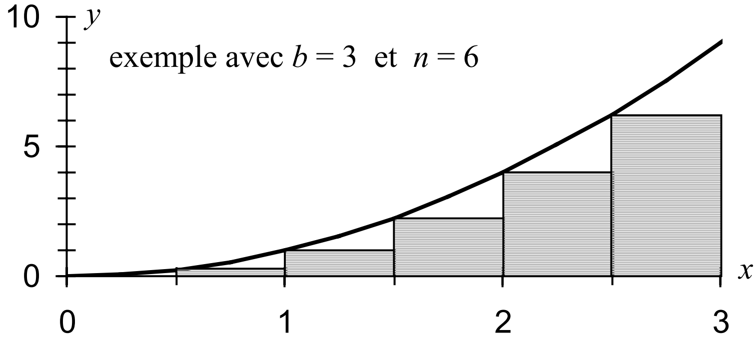
CQFD.

Appendice I : calculs d'aires par limite de sommation

Le but de ce qui suit est de calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite verticale d'équation $x = b$ et la courbe de $f(x) = x^d$, avec d un entier positif.
Notons $A_d(b)$ cette aire.

Avec la notation des intégrales : $A_d(b) = \int_0^b x^d \, dx$.

Découpons l'intervalle $[0 ; b]$ en n intervalles de même largeur : $h = \dfrac{b}{n}$.



$$A_d(b) = \lim_{n\to\infty}\left[h\cdot f(h) + h\cdot f(2\cdot h) + ... + h\cdot f(n\cdot h)\right]$$

Donc

$$A_d(b) = \lim_{n\to\infty} h\cdot\left[h^d + (2\cdot h)^d + ... + (n\cdot h)^d\right]$$

$$\Leftrightarrow \; A_d(b) = \lim_{n\to\infty} h^{d+1}\cdot\left[1 + 2^d + ... + n^d\right]$$

$$\Leftrightarrow \; A_d(b) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{n}\right)^{d+1}\cdot\left[1 + 2^d + ... + n^d\right]$$

$$\Leftrightarrow \; A_d(b) = b^{d+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{d+1}}\cdot\left[1 + 2^d + ... + n^d\right]$$

Pour calculer cette limite, il est utile de savoir exprimer la somme $1 + 2^d + ... + n^d$ plus simplement en fonction de n. Nous allons montrer ci-dessous que :

$$1 + 2^d + ... + n^d = \frac{n^{d+1}}{d+1} + \text{polynôme en } n \text{ de degré } \leq n$$

Avec ce résultat, on obtient :

$$A_d(b) = b^{d+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{d+1}}\cdot\left[\frac{n^{d+1}}{d+1} + \alpha_d\cdot n^d + \alpha_{d-1}\cdot n^{d-1} + ... + \alpha_0\right]$$

$$A_d(b) = b^{d+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{d+1} + \underbrace{\frac{\alpha_d}{n} + \frac{\alpha_{d-1}}{n^2} + ... + \frac{\alpha_0}{n^{d+1}}}_{\text{tend vers } 0 \text{ quand } n\to\infty}\right] = \frac{b^{d+1}}{d+1}$$

Conclusion : L'aire cherchée est : $\boxed{A_d(b) = \dfrac{b^{d+1}}{d+1}}$, pour d entier ≥ 0.

Pour $d = 0$, cela correspond à l'aire d'un rectangle de largeur b et de hauteur 1.
Pour $d = 1$, cela correspond à l'aire d'un triangle rectangle de base b et de hauteur 1.

Remarquez que la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{d+1}}{d+1}$ égale x^{d+1}.

A la page suivante, on montre que : $1 + 2^d + ... + n^d = \dfrac{n^{d+1}}{d+1} + \text{polynôme en } n \text{ de degré } \leq d$

Le but de ce qui suit est de trouver une formule pour calculer des sommes de puissances d'entiers consécutifs.

Notons : $S_d(n) = 1^d + 2^d + ... + n^d$, pour d entier ≥ 0.

On a : $S_0(n) = 1^0 + 2^0 + ... + n^0 = \underbrace{1+1+...+1}_{\text{n fois}} = n$

On a : $S_1(n) = 1^1 + 2^1 + ... + n^1 = 1 + 2 + ... + n$

Il existe plusieurs astuces pour calculer $S_1(n)$. En voici une, pas la plus simple, mais qui se généralise pour calculer $S_d(n)$ avec d entier ≥ 0.

$S_2(n+1) - S_2(n) = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 - \left[1^2 + 2^2 + ... + n^2\right] = (n+1)^2$

Exprimons cette différence d'une autre manière :

$S_2(n+1) - S_2(n) = 1^2 + (1+1)^2 + (2+1)^2 + (3+1)^2 + ... + (n+1)^2 - \left[1^2 + 2^2 + ... + n^2\right]$

$= 1^2 + (\cancel{1^2} + 2\cdot 1 + 1^2) + (\cancel{2^2} + 2\cdot 2 + 1^2) + (\cancel{3^2} + 2\cdot 3 + 1^2) + ... + (\cancel{n^2} + 2\cdot n + 1^2) - \left[\cancel{1^2} + \cancel{2^2} + ... + \cancel{n^2}\right]$

$= 1 + 2\cdot 1 + 1^2 + 2\cdot 2 + 1^2 + 2\cdot 3 + 1^2 + ... + 2\cdot n + 1^2$ on a simplifié

$= \underbrace{1+1+...+1}_{\text{n+1 fois}} + 2\cdot \underbrace{\left[1+2+3+...+n\right]}_{=S_1(n)}$ on a regroupé les termes et mis 2 en évidence.

Donc $n + 1 + 2\cdot S_1(n) = (n+1)^2$

On en déduit que : $S_1(n) = \dfrac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)\cdot n}{2}$, formule assez connue.

Répétons cette même idée pour calculer $S_2(n)$.

$S_3(n+1) - S_3(n) = 1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 - \left[1^3 + 2^3 + ... + n^3\right] = (n+1)^3$

Exprimons cette différence d'une autre manière :

$S_3(n+1) - S_3(n) = 1^3 + (1+1)^3 + (2+1)^3 + (3+1)^3 + ... + (n+1)^3 - \left[1^3 + 2^3 + ... + n^3\right]$

$= 1^3 + (\cancel{1^3} + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1) + (\cancel{2^3} + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1) + (\cancel{3^3} + 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1) + ... + (\cancel{n^3} + 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1)$

$- \left[\cancel{1^3} + \cancel{2^3} + ... + \cancel{n^3}\right]$

$= 1^3 \;\; + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 \;\; + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1 \;\; + 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1 \;\; + 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1$ on a simplifié

$= \underbrace{1+1+...+1}_{\text{n+1 fois}} + 3\cdot \underbrace{\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2\right]}_{=S_2(n)} + 3\cdot \underbrace{\left[1+2+3+...+n\right]}_{=S_1(n)}$ regroupement + mises en évidence.

Donc $n + 1 + 3\cdot S_2(n) + 3\cdot S_1(n) = (n+1)^3$

On en déduit que : $S_2(n) = \dfrac{(n+1)^3 - (n+1) - 3\cdot S_1(n)}{3} = \dfrac{(n+1)^3 - (n+1) - 3\cdot \dfrac{(n+1)\cdot n}{2}}{3}$.

Après simplification, on obtient : $S_2(n) = \dfrac{n\cdot (n+1)\cdot (2n+1)}{6}$

Remarquez que $S_2(n) = \dfrac{1}{3}\cdot n^3$ + polynôme de degré 2 en n.

En répétant la même idée, on obtient :

$n + 1 + 4\cdot S_3(n) + 6\cdot S_2(n) + 4\cdot S_1(n) = (n+1)^4$, les coefficients binomiaux apparaissent.

$n + 1 + 5\cdot S_4(n) + 10\cdot S_3(n) + 10\cdot S_2(n) + 5\cdot S_1(n) = (n+1)^5$, les coefficients binomiaux apparaissent.

$n + 1 + (d+1)\cdot S_d(n) + ... + (d+1)\cdot S_1(n) = (n+1)^{d+1}$, les coefficients binomiaux apparaissent.

Les seuls termes qui sont puissance de $d + 1$, sont $S_d(n)$ et $(n + 1)^{d+1}$.

Donc $S_d(n) = \dfrac{1}{d+1}\cdot n^{d+1}$ + polynôme de degré d en n. CQFD

Il y a du travail, mais le résultat est intéressant.

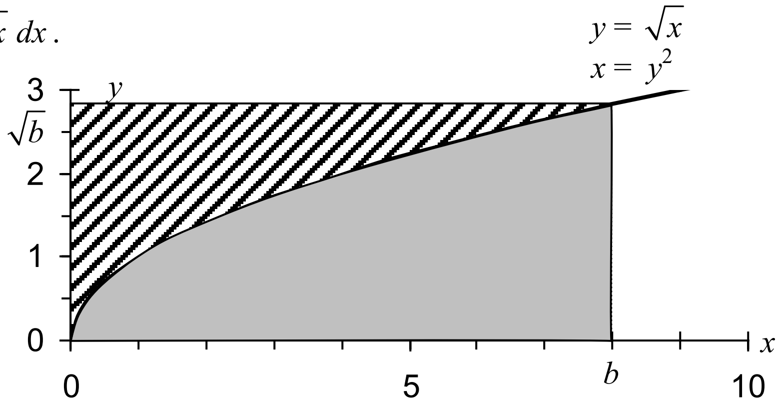
Dans l'appendice suivant, nous montrons une autre manière de calculer des aires.

Appendice II : calculs d'aires par différence d'aires connues

Le but de ce qui suit est de calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite verticale d'équation $x = b$ et la courbe de $f(x) = \sqrt{x}$.

Notons $A_{0,5}(b)$ cette aire.

Avec la notation des intégrales : $A_{0,5}(b) = \int_0^b \sqrt{x}\, dx$.



L'aire hachurée est l'aire sous la parabole d'équation $x = y^2$, y variant entre 0 et $\sqrt{b}$.

Donc l'aire hachurée égale : $\dfrac{\left(\sqrt{b}\right)^3}{3}$

L'aire grise égale l'aire cherchée.

Elle vaut l'aire du rectangle de base b et de hauteur $\sqrt{b}$, moins l'aire hachurée.

$A_{0,5}(b) = \int_0^b \sqrt{x}\, dx = b \cdot \sqrt{b} - \dfrac{\left(\sqrt{b}\right)^3}{3} = \left(\sqrt{b}\right)^3 - \dfrac{\left(\sqrt{b}\right)^3}{3} = \dfrac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{b}\right)^3$. Rappelons que : $\left(\sqrt{b}\right)^3 = b^{\frac{3}{2}}$.

Remarquez que la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^3 = \dfrac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$ égale $\sqrt{x}$.

En utilisant la même méthode, pouvez-vous montrer que :

Avec la notation des intégrales : $\int_0^b \sqrt[3]{x}\, dx = \dfrac{3}{4} \cdot \left(\sqrt[3]{b}\right)^4$. Rappelons que : $\left(\sqrt[3]{b}\right)^4 = b^{\frac{4}{3}}$.

Appendice III : calcul d'aire par limite de sommation non équidistante.

Le but de ce qui suit est de calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la droite verticale d'équation $x = 1$, la droite verticale d'équation $x = b$ et la courbe de $f(x) = x^d$, avec d un nombre réel $\neq -1$.
Notons $A_d(b)$ cette aire.

Avec la notation des intégrales : $A_d(b) = \int_1^b x^d \, dx$.

L'idée principale est de découper l'intervalle [1 ; b] suivant une suite géométrique.

Préliminaire :
Multipliez : $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^{n-1})$ par $(x - 1)$ pour vérifier que l'on obtient : $x^n - 1$

Donc, si $x \neq 1$, on a : $\boxed{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}}$ cette somme s'appelle sur **série géométrique**.

Pour calculer l'aire désirée, pour $b \neq 1$, posons : (pour $b \in]\,0\,;\,1[$, la démarche reste valable)
n un grand nombre entier, $\alpha = \sqrt[n]{b}$ et $x_k = \alpha^k$ $k = 0, 1, 2, ..., n$.
Donc : $x_0 = \alpha^0 = 1$ et $x_n = \alpha^n = b$.
Découpons selon des intervalles de largeur $x_{k+1} - x_k = \alpha^{k+1} - \alpha^k = \alpha^k \cdot (\alpha - 1)$
$\alpha = \sqrt[n]{b}$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, donc $x_{k+1} - x_k$ tend vers 0 si $n \to \infty$.
On a :

$$A_d(b) = \lim_{n\to\infty}\left[(x_1 - x_0)\cdot f(x_0) + (x_2 - x_1)\cdot f(x_1) + ... + (x_n - x_{n-1})\cdot f(x_{n-1})\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\alpha^0\cdot(\alpha-1)\cdot\left(\alpha^0\right)^d + \alpha^1\cdot(\alpha-1)\cdot\left(\alpha^1\right)^d + \alpha^2\cdot(\alpha-1)\cdot\left(\alpha^2\right)^d + ... + \alpha^{n-1}\cdot(\alpha-1)\cdot\left(\alpha^{n-1}\right)^d\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}(\alpha-1)\cdot\left[\left(\alpha^0\right)^{d+1} + \left(\alpha^1\right)^{d+1} + ... + \left(\alpha^{n-1}\right)^{d+1}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}(\alpha-1)\cdot\left[\alpha^{0\cdot(d+1)} + \alpha^{1\cdot(d+1)} + ... + \alpha^{(n-1)\cdot(d+1)}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}(\alpha-1)\cdot\left[\left(\alpha^{d+1}\right)^0 + \left(\alpha^{d+1}\right)^1 + ... + \left(\alpha^{d+1}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}(\alpha-1)\cdot\frac{\left(\alpha^{d+1}\right)^n - 1}{\alpha^{d+1} - 1}$$ valable si $\alpha \neq 1$, donc si $d \neq -1$.

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha-1)}{\alpha^{d+1}-1}\cdot\left(\left(\alpha^{d+1}\right)^n - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{\alpha^{d+1}-1}{\alpha-1}}\cdot\left(\left(\alpha^n\right)^{d+1} - 1\right)$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{\alpha^{d+1}-1}{\alpha-1}}\right)\cdot\left(b^{d+1} - 1\right)$$ la limite fait apparaître l'inverse de la dérivée de $y = x^{d+1}$ en $x = 1$.

Si n tends vers l'infini, alors α tends vers 1 et la première limite égale $1/(d+1)$.

Conclusion : $\boxed{A_d(b) = \int_1^b x^d \, dx = \dfrac{1}{d+1}\cdot\left(b^{d+1} - 1\right)}$ pour $d \neq -1$.

Ceci confirme les résultats des appendices précédents ! Pour $d = -1$, regardez l'appendice suivant.

Remarquez que la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{d+1}\cdot\left(x^{d+1} - 1\right)$ égale x^d.

Appendice IV : calcul d'aire sous $y = 1/x$.

Le but de ce qui suit est de calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la droite verticale d'équation $x = 1$, la droite verticale d'équation $x = b$ et la courbe de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Notons $A_{-1}(b)$ cette aire.

Avec la notation des intégrales : $A_{-1}(b) = \displaystyle\int_1^b \frac{1}{x}\,dx$.

L'idée principale est la même que précédemment, c'est à dire de découper l'intervalle $[1\,;\,b]$ suivant une suite géométrique.

Pour calculer l'aire désirée, pour $b \neq 1$, posons : (pour $b \in]\,0\,;\,1[$, la démarche reste valable)
n un grand nombre entier, $\alpha = \sqrt[n]{b}$ et $x_k = \alpha^k$ $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Donc : $x_0 = \alpha^0 = 1$ et $x_n = \alpha^n = b$.

Découpons selon des intervalles de largeur $x_{k+1} - x_k = \alpha^{k+1} - \alpha^k = \alpha^k \cdot (\alpha - 1)$

$\alpha = \sqrt[n]{b}$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, donc $x_{k+1} - x_k$ tend vers 0 si $n \to \infty$.

On a :

$$A_{-1}(b) = \lim_{n\to\infty}\left[(x_1 - x_0)\cdot f(x_0) + (x_2 - x_1)\cdot f(x_1) + ... + (x_n - x_{n-1})\cdot f(x_{n-1})\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\alpha^0\cdot(\alpha-1)\cdot\frac{1}{\alpha^0} + \alpha^1\cdot(\alpha-1)\cdot\frac{1}{\alpha^1} + \alpha^2\cdot(\alpha-1)\cdot\frac{1}{\alpha^2} + ... + \alpha^{n-1}\cdot(\alpha-1)\cdot\frac{1}{\alpha^{n-1}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\alpha - 1)\cdot n$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt[n]{b} - 1)$$

Pour calculer cette limite, posons $x = \dfrac{1}{n}$, qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

$A_{-1}(b) = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot(b^x - 1)$ c'est la dérivée de $y = b^x$ en $x = 0$.

$\left(b^x\right)' = \left(e^{x\cdot\ln(b)}\right)' = \ln(b)\cdot e^{x\cdot\ln(b)}$ qui vaut $\ln(b)$ pour $x = 0$.

Conclusion : $\boxed{A_{-1}(b) = \displaystyle\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \ln(b)}$ Remarquez que la dérivée de : $x \mapsto \ln(x)$ égale $1 / x$.

En choisissant un découpage astucieux de l'intervalle d'intégration, on a pu calculer l'aire sous n'importe quelle courbe de la forme $y = x^d$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\boxed{A_{-1}(b) = A_{-1}(a\cdot b) - A_{-1}(a)}$, qui est la propriété fondamentale des logarithmes.

$A_{-1}(b) = \displaystyle\int_1^b \frac{1}{x}\,dx$ et $A_{-1}(a\cdot b) - A_{-1}(a) = \displaystyle\int_a^{a\cdot b} \frac{1}{x}\,dx$

A un découpage de $[1\,;\,b]$ en par x_0 ; x_1 ; x_2 ; x_3 ; ... ; x_n, correspond un découpage de $[a\,;\,a\cdot b]$ par $a\cdot x_0$; $a\cdot x_1$; $a\cdot x_2$; $a\cdot x_3$; ... ; $a\cdot x_n$.

L'aire du rectangle de base $x_{k+1} - x_k$ est $(x_{k+1} - x_k)\cdot\dfrac{1}{x_k}$.

L'aire du rectangle de base $a\cdot x_{k+1} - a\cdot x_k$ est $(a\cdot x_{k+1} - a\cdot x_k)\cdot\dfrac{1}{a\cdot x_k}$ qui est la même que précédemment.

Donc les deux aires $A_{-1}(b)$ et $A_{-1}(a\cdot b) - A_{-1}(a)$ sont égales !!!

Appendice V : calcul d'aire sous $y = e^x$.

Le but de ce qui suit est de calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la droite verticale d'équation $x = 0$, la droite verticale d'équation $x = b$ et la courbe de $f(x) = e^x$.
Notons $E(b)$ cette aire.

Avec la notation des intégrales : $E(b) = \int_0^b e^x \, dx$.

Pour calculer l'aire désirée, pour $b \neq 0$, posons : (pour $b < 0$, la démarche reste valable)
N un grand nombre entier, $h = \dfrac{b}{N}$ et $x_k = k \cdot h$ $k = 0, 1, 2, ..., N$.

Donc : $x_0 = 0 \cdot h = 0$ et $x_n = N \cdot h = b$.
Découpons selon des intervalles de largeur h.
On a :

$$E(b) = \lim_{N\to\infty} \left[(x_1 - x_0) \cdot f(x_0) + (x_2 - x_1) \cdot f(x_1) + ... + (x_N - x_{N-1}) \cdot f(x_{N-1}) \right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left[h \cdot e^{0 \cdot h} + h \cdot e^{1 \cdot h} + h \cdot e^{2 \cdot h} + ... + h \cdot e^{(N-1) \cdot h} \right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} h \cdot \left[\left(e^h\right)^0 + \left(e^h\right)^1 + \left(e^h\right)^2 + ... + \left(e^h\right)^{(N-1)} \right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} h \cdot \frac{e^{N \cdot h} - 1}{e^h - 1} = \lim_{N\to\infty} h \cdot \frac{e^b - 1}{e^h - 1} = \lim_{h\to 0} h \cdot \frac{e^b - 1}{e^h - 1}$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{h}{e^h - 1} \right) \cdot (e^b - 1) = \left(\lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{e^h - 1}{h}} \right) \cdot (e^b - 1) = \frac{1}{\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}} \cdot (e^b - 1) = \frac{1}{\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h - e^0}{h - 0}} \cdot (e^b - 1)$$

Cette limite fait intervenir l'inverse de la dérivée de $y \to e^x$ en $x = 0$.
La dérivée de e^x étant e^x, la limite vaut $e^0 = 1$.

Conclusion : $\boxed{E(b) = \int_0^b e^x \, dx = e^b - 1}$

Remarquez que la dérivée de la fonction $x \mapsto e^x - 1$ égale e^x.

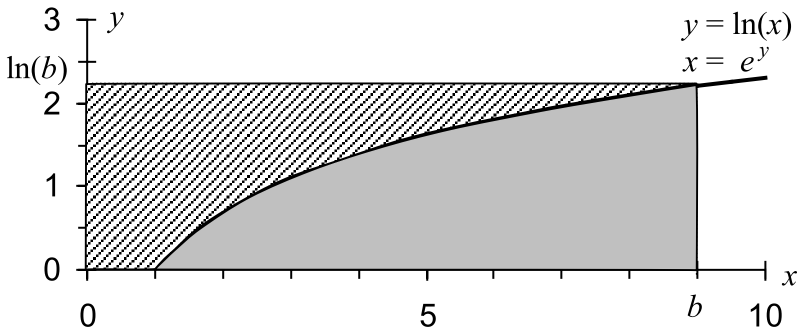
Appendice VI : calcul d'aire sous $y = \ln(x)$.

Le but de ce qui suit est de calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la droite verticale d'équation $x = 1$, la droite verticale d'équation $x = b$ et la courbe de $f(x) = \ln(x)$.
Notons $L(b)$ cette aire. La méthode est similaire à celle de l'appendice II.

Avec la notation des intégrales : $L(b) = \int_1^b \ln(x)\,dx$.

L'aire hachurée est l'aire sous l'exponentielle d'équation $x = e^y$, y variant entre 0 et $\ln(b)$.
Donc selon l'appendice V, l'aire hachurée égale : $e^{\ln(b)} - 1 = b - 1$.

L'aire grise égale l'aire cherchée.
Elle vaut l'aire du rectangle de base b et de hauteur $\ln(b)$, moins l'aire hachurée.



$$L(b) = \int_1^b \ln(x)\,dx = b \cdot \ln(b) - (b-1) = b \cdot (\ln(b) - 1) + 1.$$

Il est bon de vérifier que pour $b = 1$, l'égalité est correcte.

Conclusion : $\boxed{\int_1^b \ln(x)\,dx = b \cdot (\ln(b) - 1) + 1}$

Remarquez que la dérivée de la fonction $x \mapsto x \cdot (\ln(x) - 1) + 1$ égale $\ln(x)$.

Appendice VII : calcul d'aire sous $y = \cos(x)$.

Le but de ce qui suit est de calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite verticale d'équation $x = \alpha$ et la courbe de $f(x) = \cos(x)$.
Notons $C(\alpha)$ cette aire.

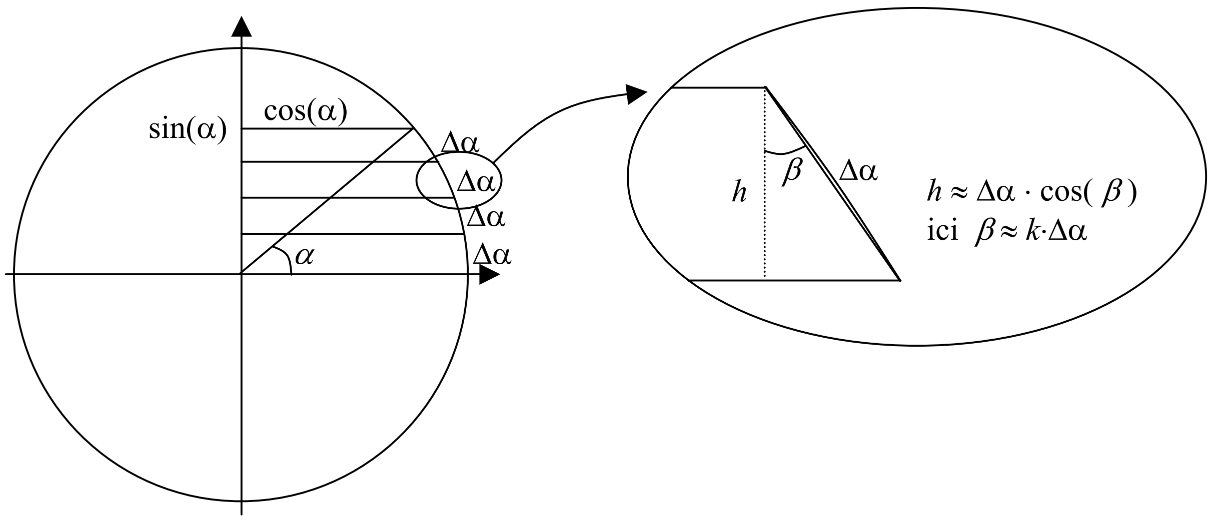
Avec la notation des intégrales : $C(\alpha) = \int_0^\alpha \cos(x)\, dx$.

Cette fois, il est compliqué de calculer directement l'intégrale cherchée.
$\sum_{k=0}^{N-1} \cos(k \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$ n'est pas simple à exprimer dans $\mathbb{R}$. (En utilisant les nombres complexes $\mathbb{C}$, la somme se calcule facilement à l'aide de la formule de Moivre.)

Aidons-nous du cercle trigonométrique pour calculer une aire.

Découpons un arc de cercle d'angle α en N arcs d'angles : $\Delta\alpha = \dfrac{\alpha}{N}$.

Découpons des bandes presque trapézoïdales comme ci-dessous.
Le $k^{\text{ème}}$ trapèze a une grande base égale à $\cos(k{\cdot}\Delta\alpha)$, une petite base égale à $\cos((k + 1){\cdot}\Delta\alpha)$, et une hauteur essentiellement égale à $h = \Delta\alpha \cdot \cos(k{\cdot}\Delta\alpha)$.



L'aire du $k^{\text{ème}}$ trapèze vaut donc : $\dfrac{\cos(k \cdot \Delta\alpha) + \cos((k+1) \cdot \Delta\alpha)}{2} \cdot \Delta\alpha \cdot \cos(k \cdot \Delta\alpha)$

Quand $\Delta\alpha$ est très petit, $\cos((k + 1){\cdot}\Delta\alpha) \approx \cos(k{\cdot}\Delta\alpha)$ et donc

L'aire du $k^{\text{ème}}$ trapèze est presque égale à : $\Delta\alpha \cdot \cos^2(k \cdot \Delta\alpha)$. Rappelons que : $\Delta\alpha = \dfrac{\alpha}{N}$

La somme des aires de ces trapèzes s'exprime ainsi :

$\Delta\alpha \cdot [\cos^2(0{\cdot}\Delta\alpha) + \cos^2(1{\cdot}\Delta\alpha) + \cos^2(2{\cdot}\Delta\alpha) + ... + \cos^2((N - 1){\cdot}\Delta\alpha)]$

Cette aire est presque égale à l'aire du secteur d'angle α plus l'aire du triangle de base $\cos(\alpha)$ et de hauteur $\sin(\alpha)$. A la limite, il y a égalité.

L'aire du secteur d'angle α vaut : $\dfrac{\alpha}{2}$. L'aire du triangle vaut : $\dfrac{1}{2} \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$.

Donc $\dfrac{\alpha + \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{2} = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{\alpha}{N} \cdot \left[\cos^2\left(0 \cdot \dfrac{\alpha}{N}\right) + \cos^2\left(1 \cdot \dfrac{\alpha}{N}\right) + \cos^2\left(2 \cdot \dfrac{\alpha}{N}\right) + ... + \cos^2\left((N-1) \cdot \dfrac{\alpha}{N}\right) \right]$

La limite est une intégrale. Cela signifie que : $\boxed{\int_0^\alpha \cos^2(x)\, dx = \dfrac{\alpha + \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{2}}$

Ce n'est pas exactement l'intégrale cherchée, mais c'est un résultat qui aidera.

Pour calculer l'aire désirée : $C(b) = \int_0^b \cos(x)\, dx$, utilisons la relation : $\cos(x) = 2\cdot\cos^2(x/2) - 1$

$$C(b) = \int_0^b \cos(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \frac{\alpha}{N}\cdot\left[\cos\left(0\cdot\frac{\alpha}{N}\right) + \cos\left(1\cdot\frac{\alpha}{N}\right) + \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{N}\right) + \ldots + \cos\left((N-1)\cdot\frac{\alpha}{N}\right)\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\alpha}{N}\cdot\left[2\cdot\cos^2\left(0\cdot\frac{\alpha}{2N}\right) - 1 + 2\cdot\cos^2\left(1\cdot\frac{\alpha}{2N}\right) - 1 + 2\cdot\cos^2\left(2\cdot\frac{\alpha}{2N}\right) - 1 + \ldots + 2\cdot\cos^2\left((N-1)\cdot\frac{\alpha}{2N}\right) - 1\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} 2\cdot\frac{\alpha}{2N}\cdot 2\cdot\left[\cos^2\left(0\cdot\frac{\alpha}{2N}\right) + \cos^2\left(1\cdot\frac{\alpha}{2N}\right) + \cos^2\left(2\cdot\frac{\alpha}{2N}\right) + \ldots + \cos^2\left((N-1)\cdot\frac{\alpha}{2N}\right)\right] - \frac{\alpha}{N}\cdot N$$

$$= 4\cdot\left[\frac{\frac{\alpha}{2} + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2}\right] - \alpha$$

$$= 2\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin(\alpha)$$

Conclusion : $\boxed{\int_0^\alpha \cos(x)\, dx = \sin(\alpha)}$

Remarquez que la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ égale $\cos(x)$.

Avec ce résultat, il est facile de calculer : $\int_0^\alpha \sin(x)\, dx$, en utilisant $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$.

$$\int_0^\alpha \sin(x)\, dx = \int_0^\alpha \cos(x - \pi/2)\, dx = \int_{-\pi/2}^{\alpha-\pi/2} \cos(x)\, dx = \int_0^{\alpha-\pi/2} \cos(x)\, dx - \int_0^{-\pi/2} \cos(x)\, dx$$
$$= \sin(\alpha - \pi/2) - \sin(-\pi/2) = -\cos(\alpha) + 1$$

Conclusion : $\boxed{\int_0^\alpha \sin(x)\, dx = -\cos(\alpha) + 1}$

Vérifiez que pour $\alpha = 0$, l'égalité est correcte.

Remarquez que la dérivée de la fonction $x \mapsto -\cos(x) + 1$ égale $\sin(x)$.

En suivant les méthodes des appendices II et VI, il est facile de calculer : $\int_0^b \arccos(x)\, dx$, ainsi que $\int_0^b \arcsin(x)\, dx$.

On trouve que : $\boxed{\int_0^b \arccos(x)\, dx = b\cdot\arccos(b) - \sqrt{1-b^2} + 1}$

et $\boxed{\int_0^b \arcsin(x)\, dx = b\cdot\arcsin(b) + \sqrt{1-b^2} - 1}$

Index