I. Rappels et révision

En troisième année, vous avez étudié deux notions importantes, celle de **limite** et celle de **dérivée**.

Soit une fonction réelle f définie sur un voisinage d'un point a.
Définition :
Lorsque x tend vers a, la limite de $f(x)$ égale L, signifie que lorsque x se rapproche de a, $f(x)$ se rapproche de L. Notation : $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = L}$

Parfois on ne s'intéresse qu'au cas où $x < a$.
On parle alors de "**la limite à gauche**". On écrit : $\boxed{\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L}$

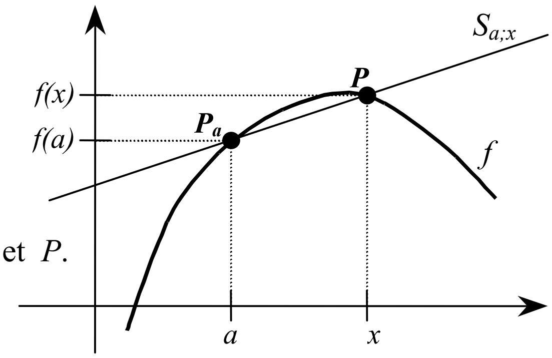
De manière similaire, on peut s'intéresse au cas où $x > a$.
On parle alors de "**la limite à droite**". On écrit : $\boxed{\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L}$

La dérivée d'une fonction f en un point a est *une limite particulière*.
Rappelons sa définition :
Si la limite : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est un nombre réel, alors

on dit que "**la fonction f est dérivable en a**", on note : $\boxed{f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}$

et on appelle "**le nombre dérivé de la fonction f au point a**" la valeur $f'(a)$.
$f'(a)$ s'appelle aussi : "**la dérivée de f en a**".

Géométriquement, **la dérivée de f en a vaut la pente de la tangente à f en $(a\,;\,f(a))$.**
Notons $P_a = (a\,;f(a))$ le point du graphe de f, d'abscisse a.
Soit $x \neq a$ un nombre proche de a.

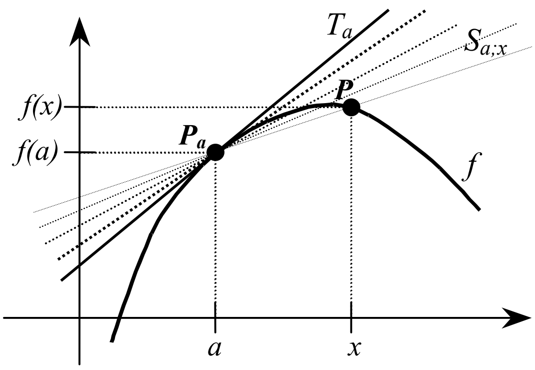


Notons
$P = (x\,;f(x))$ le point du graphe de f, d'abscisse x.

Soit $S_{a;x}$ la droite passant par les points P_a et P.
Cette droite s'appelle la **sécante** de f passant par les points P_a et P.

La **pente** de cette droite vaut : $\boxed{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}$

On remarque que le point P tend vers le point P_a,
en suivant la courbe de la fonction f.



> Définition :
> Si les sécantes $S_{a;x}$ tendent vers une droite T_a, alors cette droite T_a s'appelle la **tangente** à f au point P_a.

Remarques :
1) Les pentes des sécantes $S_{a;x}$ tendent vers la pente de la tangente, T_a qui vaut donc : $f'(a)$.
2) Toutes ces sécantes et la tangente T_a passent par le point P_a, donc $T_a(a) = f(a)$.

Règles de dérivations et quelques dérivées particulières.

Voici une liste de fonctions avec leur dérivée.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
constante	0	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$
x	1	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	$\dfrac{1}{x^n}$	$-n\cdot\dfrac{1}{x^{n+1}}$
e^x	e^x	$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$		
$\cos(x)$	$-\sin(x)$		
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$		

Voici quelques règles de dérivations.

Si f et g sont deux fonctions dérivables en x, alors les dérivées suivantes existent et on a les égalités:

1) $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$

1') $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$

2) $(\lambda\cdot f)'(x)=\lambda\cdot f'(x)$ où λ est un nombre réel.

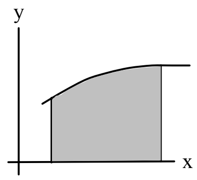
3) $(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$, si $g(x)\neq 0$. Sinon $\dfrac{f}{g}$ n'est pas définie en x.

5) $\left(g(f(x))\right)'=g'(f(x))\cdot f'(x)$ ici, il faut que g soit dérivable en $f(x)$.

6) $\left(f^n\right)'(x)=n\cdot f^{n-1}(x)\cdot f'(x)$ où n est un nombre réel.

II. Un peu d'histoire



Depuis des millénaires, de nombreux problèmes se ramènent au calcul de l'aire « sous une courbe », c'est-à-dire de l'aire comprise entre le graphe, l'axe horizontal et deux droites verticales.
Comment les mathématiciens s'y sont-ils pris ?

Intuitivement, chacun pense savoir ce qu'est l'aire d'une région délimitée par des courbes, alors que les formules géométriques que l'on connaît ne s'appliquent qu'à des surfaces limitées par des droites, telles les rectangles ou les triangles.

Pendant plus de deux mille ans, différentes méthodes de calculs d'aires délimitées par des courbes ont été appliquées. En voici quelques-unes :

L'Egypte et Babylone

Dans l'antiquité, le calcul d'aire était nécessaire dans de nombreuses situations pratiques telles que le partage des terres fertiles après les crues du Nil. Différentes formules étaient alors utilisées, donnant parfois des résultats assez approximatifs.

Pour l'aire d'un disque, par exemple, les Babyloniens utilisaient la formule $\frac{c^2}{12}$, "c" étant le périmètre du disque. Il semble que cette formule était couramment admise, mais aucune trace de sa provenance ou d'une justification ne semble exister.
Pouvez-vous la justifier ?

La Grèce classique

Dans la Grèce classique le point de vue adopté fut différent. L'aspect pratique devint secondaire, ce sont les questions théoriques (« qu'est-ce que l'aire ? ») et la déduction logique qui dominèrent.

Eudoxe[1] inventa une méthode pour le calcul de l'aire d'une surface courbe, décrite comme « le premier pas de l'analyse mathématique ». Cette méthode, appelée *méthode d'exhaustion* est décrite dans *les Eléments,* texte célèbre écrit par **Euclide**[2].

1 **Eudoxe** *vécut environ de 408 à 355 avant JC.*
2 **Euclide** *vécut environ 50 ans après Eudoxe.*

Voici un exemple d'application de cette méthode : pour trouver l'aire d'un disque, on trace, à l'intérieur du disque, un carré C_{minorant} dont les sommets sont sur le cercle .
A chaque sommet du carré, on trace la tangente au cercle. Ces droites forment un autre carré C_{majorant}.
Le disque est maintenant pris en sandwich entre deux carrés. Son aire est plus grande que l'aire du premier carré et plus petite que celle du deuxième carré (voir figure 1).

$$\text{aire de } C_{\text{minorant}} < \text{aire du disque} < \text{aire de } C_{\text{majorant}}$$

On partage ensuite les arcs AB, BC, CD et DA en deux parties égales et on trace l'octogone $APBQCRDS$ (voir figure 2). L'aire de l'octogone est plus grande que celle du carré, mais reste inférieure à celle du disque.

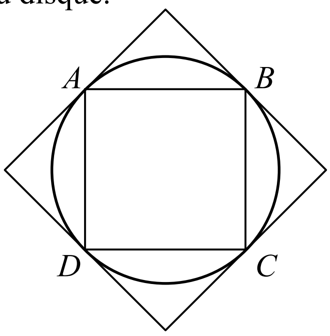


figure 1

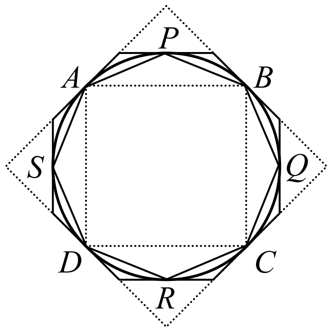


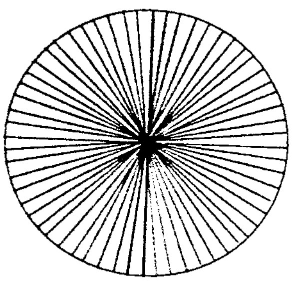
figure 2

On trace alors les tangentes au cercle aux points P, Q, R et S. Ces tangentes coupent les sommets du grand carré et forment un autre octogone extérieur au disque.
Le cercle est maintenant pris en sandwich entre deux octogones, l'un minorant, l'autre majorant.

Ce procédé peut être répété autant de fois que l'on veut. Il conduira à un cercle pris en sandwich entre deux polygones possédant un grand nombre de côtés dont, moyennant un certain effort, il est possible de calculer l'aire. De cette manière, il est non seulement possible d'approcher l'aire du disque, mais également de connaître la précision de cette approximation.

Par la suite, **Archimède**[3] utilisa abondamment la méthode d'exhaustion décrite ci-dessus pour déterminer des aires et des volumes, en particulier l'aire déterminée par un segment de parabole.
Pendant les 2000 ans qui suivirent, il y eut peu de travaux sur le calcul d'aires et de volumes.

Johannes Kepler[4]
Au début du 17^{e} siècle, Johannes Kepler fut l'un des premiers de l'époque moderne à s'intéresser à ce genre de problèmes. Son père, semble-t-il, tenait une taverne, et le jeune Kepler, qui aidait souvent au service, aurait eu l'impression que les marchands de vin gonflaient leurs prix. Il chercha donc une méthode qui lui permette de calculer le volume de vin contenu dans un tonneau.

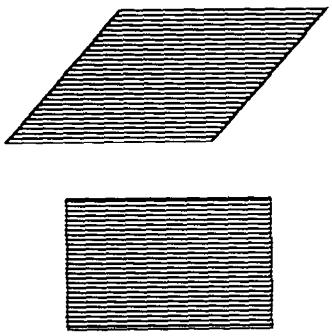


Il commença par travailler sur l'aire d'un disque. Il considérait que le disque est composé d'un nombre infini de triangles dont la base infiniment petite est sur la circonférence du cercle et le sommet au centre du cercle. Comme l'aire d'un triangle s'obtient en multipliant la moitié de sa base par sa hauteur (infiniment proche du rayon du cercle), il décida que l'aire de tous les triangles réunis devait être obtenue en multipliant la moitié de la circonférence par le rayon.
Expliquez son raisonnement !

De la même manière, il considéra que le volume d'un tonneau était constitué d'un nombre infini de tranches infiniment minces.

[3] **Archimède** *vécut à Syracuse en Sicile au 3e siècle avant JC. Il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.*
[4] **Johannes Kepler** (1571 - 1630) *est surtout connu pour la découverte des lois des mouvements planétaires.*

Bonaventura Cavalieri[5]



Au 17e siècle également, Bonaventura Cavalieri considérait qu'une aire est composée d'une infinité de segments parallèles. Pour montrer que l'aire d'un parallélogramme est la même que celle d'un rectangle de même base et de même hauteur, il affirmait que toutes deux sont composées du même nombre de segments de même longueur, et que ces deux figures devaient par conséquent avoir la même aire.

Cavalieri considérait également qu'un volume est constitué d'un nombre infini de plans parallèles, comme les pages d'un livre ou un paquet de cartes. Il les appelait segments ou plans indivisibles. Ces segments et ces plans étaient, selon lui, les éléments de base à partir desquels les aires et les volumes étaient construits, et ils ne pouvaient pas être divisés en plus petits morceaux.

Pierre Fermat[6]
Simon Stevin[7], puis Pierre Fermat utilisèrent une adaptation de la méthode grecque d'exhaustion, mais au lieu d'utiliser des polygones, ils développèrent une méthode d'approximation de l'aire sous une courbe par des rectangles. Ce procédé est à la base des théories modernes.

Isaac Newton[8] **et Gottfried Wilhelm Leibniz**[9]
Les bases du calcul différentiel et intégral furent établies par Isaac Newton, et Gottfried Wilhelm Leibniz durant la 2ème moitié du 17ème siècle, puis réinventées par les frères Jakob et Johann Bernoulli[10] quelques décennies plus tard.

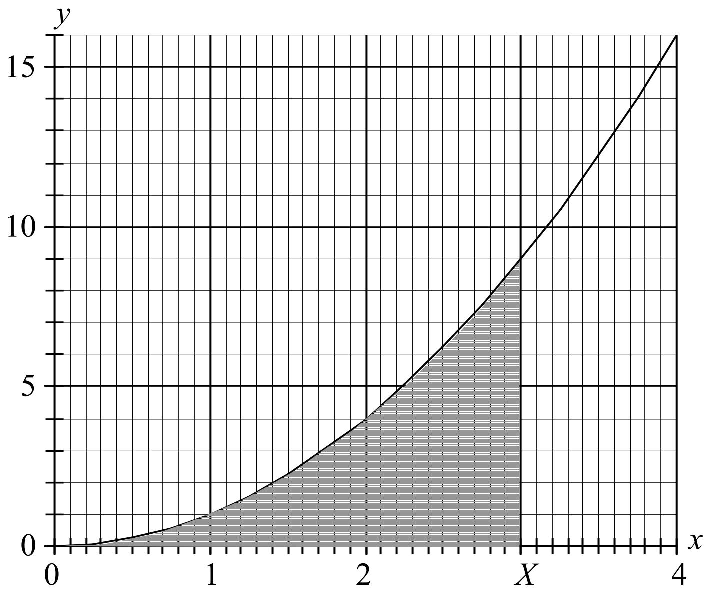
Bernhard Riemann[11]
Il fallut attendre le 19e siècle pour que Bernhard Riemann définisse rigoureusement la notion d'intégrale d'une fonction et démontre rigoureusement le théorème fondamental du calcul intégral.
C'est essentiellement l'intégrale de Riemann que nous étudierons dans ce cours.
Au 20e siècle, des généralisations de la notion d'intégrale ont été proposées par Henri Lebesgue[12], puis par Jaroslav Kurzweil[13] et Ralph Henstock[14].
Dans les applications usuelles de calcul d'aire, de volume, de longueur d'arc de courbe, l'intégrale de Riemann est tout-à-fait satisfaisante.

---

5 Bonaventura Cavalieri, (né à Milan en 1598, mort en 1647), ami de Gallileo Galliei.
6 Pierre Fermat (1601-1665), inventeur des décimaux
7 Simon Stevin (1548 - 1620)
8 Isaac Newton (1642 - 1727), un des plus grand physicien de tout les temps, fondateur du calcul différentiel.
9 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), fondateur du calcul différentiel et concurrent de Newton.
10 Jakob Bernoulli (1654 - 1705), mathématicien suisse, membre d'une famille de mathématiciens.
Johann Bernoulli (1667 - 1748), frère de Jakob, père de Daniel et enseignant de Léonard Euler.
La famille Bernoulli contribua fortement à la diffusion du calcul différentiel et intégral en Europe.
11 Bernhard Riemann (Allemagne, 1826 -1866)
12 Henri Léon Lebesgue (1875-1941), il généralisa l'intégrale de Riemann en 1901.
13 Jaroslav Kurzweil (né le 7 mai 1926 à Prague). En 1957 il modifia légèrement la définition de l'intégrale de Riemann pour la généraliser. c.f. http://www.learned.cz/eng/engbio/kurzweil.pdf et http://www.math.cas.cz/~schwabik/jk80.pdf
14 Ralph Henstock (né le 2 juin 1923 en Angleterre). En 1961 il fit la même découverte que Kurzweil, indépendamment de lui. Ceci montre que les recherches sur ce sujet continuent encore de nos jours ! A noter que peu de mathématiciens connaissent les généralisations faites par Kurzweil et Henstock !
c.f. http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/ccc/gauge/

III. Aire sous une parabole

On se propose de trouver l'aire $A(X)$ du domaine ombré ci-dessous. Elle dépendra de la valeur X.
Ce domaine est limité par la courbe d'équation $f(x) = x^2$, l'axe Ox, ainsi que par la droite verticale d'abscisse $x = X$, où X est un nombre positif quelconque.
Sur le graphique ci-dessous, la valeur particulière $X = 3$ a été utilisée.



Ce problème n'est pas simple.
Voici une aide pour le résoudre.

Il faudra décomposer l'intervalle $[0\,;X]$ en N intervalles de largeur $\Delta x = \dfrac{X}{N}$,
où N sera un nombre qui tendra vers l'infini.

a) Pour vous aider à visualiser l'idée de la résolution, tracez sur le graphique des rectangles de bases Δx et de hauteur $f(x_i)$, où $x_i = i \cdot \Delta x$, en utilisant 6 comme valeur pour N.
i varie de 1 à N.
Remarquez que la somme des N aires des rectangles est une approximation de l'aire cherchée.

b) Écrivez en fonction de N et X la somme $S(N)$ des aires des rectangles de base Δx et de hauteur $f(x_i)$, où $x_i = i \cdot \Delta x$, i varie de 1 à N. Cette somme $S(N)$ approxime l'aire cherchée $A(X)$.
Utilisez une formule du début de la table CRM pour simplifier l'écriture de $S(N)$.

c) Calculez la limite : $\lim\limits_{N \to \infty} S(N)$ et remarquez qu'elle correspond à l'aire cherchée $A(X)$.

La méthode utilisée qui consiste à subdiviser $[0\,;X]$ en N intervalles puis à approximer l'aire sous la parabole par une somme d'aires de petits rectangles a déjà été utilisée par le mathématicien Pierre de Fermat au 17ème siècle.
On peut constater que cette méthode fait appel à un certain nombre d'astuces ou de connaissances algébriques, comme par exemple, la formule de la somme des carrés des N premiers nombres naturels. De nombreuses méthodes furent ainsi astucieusement établies pour différentes courbes, mais en l'absence de méthode générale, chaque courbe représentait un nouveau problème.

Le symbole $\sum$ pour noter des sommes.

Par la suite, il sera souvent utile de calculer des sommes du genre :

$$S = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{N-1}) + f(x_N)$$

Les trois petits points "..." ne sont pas précis et cette manière d'écrire est longue. Les mathématiciens ont donc introduit le symbole $\sum$ pour simplifier cette écriture. On note :

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)} \qquad \text{où } N \text{ est un entier positif.}$$

Donc $\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$ est une manière abrégée d'écrire $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{N-1}) + f(x_N)$.
L'indice "i" est dit **muet**, car il peut être remplacé par n'importe quelle lettre.
$\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$; $\sum_{j=1}^{N} f(x_j)$; $\sum_{k=1}^{N} f(x_k)$ représente exactement la même somme.

Utilisation de cette écriture.

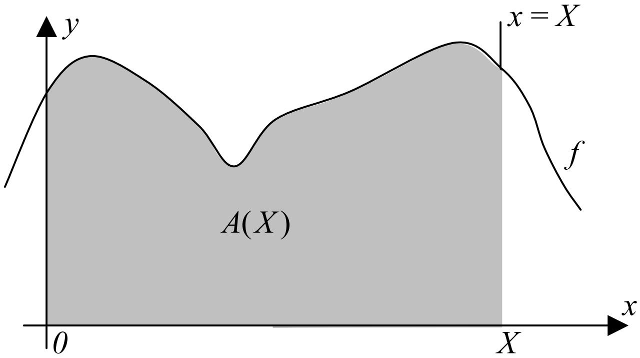
Soit f une fonction réelle.

Notons $A(X)$ la fonction qui au nombre positif X, fait correspondre **l'aire** du domaine limité par la courbe $f(x)$, l'axe Ox, ainsi que par les droites d'équation $x = 0$ et $x = X$.

L'aire $A(X)$ peut être calculée comme **limite de somme de nombreuses aires rectangulaires**.

$$\boxed{Aire = A(X) \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot\Delta x}, \quad \text{où } \Delta x = \frac{X}{N},\ x_i \text{ appartient au } i^{\text{ème}} \text{ intervalle.}$$

L'approximation est d'autant meilleure que N est grand.



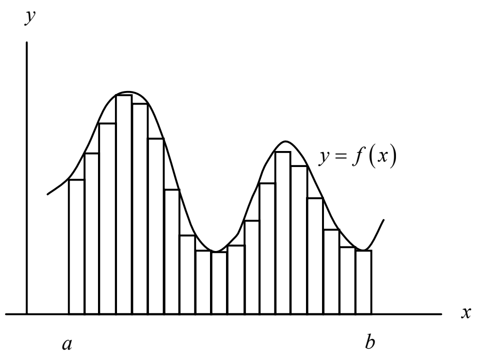
IV. Intégrale définie

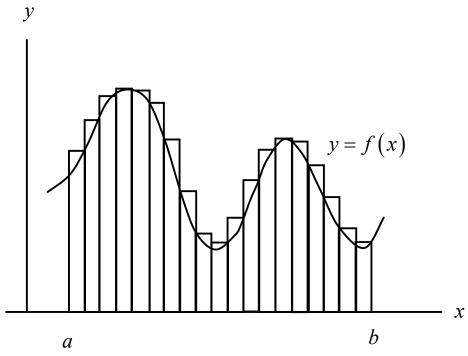
IV.1. Somme minorante et somme majorante.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.

Une valeur approchée de l'aire sous la courbe f peut être obtenue par un découpage en N bandes rectangulaires verticales. En particulier on peut réaliser un encadrement de cette aire à l'aide d'une **somme minorante** A_m et d'une **somme majorante** A_M pour un découpage donné.

L'aire de chaque rectangle est de la forme : $\Delta x_i \cdot f(x_i)$; Δx_i = largeur du $i^{\text{ème}}$ rectangle.





Somme minorante
A_{m} = la somme des aires des rectangles minorants.

Somme majorante
A_{M} = la somme des aires des rectangles majorants.

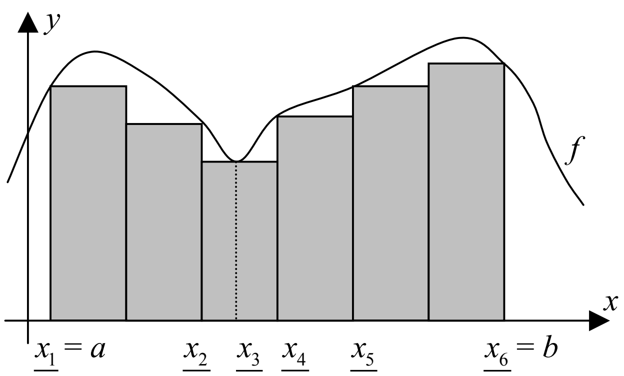
$f(\underline{x_i})$ = la plus petite valeur de $f(x)$ sur le $i^{\text{ème}}$ intervalle.
= la hauteur du $i^{\text{ème}}$ rectangle minorant.

$f(\overline{x_i})$ = la plus grande valeur de $f(x)$ sur le $i^{\text{ème}}$ intervalle.
= la hauteur du $i^{\text{ème}}$ rectangle majorant.

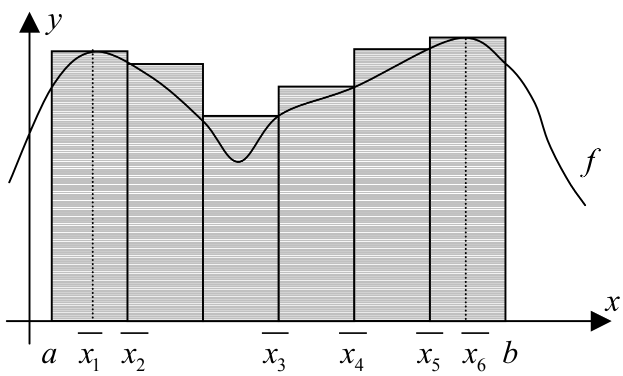
On dit aussi **aire minorante** et **aire majorante** au lieu de *somme minorante* et *somme majorante*.

Voici un exemple de découpage en 6 rectangles.

Ici, la largeur de tous les rectangles est la même, mais ce n'est pas une obligation.



Aire ou Somme minorante : A_{m}



Aire ou Somme majorante : A_{M}

$$A_{\mathrm{m}} = \sum_{i=1}^{6} f(\underline{x_i})\cdot\Delta x_i = f(\underline{x_1})\cdot\Delta x_1 + f(\underline{x_2})\cdot\Delta x_2 + f(\underline{x_3})\cdot\Delta x_3 + f(\underline{x_4})\cdot\Delta x_4 + f(\underline{x_5})\cdot\Delta x_5 + f(\underline{x_6})\cdot\Delta x_6$$

$$A_{\mathrm{M}} = \sum_{i=1}^{6} f(\overline{x_i})\cdot\Delta x_i = f(\overline{x_1})\cdot\Delta x_1 + f(\overline{x_2})\cdot\Delta x_2 + f(\overline{x_3})\cdot\Delta x_3 + f(\overline{x_4})\cdot\Delta x_4 + f(\overline{x_5})\cdot\Delta x_5 + f(\overline{x_6})\cdot\Delta x_6$$

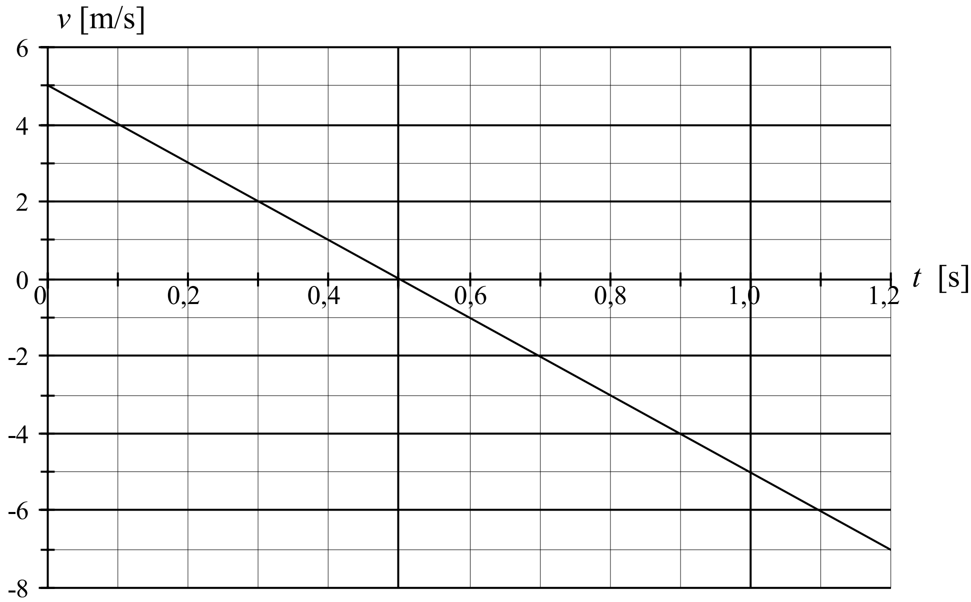
Quel que soit le découpage choisi, on a toujours : $A_m \leq Aire\ \ sous\ \ la\ \ courbe\ \leq A_M$.

IV.2. Que se passe-t-il si la fonction est négative ?

Activité IV.2.1. La chute libre.

Paul lance verticalement une pierre en l'air.
Au temps t = 0 [s], la pierre se trouve à 1,5 mètres du sol et sa vitesse initiale est de 5 [m / s].
La gravitation agit sur la pierre et lui imprime une décélération $a = -10\,[\text{m / s}^2]$:
la vitesse décroît de 10 [m / s] par seconde, c'est-à-dire $v(t) = v_0 + a \cdot t = 5 - 10 \cdot t$.
Pour $t = 0,5$ [s] , la vitesse est nulle et après 0,5 [s], la vitesse devient négative :
ceci signifie que la trajectoire change de sens et que la pierre retombe.

Voici le graphique de la vitesse v de la pierre en fonction du temps t.



Notons $h(t)$ la hauteur de la pierre à l'instant t.

<u>Question</u> :
A quelle hauteur se trouve la pierre après 1,2 secondes ?

Pour vous aider à répondre à cette question, complétez le tableau ci-dessous.
Vous pouvez utiliser des considérations géométriques (aires de triangles, de trapèzes …) :

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
$h(t)$													

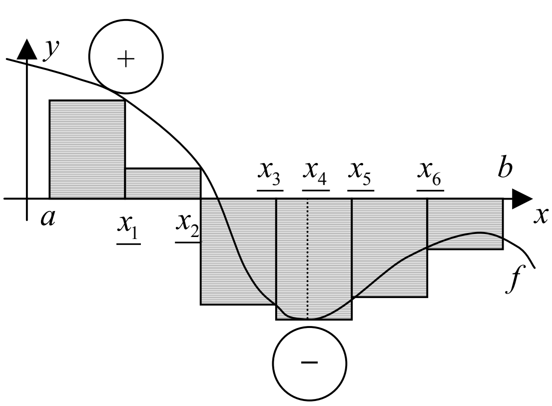
<u>Question</u> :
Est-il correct de dire que la hauteur $h(t)$ est la somme de 1,5 [m] et de l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses ?

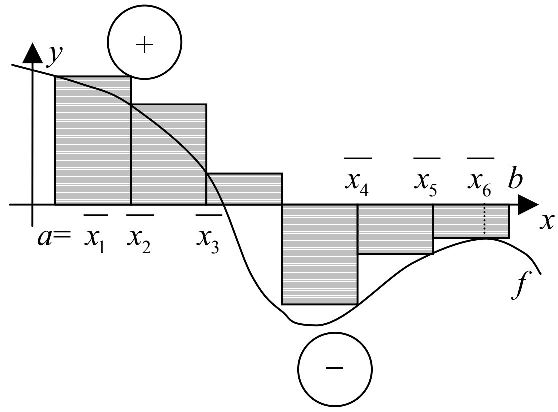
Généralisation

Lorsque la fonction possède des images négatives, l'activité précédente montre que certains termes des sommes sont négatifs. Ils ne représentent plus des **aires géométriques**.
On parle alors d'**aire algébrique**, étant entendu que les aires algébriques sous l'axe des abscisses sont négatives tandis que les aires algébriques au-dessus de l'axe des abscisses sont positives.

Pour en revenir aux sommes minorante et majorante habituelles, les deux graphiques ci-dessous illustrent le fait que :

$\boxed{\text{Somme minorante} \leq \textbf{aire algébrique}\ \textit{entre la courbe et l'axe des abscisses} \leq \text{somme majorante}}$

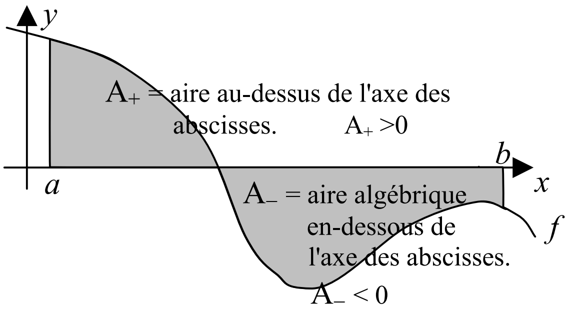




Somme minorante : $A_{\mathrm{m}} = \sum_{i=1}^{6} f(\underline{x_i}) \cdot \Delta x_i$ = Aire minorante

Somme majorante : $A_{\mathrm{M}} = \sum_{i=1}^{6} f(\overline{x_i}) \cdot \Delta x_i$ = Aire majorante

$A_m \leq$ **aire algébrique ombrée** $\leq A_M$.



L'aire algébrique $= A_+ + A_- = A_+ - |A_-|$

L'aire géométrique $= A_+ + |A_-|$

$|A_-|$ représente l'aire géométrique sous l'axe des abscisses

Remarques :

1) Une <u>aire géométrique</u> est toujours positive ou à la limite nulle.
2) Une <u>aire algébrique</u> peut être positive, nulle ou négative.
3) Une <u>aire géométrique</u> est égale à la somme de l'aire algébrique au-dessus de l'axe des abscisses et de la *valeur absolue* de l'aire algébrique au-dessous de l'axe des abscisses.
4) Une <u>aire algébrique</u> est égale à la différence de l'aire géométrique au-dessus de l'axe des abscisses et de l'aire géométrique en dessous de l'axe des abscisses.

IV.3. Définition de l'intégrale définie.

Supposons que le nombre N de bandes tend vers l'infini et donc que la largeur de chaque bande tend vers 0.

Si la **somme minorante** $A_m = \sum_{i=1}^{N} f(\underline{x_i}) \cdot \Delta x_i$ et la **somme majorante** $A_M = \sum_{i=1}^{N} f(\overline{x_i}) \cdot \Delta x_i$ ont toutes deux une limite lorsque le nombre N de bandes tend vers l'infini, alors l'aire algébrique A entre la courbe et l'axe des abscisses est comprise entre ces deux limites.

On a : $$\underbrace{\lim_{N\to\infty} A_m}_{L_m} \leq A \leq \underbrace{\lim_{N\to\infty} A_M}_{L_M}.$$

Si en outre ces deux limites sont égales, leur valeur est celle de l'aire algébrique A.

$$\boxed{\text{Si } L_m = L_M, \text{ alors } A = L_m = L_M.}$$

Nous avons rencontré cette situation à plusieurs reprises au chapitre III.
Il s'ensuit la définition suivante :

Définition

Soit un intervalle $[a;b]$, divisé en N parties, soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a;b]$, soit A_m, la somme minorante et soit A_M, la somme majorante.

On appelle **intégrale définie** de f, depuis a jusqu'à b, notée $\int_a^b f(x)\,dx$, le nombre A tel que

$A = \lim_{N\to\infty} A_m = \lim_{N\to\infty} A_M$ pourvu que ces deux limites existent et soient égales.

Intuitivement, il est évident que lorsque $b = a$, on étend la définition ainsi : $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Remarque

Pour calculer la somme minorante et la somme majorante, il n'est pas nécessaire que la largeur des intervalles du découpage soit la même partout.
Par contre la largeur de tous les intervalles doit tendre vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

Vocabulaire

- Si ces deux limites L_m et L_M existent et sont égales, alors on dit que f est **intégrable** sur $[a;b]$ et que l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.
- Le fait de chercher cette limite s'appelle "**calculer l'intégrale définie**".
- Les nombres a et b sont appelés les **bornes d'intégration**, a est la b**orne inférieure,** b est la **borne supérieure**.
- D'autres lettres que x peuvent être employées dans la notation de l'intégrale définie.

  Ainsi si f est intégrable sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(s)\,ds$ = un nombre réel.

  C'est la raison pour laquelle la variable x de la définition est dite **variable muette**. Elle n'apparaît pas dans le résultat.

A propos de la notation

Le symbole $\int$ en forme de « S » allongé, abréviation de *Summa Integralis,* fut introduit par Leibniz (1644-1716). Il calculait l'aire sous les courbes en faisant la **S**omme des aires de rectangles étroits, de largeur infinitésimale dx, et de hauteur infiniment proche de $y = f(x)$.

Ainsi $\int_a^b f(x)\,dx$ signifie :

Somme des aires d'une infinité de rectangles de largeur dx et de hauteur $f(x)$.

Important

• Une *intégrale définie*, notée $\int_a^b f(x)\,dx$ est un **NOMBRE** réel, pas une fonction !

Remarque

Toute fonction n'est pas intégrable sur un intervalle donné. Mais on peut montrer que si f est une fonction continue sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ existe toujours. Il s'ensuit le

Théorème : continue $\Rightarrow$ intégrable de Cauchy (1823)

Si f est une fonction **continue** sur $[a;b]$, alors f est **intégrable** sur $[a;b]$.

Nous ne démontrerons pas ce théorème.

Remarque

La continuité sur un intervalle fermé est une condition suffisante d'intégrabilité, mais non nécessaire. Lorsqu'une fonction n'est pas continue, on peut parfois calculer une intégrale définie. C'est le cas en particulier des fonctions en escalier.

Définition :

Une fonction f est **continue par morceaux** sur $[a\,;b]$ si et seulement si on peut subdiviser l'intervalle $[a\,;b]$ en plusieurs intervalles : $[a\,;c_1]$; $[c_1\,;c_2]$; $[c_2\,;c_3]$; ... ; $[c_{n-1}\,;c_n]$; $[c_n\,;b]$ de sorte que f soit continue sur chacun des ces intervalles, sauf éventuellement aux bornes de ces intervalles où des sauts sont autorisés.

Théorème qui généralise le précédent.

Si f est une fonction **continue par morceaux** sur $[a;b]$, alors f est **intégrable** sur $[a;b]$.

V. Propriétés de l'intégrale définie

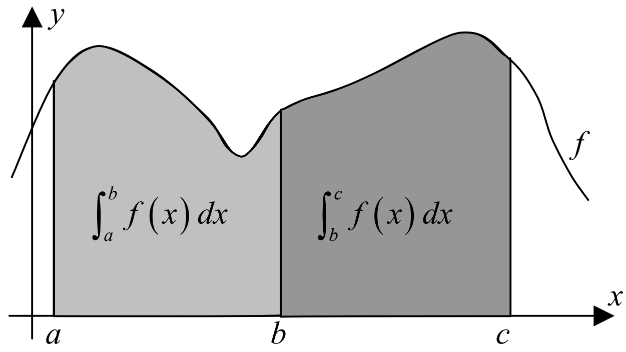
$$\textbf{(1)} \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

C'est une extension naturelle de la définition de l'intégrale définie.

$$\textbf{(2)} \qquad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Cette propriété est illustrée par le dessin ci-contre.

L'aire gris claire plus l'aire gris foncée égale l'aire grise (claire + foncée).



$$\textbf{(3)} \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

C'est une extension de la définition de l'intégrale définie, qui découle des propriétés 1 et 2 :

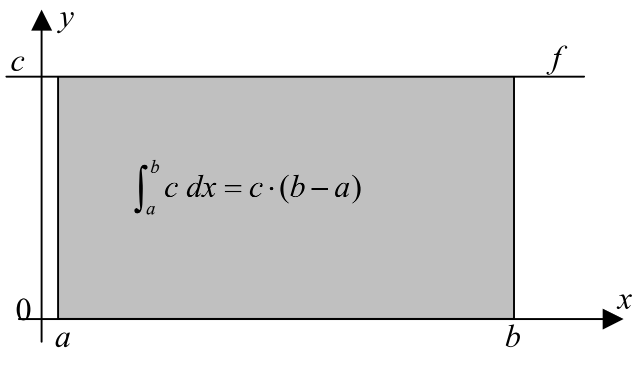
Utilisons la propriété (2), avec $c = a$: $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$ Propriété 1

Si f est constante égale à c, alors

$$\textbf{(4)} \qquad \int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)$$

$\int_a^b c\,dx$ = aire grise = base · hauteur = $(b-a)\cdot c$

Si $c < 0$ et/ou $b < a$, l'égalité reste correcte !



(5) $\displaystyle\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

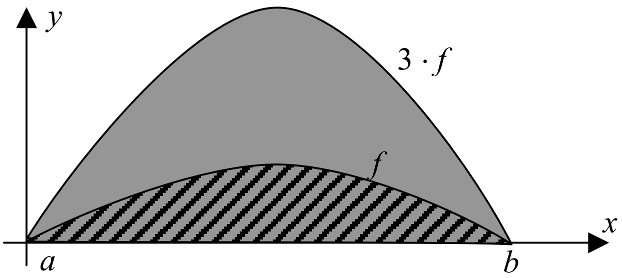
en effet :

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \lambda \cdot f(x_i)\cdot \Delta x_i = \lambda \cdot \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot \Delta x_i = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Δx_i = largeur du $i^{\text{ème}}$ rectangle.

$f(x_i)$ = la hauteur du $i^{\text{ème}}$ rectangle

Illustration :



L'aire grise = 3 · l'aire hachurée.

$$\int_a^b 3\cdot f(x)\,dx = 3 \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

(6) $\displaystyle\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

en effet :

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \big(f(x_i)+g(x_i)\big)\cdot \Delta x_i$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot \Delta x_i + g(x_i)\cdot \Delta x_i$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^{N} g(x_i)\cdot \Delta x_i\right]$$

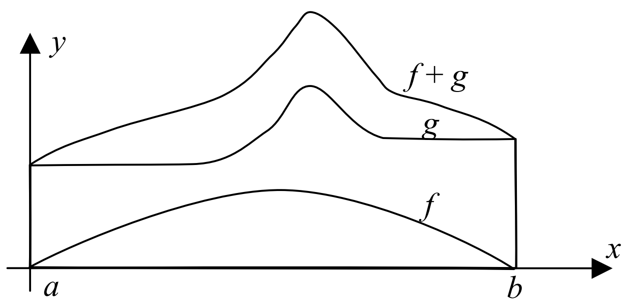
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot \Delta x_i + \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} g(x_i)\cdot \Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Δx_i = largeur du $i^{\text{ème}}$ rectangle.

$f(x_i)$ = la hauteur du $i^{\text{ème}}$ rectangle

Illustration :



L'aire sous la courbe f +
l'aire sous la courbe g =
l'aire sous la courbe $f + g$.

(7)	Si $a < b$ et $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

en effet :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot\Delta x_i$$

Δx_i = largeur du $i^{\text{ème}}$ rectangle. Ces nombres sont positifs, car $a < b$.

$f(x_i)$ = la hauteur du $i^{\text{ème}}$ rectangle. Ces nombres sont positifs ou nuls, car $f(x) \geq 0$

Donc la somme dans la limite est positive ou nulle.

Donc l'intégrale est positive ou nulle.

(8)	Si $a < b$ et $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

en effet :

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \overset{(6)}{=} \int_a^b \underbrace{\left(g(x) - f(x)\right)}_{\geq 0} dx \underset{(7)}{\geq} 0$$

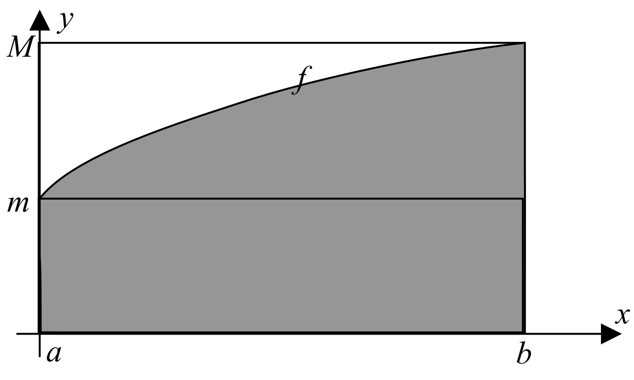
(9)	Si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $m\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\cdot(b-a)$

en effet :

$$m \leq f(x) \leq M \quad \Rightarrow \quad \int_a^b m\cdot dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\cdot dx$$

$$\Rightarrow \quad m\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\cdot(b-a)$$

Illustration :



$(b-a)\cdot m$

= L'aire du rectangle de base $b-a$ et de hauteur m

≤ l'aire grise sous la courbe f

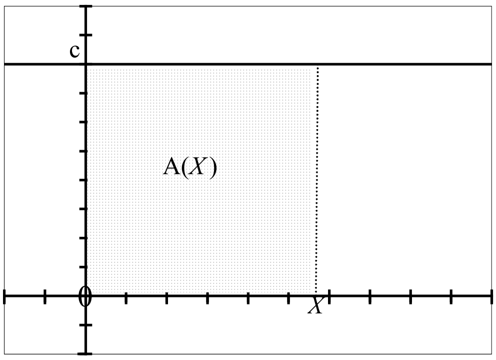
$= \int_a^b f(x)\,dx$

≤ L'aire du rectangle de base $b-a$ et de hauteur M

$= (b-a)\cdot M$.

VI. Lien entre l'aire sous une courbe et dérivée de fonctions

Calculez l'aire *A(X)* entre l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses, la verticale $x = X$ et la courbe de la fonction $f(x) = c$, où c est une constante.

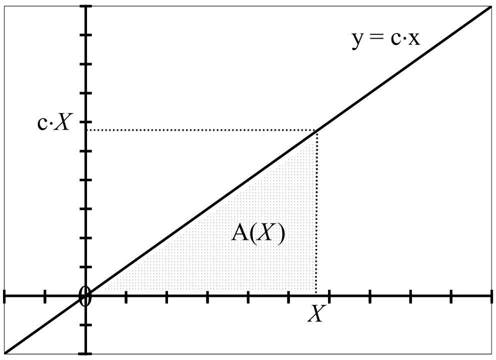


$A(X) =$

Sa dérivée vaut : $A'(X) =$

Constatation :

Calculez l'aire *A(X)* entre l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses, la verticale $x = X$ et la courbe de la fonction $f(x) = c \cdot x$, où c est une constante.

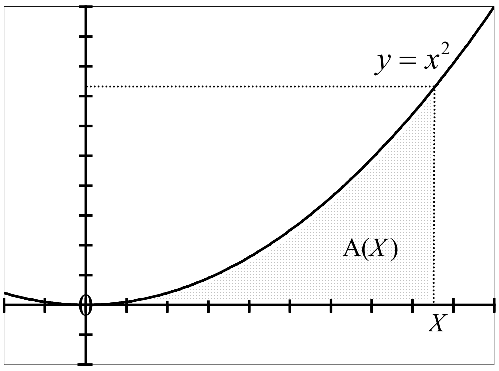


$A(X) =$

Sa dérivée vaut : $A'(X) =$

Constatation :

Calculez l'aire *A(X)* entre l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses, la verticale $x = X$ et la courbe de la fonction $f(x) = x^2$.



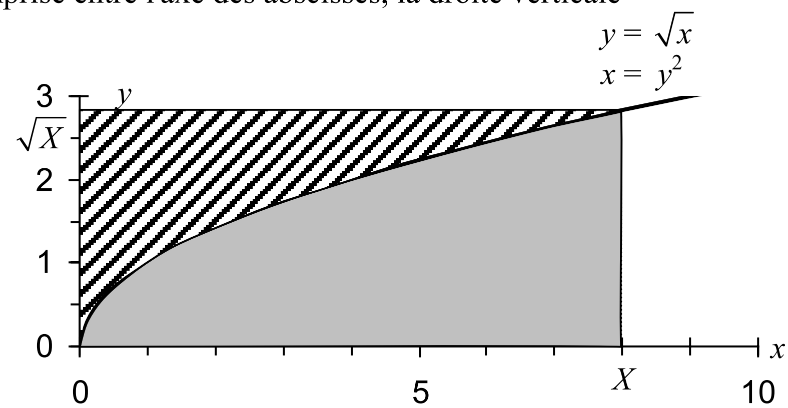
$A(X) =$

Sa dérivée vaut : $A'(X) =$

Constatation :

Aire sous la courbe de la fonction "racine carrée".

Le but de ce qui suit est de calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la droite verticale d'équation $x = X$ et la courbe de $f(x) = \sqrt{x}$.
Notons $A(X)$ cette aire.



a) À l'aide d'un résultat vu précédemment, déterminez l'aire hachurée.

b) Déterminez l'aire grise, qui représente l'aire cherchée.

$A(X) =$

Sa dérivée vaut : $A'(X) =$

Constatation :

VII. Primitives d'une fonction continue

Le chapitre précédent, suggère le lien entre la dérivée de la fonction aire $A(X)$ et la fonction $f(X)$.

$$\boxed{A'(X) = f(X)}$$

Pour déterminer l'aire $A(X)$ connaissant la fonction $f(X)$, on peut faire l'opération inverse de la dérivation. Cela s'appelle chercher une **primitive** de la fonction $f(X)$.

Cela sera confirmé par le théorème fondamental du calcul intégral, que nous verrons au chapitre IX.
Il fournit une manière de calculer des intégrales définies à l'aide de primitives de fonctions continues.
Il affirme que :

Si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

C'est la principale motivation de l'étude des primitives.

VII.1 Définition

Nous savons comment trouver, lorsque c'est possible, la fonction dérivée d'une fonction f, définie sur un intervalle I de IR. Ce processus est appelé "**dérivation** d'une fonction".
Le théorème fondamental du calcul intégral montre l'intérêt du problème inverse qui consiste à trouver une nouvelle fonction F dont f serait la dérivée. Ce processus s'appelle "**intégration**" ou "**anti-dérivation**".
La définition suivante, ne fait qu'attribuer à F un nom particulier.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR.
On appelle **primitive** de f sur I, toute fonction F dérivable sur I et telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I.

Exemple :

$F(x) = \frac{1}{2}x^2$ est une primitive de $f(x) = x$, parce que $F'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x = f(x)$.

Ce n'est pas la seule, car $\frac{1}{2}x^2 + 3$; $\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}$; $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}$ etc. sont aussi des primitives de f.

D'une manière générale, $\frac{1}{2}x^2 + C$, quel que soit le nombre réel C, est une primitive de f parce que $\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)' = x + 0 = x$.

Remarques :

1) Certaines fonctions comme $x \mapsto e^{-x^2}$ sont continues, donc admettent une primitive mais celle-ci n'est pas exprimable avec les opérations usuelles. Cette fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est importante dans la théorie des probabilités.
2) Il existe des fonctions non continues qui admettent des primitives.

VII.2 Une utilisation de primitives

1) Soit un objet tombant verticalement. Sa position en fonction du temps est de :
$X(t) = 70 \cdot t \cdot \left(1 - e^{-t/10}\right)$. La position est en mètres et le temps en secondes.

Quelle est le lien entre la vitesse de l'objet et sa position en fonction du temps ?
Déterminez la vitesse de l'objet en fonction du temps.

2) Soit un objet tombant verticalement. Sa vitesse en fonction du temps est de :
$V(t) = 10 \cdot t$. La vitesse est en mètres par secondes et le temps en secondes.

Quelle est le lien entre la position de l'objet et sa vitesse en fonction du temps ?
Déterminez la position de l'objet en fonction du temps.
Au départ (t = 0 [s]), l'objet se trouve en X(0) = 0 [m].

3) Soit une voiture accélérant sur une route. Sa vitesse en fonction du temps est de :
$V(t) = \sqrt{t}$. La vitesse est en mètres par secondes et le temps en secondes.

Quelle est le lien entre la position de l'objet et sa vitesse en fonction du temps ?
Déterminez la position de l'objet en fonction du temps.
Au départ (t = 0 [s]), l'objet se trouve en X(0) = 5 [m].

VII.3 Ensemble de primitives

Théorème
Soit F une primitive de f sur un intervalle $[a\,;b]$. Alors:
1) Pour tout réel C, la fonction $G : x \to F(x) + C$ est aussi une primitive de f sur $[a\,;b]$.
2) Toute primitive de f sur $[a\,;b]$ est de ce type.

On dit que deux primitives d'une même fonction ***diffèrent d'une constante***.

démonstration :

1) Il suffit de montrer que la dérivée de $G(x)$ est f, c'est immédiat:

$$G'(x) = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x)$$

2) Soit H une autre primitive de f.
Le corollaire du théorème des accroissements finis, appelé "théorème de la fonction constante", s'applique ici à la fonction $H - F$.
Les hypothèses du corollaire sont satisfaites :
i) et ii) La fonction $H - F$ est dérivable sur $[a\,;b]$, donc continue sur $[a\,;b]$ et
iii) $(H - F)' = H' - F' = f - f = 0$.
Sa conclusion dit justement que $(H - F)(x) = C$, $\forall x \in [a\,;b]$, où C est une constante.
Or $(H - F)(x) = H(x) - F(x)$, donc $H(x) - F(x) = C$. CQFD

VII.4 Terminologie et notation

- La notation suivante : $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ désigne la **famille des primitives** de f.
- Ceci se lit : - "intégrale de f de x dx ", ou
  - "intégrale indéfinie de f par rapport à x".
- Le symbole dx permet de reconnaître la variable d'intégration.
  Par exemple, vérifiez que : $\int \alpha \cdot x^2\,dx \neq \int \alpha \cdot x^2\,d\alpha$.
- Le symbole $\int$ est le **symbole d'intégration.**
- L'expression $\int f(x)\,dx$ s'appelle l'**intégrale indéfinie** de f. C'est une famille de fonctions.
- f est la **fonction à intégrer.**
- C est la **constante d'intégration**.

Résoudre le problème noté $\int f(x)\,dx$, c'est-à-dire chercher les fonctions $F(x) + C$, est appelé **recherche des primitives de *f*** ou **intégration indéfinie** ou **intégration de** $f(x)$ ou **calcul de l'intégrale**. L'adjectif "*indéfinie*" se rapporte au fait que $\int f(x)\,dx$ représente une famille de primitives et non pas une primitive bien précise.

VIII. Propriétés des primitives

VIII.1 Quelques primitives

Complétez le tableau suivant :

fonction $f(x)$	***primitive*** $F(x)$	
0		
a		
x		
x^n		$n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{1}{x}$		
$\sqrt{x}$		
$\frac{1}{\sqrt{x}}$		
$\cos(x)$		
$\sin(x)$		
e^x		
	$x \cdot (\ln(x) - 1)$	
	$\tan(x) - x$	
	$\frac{1}{2} \cdot (x - \sin(x) \cdot \cos(x))$	
	$-\ln(\cos(x))$	

VIII.2 Propriétés des primitives

Pour établir chacune des propriétés ci-dessous, il suffit de constater que les égalités sont correctes après dérivation des deux membres des égalités et d'utiliser le théorème de la fonction constante, qui dit que si les dérivées de deux fonctions sont égales, alors les fonctions diffèrent d'une constante.

f et g sont deux fonctions continues, λ est un nombre réel, C est une constante.

1) $\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x)$ par définition

2) $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$ f est supposée dérivable.

3) $\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

4) $\int \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

5) $\int \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int f(x)\,dx$

6) $\int \lambda \cdot g\big(f(x)\big) \cdot f'(x)\,dx = \lambda \cdot G(f(x)) + C$ où G est une primitive de g.

7) $\int \lambda \cdot f^n(x) \cdot f'(x)\,dx = \lambda \cdot \dfrac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$ où $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. c'est un cas particulier de 6), avec $g(x) = x^n$.

8) $\int \lambda \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \lambda \cdot \ln\left|f(x)\right| + C$ c'est un cas particulier de 6), avec $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

9) $\int \lambda \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \lambda \cdot e^{f(x)} + C$ c'est un cas particulier de 6), avec $g(x) = e^x$.

Attention, en général : $\int \big(f(x) \cdot g(x)\big)\,dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$!!!

IX. Le théorème fondamental du calcul intégral

Le théorème fondamental du calcul intégral indique comment calculer une intégrale définie à l'aide d'une primitive de la fonction à intégrer.

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a;b]$.

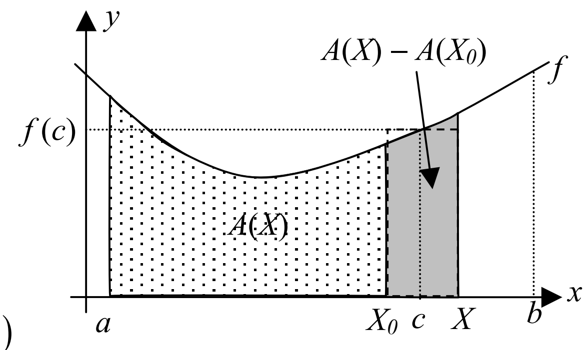
Partie I. Si A est la fonction définie par $A(X)=\int_a^X f(t)\,dt$ pour tout X dans $[a;b]$,

alors A est la primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

Partie II. Si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors $\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)}$.

Démonstration dans le cas d'une fonction positive

Partie I : Soit la fonction $A(X)=\int_a^X f(t)\,dt$.



Comme $X>a$, on peut se représenter $A(X)$ comme l'aire sous la courbe de f depuis $t=a$ jusqu'à $t=X$.
Pour démontrer que A est une primitive de f, on va prouver que $A'=f$.

Considérons X et X_0, tels que : $b \geq X > X_0 \geq a$.

Selon la définition de la dérivée : $A'(X_0)=\lim\limits_{X\to X_0}\dfrac{A(X)-A(X_0)}{X-X_0}$

Définissons $f_m(X)$ le minimum et $f_M(X)$ le maximum de f sur $[X_0\,;X]$.

On a : $f_m(X) \leq \dfrac{A(X)-A(X_0)}{X-X_0} \leq f_M(X)$ car $f_m(X)\cdot(X-X_0)$ représente l'aire minorante et

$f_M(X)\cdot(X-X_0)$ représente l'aire majorante.

Puisque f est une <u>fonction continue</u>, $\lim\limits_{X\to X_0} f_m(X)=f(X_0)$ et $\lim\limits_{X\to X_0} f_M(X)=f(X_0)$.

En conséquence (du théorème des deux gendarmes), $\lim\limits_{X\to X_0}\dfrac{A(X)-A(X_0)}{X-X_0}=f(X_0)$.

Nous venons de montrer que $A'(X_0)=f(X_0)$ pour tout $X_0 \in [a;b]$, donc la dérivée de la fonction aire A est la fonction f.

Ainsi A est une primitive de f sur $[a\,;b]$.

Comme $A(a)=0$, A est bien la primitive de f qui s'annule en a. CQFD $_{\text{partie I}}$

Remarquons que les cas où f est négative et/ou $X<X_0$ se démontrent de manière similaire.

Partie II

Soit F une autre primitive de f.

Notre but est de montrer que : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Au point VII.2, nous avons vu que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
Donc $A(X) = F(X) + C$ pour une constante C.

Rappelons que : $A(X) = \int_a^X f(t)\,dt$.

Nous avons vu que $A(a) = 0$, donc nous pouvons écrire :

$\int_a^b f(t)\,dt = A(b) - A(a) = \big(F(b) + C\big) - \big(F(a) + C\big) = F(b) - F(a)$. CQFD $_{\text{partie II}}$

En résumé

1) Si une fonction est continue, elle est intégrable.
2) On peut toujours calculer, ou du moins approcher, son intégrale à l'aide des partages et de la définition des sommes minorante et majorante.
3) Néanmoins, lorsque l'on peut trouver une primitive de f, on évite ce procédé long et difficile grâce au théorème fondamental.
4) Malheureusement, certaines fonctions continues ont des primitives très difficiles à trouver, voire non exprimables à l'aide des opérations usuelles, comme par exemple $x \mapsto e^{-x^2}$.

Notation :

Lorsqu'on calcule une intégrale, il est pratique d'utiliser la notation suivante :

$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b}$; $F(x)\Big|_a^b$ signifie $F(b) - F(a)$.

Exemple : $\int_5^9 2 \cdot x\,dx = x^2\Big|_5^9 = 9^2 - 5^2 = 56$.

X. Le théorème de la moyenne

Théorème de Weierstrass : (1861, appelé "Hauptlehrsatz" dans les cours de Weierstrass)

Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **continue sur [*a* ; *b*]**,

alors

a) il existe deux nombre $x_{\min}$ et $x_{\max}$ dans $[a\ ;\ b]$ tels que $f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$ pour tout nombre $x \in [a\ ;\ b]$;

b) pour tout nombre Y tel que $f(x_{\min}) \leq Y \leq f(x_{\max})$, il existe $c \in [a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = Y$.

Illustrez le théorème par un exemple.

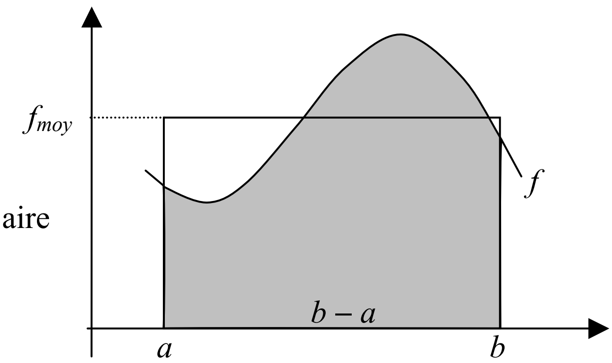
Ce théorème semble évident, mais il est beaucoup plus difficile à démontrer qu'il n'y parait. Pour le faire, il faut avoir défini très précisément ce que sont les nombres réels.
Ce n'est qu'en 1872, que Cantor, Heine, Méray et Dedekind ont indépendamment construit rigoureusement l'ensemble des nombres réels. Si quatre mathématiciens ont effectué ce travail indépendamment la même année, cela montre l'importance qu'ils accordaient à ce sujet.
Nous accepterons ce théorème sans démonstration, comme les mathématiciens d'avant 1872 l'ont fait.

Définition :

Si f est une fonction intégrable sur $\left[\,a\,;b\,\right]$, la **valeur moyenne** de f sur $\left[\,a\,;b\,\right]$ est définie par :

$$\boxed{f_{moy} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx}$$

Interprétation géométrique de f_{moy} :



$$f_{moy} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad f_{moy} \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

f_{moy} est donc la hauteur du rectangle de largeur $b-a$ dont l'aire égale l'aire sous la courbe f, entre $x = a$ et $x = b$.

Interprétation arithmétique de f_{moy} :

Par définition nous avons $f_{moy} = \dfrac{1}{b-a} \cdot \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \dfrac{1}{b-a} \cdot \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \cdot \Delta x_i$

Dans le cas de N intervalles de même largeurs on a : $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{N}$

Donc $f_{moy} = \dfrac{1}{\cancel{b-a}} \cdot \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{\cancel{b-a}}{N} \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{N} f(x_i) = \lim_{N\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i)}{N} = \lim_{N\to\infty} \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_N)}{N}$

$\dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_N)}{N}$ représente la moyenne arithmétique de N valeurs de $f(x)$, d'où l'expression *« valeur moyenne »*.

Théorème de la valeur moyenne :

Soit $f : [\,a\,;b\,] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe au moins un élément c de $[\,a\,;b\,]$ dont l'image par f est égale à la valeur moyenne de f sur $[\,a\,;b\,]$. Autrement dit :

$$\boxed{\exists\ c \in [\,a\,;b\,] \text{ tel que } f(c) = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx}$$

démonstration :

Grâce à la continuité de f nous savons que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe. On sait aussi, par le point a) du théorème de Weierstrass, qu'il existe deux réels x_{min} et x_{max} tels que :

$$f(x_{\min}) \le f(x) \le f(x_{\max}) \ , \quad \text{et ce pour tout } x \text{ dans } [\,a\,;b\,]$$

D'où :

$$\int_a^b f(x_{\min})\,dx \ \le\ \int_a^b f(x)\,dx \ \le\ \int_a^b f(x_{\max})\,dx \qquad \text{propriété 9}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x_{\min})\cdot(b-a) \ \le\ \int_a^b f(x)\,dx \ \le\ f(x_{\max})\cdot(b-a) \qquad \text{propriété 4 (intégrale d'une constante)}$$

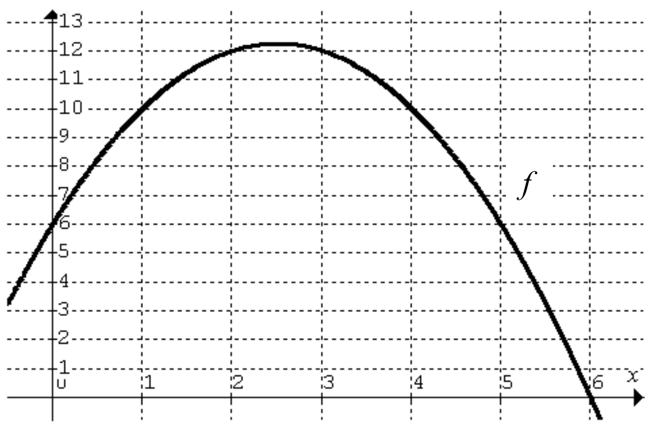
$$\Leftrightarrow \quad f(x_{\min}) \ \le\ \underbrace{\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx}_{=\text{ la valeur moyenne de } f \text{ sur } [a\ ;\ b]} \ \le\ f(x_{\max}) \qquad \text{division par } (b-a)$$

Puisque la valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b]$ est comprise entre $f(x_{min})$ et $f(x_{max})$, le point b) du théorème de Weierstrass nous assure de l'existence d'un nombre c de $[\,a\,;b\,]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{CQFD}$$

Remarque :
Dans le langage de tous les jours, ce théorème semble une évidence. Il dit, par exemple, que si un automobiliste, durant un trajet, roule à une certaine vitesse moyenne, alors, pendant ce trajet, il doit effectivement rouler exactement à cette vitesse moyenne, au moins une fois !

Exercice X.1
Quelle est la valeur moyenne de la fonction $f(x) = 6 + 5x - x^2$ sur $[1\ ;\ 5]$?



2) Déterminez les préimages c de f dans l'intervalle $[1\ ;\ 5]$, telles que $f(c) = f_{\text{moy}}$

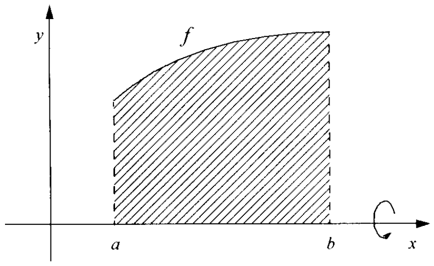
XI. Volume d'un corps de révolution

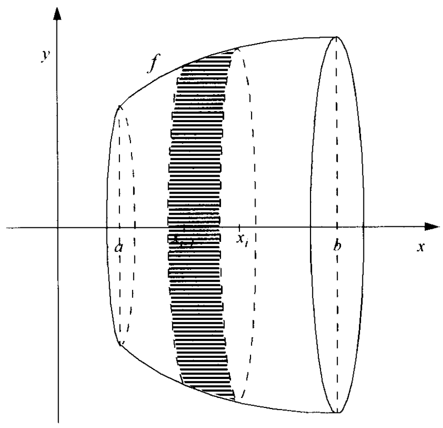
Nous avons vu que l'intégration permet de déterminer l'aire de certaines surfaces. Elle permet également de déterminer le volume de certains corps. Pour simplifier nous nous limiterons au volume d'un corps engendré par la rotation de la représentation graphique d'une fonction continue sur un intervalle autour de l'axe des x. Comment calculer le volume ?

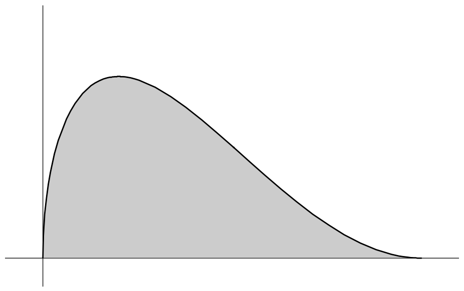
Un corps ainsi formé s'appelle un **corps de révolution**.

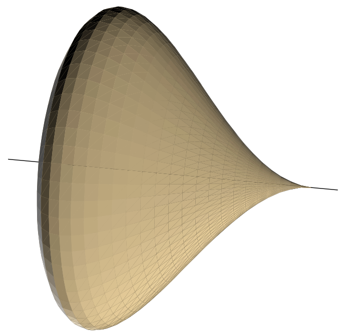
Fonction continue sur un intervalle

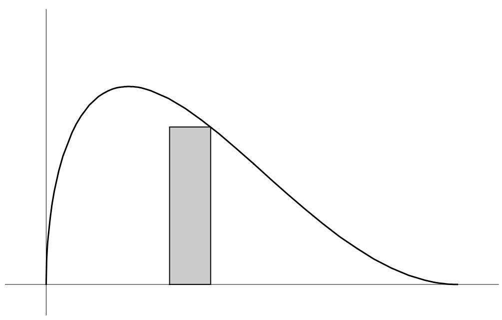
Volume de révolution autour de l'axe des x

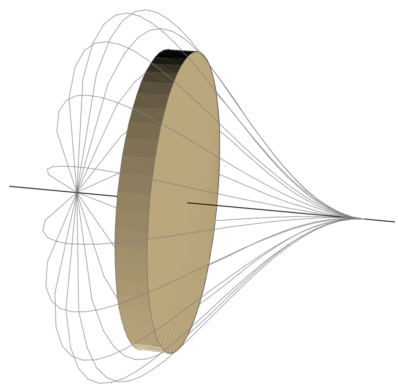


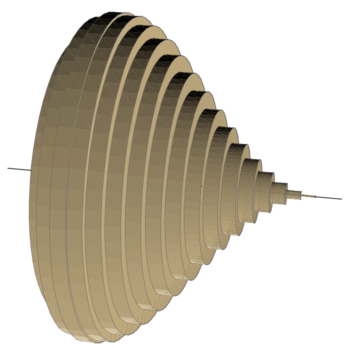










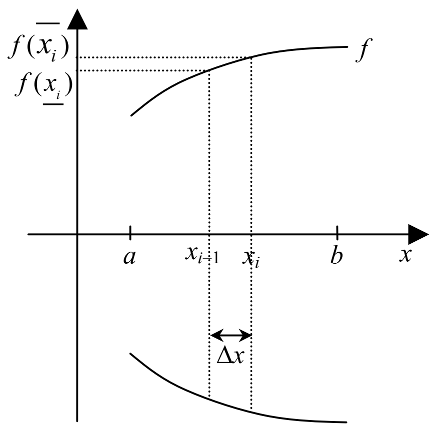


Théorème :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.
Le volume V du solide engendré par la révolution de D autour de Ox est déterminé par la formule :

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx$$

Démonstration :



Dans cet exemple, $\underline{x_i} = x_{i-1}$ et $\overline{x_i} = x_i$.

On partage l'intervalle $[a\ ;\ b]$ en N intervalles $[x_{i-1}\ ;\ x_i]$ de même largeur Δx dans le but de découper le solide en N « tranches ».
Notons V_i le volume de la $i^{\text{ème}}$ tranche.
Soit $f(\underline{x_i})$ le minimum et $f(\overline{x_i})$ le maximum de f sur $[x_{i-1}\ ;\ x_i]$.

Le volume V_i d'une tranche est compris entre celui d'un cylindre de rayon $f(\underline{x_i})$ et d'épaisseur Δx et celui d'un cylindre de rayon $f(\overline{x_i})$ et d'épaisseur Δx :

$$\pi \cdot \left(f(\underline{x_i})\right)^2 \cdot \Delta x \le V_i \le \pi \cdot \left(f(\overline{x_i})\right)^2 \cdot \Delta x .$$

Donc : $\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \pi \cdot \left(f(\underline{x_i})\right)^2 \cdot \Delta x}_{\text{somme minorante}} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{N} V_i}_{\text{volume du corps de révolution}} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \pi \cdot \left(f(\overline{x_i})\right)^2 \cdot \Delta x}_{\text{somme majorante}}$

Le membre de gauche représente une somme minorante associée à la fonction $\pi \cdot f^2$.

Celui de droite représente une somme majorante.

Comme f est continue, $\pi \cdot f^2$ est aussi continue, donc intégrable.

En conséquence, lorsque N tend vers l'infini, les sommes minorante et majorante convergent vers $\pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx$.

Cette intégrale représente le volume du corps de révolution, puisque celui-ci est compris entre les sommes minorantes et majorantes.

CQFD.

Index