I. Introduction

Les différents modèles mathématiques construits pour étudier les phénomènes où intervient le hasard sont basés sur la notion de probabilité. Celle-ci exige des *dénombrements d'ensembles finis*. C'est l'objet d'étude de *l'analyse combinatoire*.

Toute suite d'éléments choisis parmi les éléments d'un ensemble fini peut être *ordonnée ou non*, selon que l'on tient compte ou non de la position occupée par les éléments. D'autre part, la suite peut être *avec* ou *sans répétitions*, selon qu'un même élément puisse être utilisé plusieurs ou une seule fois.

Exemples

- Si on jette un dé, combien de résultats distincts sont-ils possibles ?
- Combien y a-t-il de « mains » différentes au poker ?
- Combien peut-on former d'anagrammes du mot « Analyse » ?
- De combien de façons peut-on choisir 4 personnes parmi 17 ?
- Combien existe-t-il de nombres compris entre 100 et 100'000 commençant par un chiffre impair et contenant des chiffres différents ?

II. Permutations sans répétitions et notation factorielle

Exercice II.1

a) De combien de manières différentes peut-on placer 5 personnes l'une à côté de l'autre ?
b) Combien de nombres peut-on écrire en utilisant exactement une fois chacun des chiffres de 1 à 6 ?
a) Il y a 5 choix pour la $1^{ère}$ place, 4 choix pour la $2^{ème}$ place, puis 3 choix, puis 2 puis 1 choix.
Donc il y a $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ manières différentes de placer ces 5 personnes.
b) Il y a 6 choix pour le premier chiffre, puis 5, puis 4, etc. jusqu'à 1 choix pour la dernière place.
Donc il y a $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ nombres que l'on peut écrire de la manière demandée.

Définition et formule

On dispose de n objets distincts. Une **permutation** de n objets est une manière de placer ces n objets distincts sur une rangée.

Le nombre de permutations de n objets est noté P_n, et vaut :

$$\boxed{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Explication

Il y a n choix pour placer le *1er* objet, $n-1$ pour le *2ème*, 2 pour l'avant dernier et 1 pour le dernier.

Remarque

Deux permutations distinctes ne diffèrent que par l'ordre des objets les composant.

Exercice II.2

a) Combien y a-t-il de possibilités d'aligner 12 élèves ?
b) A raison de 10 secondes par permutations, combien de temps faudrait-il pour épuiser toutes les possibilités ?

a) Il y a $P_{12} = 12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 479'001'600$ possibilités d'aligner ces 12 élèves.

b) Il faudrait $\dfrac{4'790'016'000}{3600 \cdot 24 \cdot 365,25} \approx 151,786$ années pour épuiser toutes ces possibilités !

II.2 Notation factorielle

Nous venons de voir que le produit $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot3\cdot2\cdot1$ intervient naturellement dans le dénombrement du nombre de permutation de n objets. Ce produit intervient encore dans de nombreux dénombrements, donc la notation $n!$ a été introduite pour le décrire.

Le nombre $n!$ se lit *« n factorielle »*. Donc $\boxed{n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot3\cdot2\cdot1}$

Remarque
La touche PRB de la *calculatrice* TI 34 ou TI 36 permet de calculer la factorielle d'un nombre, ainsi que deux autres grandeurs décrites dans les chapitres suivants.

Exemples

$5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$ $\qquad$ $50! = 50\cdot49\cdot...\cdot3\cdot2\cdot1 \approx 3{,}04140932\cdot10^{64}$

Exercices II.3

a) $7! = 5'040$

b) $\dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 10\cdot9 = 90$

c) $\dfrac{23!}{20!} = \dfrac{23\cdot22\cdot21\cdot20\cdot19\cdot...\cdot2\cdot1}{20\cdot19\cdot...\cdot2\cdot1} = 23\cdot22\cdot21 = 10'626$

d) $\dfrac{20!}{3!\cdot17!} = \dfrac{20\cdot19\cdot18}{3\cdot2\cdot1} = 1'140$

e) Montrez que : $n! = n\cdot(n-1)!$

$$n! = n\cdot\underbrace{(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot2\cdot1}_{=(n-1)!} = n\cdot(n-1)!$$

f) $69! \approx 1{,}711224524\cdot10^{98}$

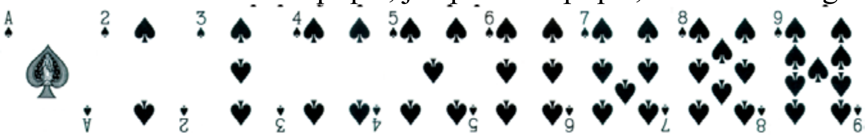
g) $70! \approx 70\cdot1{,}711224524\cdot10^{98} \approx 0{,}7\cdot1{,}711224524\cdot10^{100} \approx 1{,}197857167\cdot10^{100}$.
La calculatrice ne sait pas calculer 70! , mais vous êtes plus intelligent que la calculatrice !?!

h) Que devient la formule $n! = n\cdot(n-1)!$ dans le cas où $n = 1$?
Justifiez la convention : $0! = 1$.
$1! = 1\cdot0!$, pour que l'égalité soit correcte, il faut utiliser la convention $0! = 1$.

III. Arrangements sans répétitions

Exercice III.1

Parmi les 9 cartes As de pique, jusqu'à 9 de pique, combien d'alignements de 4 cartes peut-on former ?



La réflexion est très similaire à celle utilisée pour les permutations.
Il y a 9 choix pour la $1^{ère}$ place, 8 choix pour la $2^{ème}$ place, puis 7 choix, puis 6 pour la $4^{ème}$ place.
Donc il y a $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3'024$ alignements possibles.

Une manière de calculer est : $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{5!} = 3'024$, qui peut être plus rapide.

Une méthode encore plus rapide à la calculatrice est décrite ci-dessous.

Exercice III.2

Combien de mots fictifs de 3 lettres distinctes peut-on écrire avec les 26 lettres de l'alphabet ?
On peut écrire $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15'600$ mots fictifs de 3 lettres distinctes avec les 26 lettres.

Définition et formule

On dispose de n objets distincts. Un **arrangement sans répétitions** de n objets pris k à la fois, est une manière de choisir k ($k \leq n$) objets parmi n. **L'ordre compte**.

Le nombre d'arrangements sans répétitions de n objets pris k à la fois, est noté A_k^n, et vaut :

$$\boxed{A_k^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \underline{\underline{\frac{n!}{(n-k)!}}}}$$

Explication

Il y a n choix pour le *1*^{er} objet, $n-1$ pour le *2*^{ème}, $n-2$ pour le *3*^{ème}, …, $n-k+1$ pour le $k^{ème}$.

Remarques

- ° Deux arrangements distincts diffèrent par l'ordre **ou** par la nature des objets les composant.
- ° La touche PRB de la *calculatrice* TI 34 ou TI 36 permet de calculer le nombre d'arrangements sans répétition de n objets pris k à la fois. $A_5^9 =$ 9 PRB nPr 5 =

Exercice III.3

a) Calculez le nombre de tiercés possibles lorsque 18 chevaux prennent le départ.
b) De combien de manières différentes peut-on élire un président et un vice-président parmi 10 personnes ?
c) La formule $A_n^n = n!$ justifie la convention $0! = 1$. Pourquoi ?

a) Le nombre de tiercés possibles est $A_3^{18} = 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4'896$. 18 PRB nPr 3 = 4'896.

b) Le nombre de manières vaut : $A_2^{10} = 90$. 10 PRB nPr 2 = 90

c) $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$. Pour que l'égalité soit correcte, il faut que 0! = 1.

IV. Arrangements avec répétitions

Exercice IV.1

En lançant 4 fois de suite un dé standard, combien de séquences différentes peut-on obtenir ?

Il y a 6 résultats pour le 1^{er} lancer, 6 résultats pour le $2^{ème}$ lancer, 6 résultats pour le $3^{ème}$ lancer et 6 résultats pour le $4^{ème}$ et dernier lancer.
Donc il y a $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1'296$ séquences possibles.

Exercice IV.2

Combien de mots fictifs de 3 lettres peut-on écrire avec les 26 lettres de l'alphabet ?

Il y a 26 possibilités pour la $1^{ère}$ lettre, et 26 possibilités pour la $2^{ème}$ et $3^{ème}$ lettre.
On peut donc écrire $26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^3 = 17'576$ mots de 3 lettres avec ces 26 lettres.

Définition et formule

On dispose de n objets distincts. Un **arrangement avec répétitions** de n objets pris k à la fois, est une manière de choisir k objets parmi ces n objets, le même objet pouvant être pris plusieurs fois.
L'ordre compte.

Le nombre d'arrangements avec répétitions de n objets pris k à la fois, est noté $\overline{A_k^n}$, et vaut :

$$\boxed{\overline{A_k^n} = n^k}$$

Explication

Il y a n choix pour le *1^er^* objet, n pour le $2^{ème}$, n pour le $3^{ème}$, …, n pour le $k^{ème}$.

Exercice IV.3

a) Combien de séries différentes peut-on obtenir en jouant à « pile ou face » 7 fois ?
b) Combien de séquences peut-on lire sur un compteur de voitures ? Ce compteur est composé de 5 cylindres sur chacun desquels sont gravés les chiffres de 0 à 9.
c) Combien de sous-ensembles différents peut-on former à partir de l'ensemble { A ; B ; C ; D } ?

a) On peut obtenir $\overline{A_7^2} = 2^7 = 128$ séries différentes en jouant 7 fois à « pile ou face ».
b) On peut lire $\overline{A_5^{10}} = 10^5 = 100'000$ séquences différentes sur ce compteur.
c) Pour chaque lettre, il y a deux possibilités. Soit elle est prise, soit elle n'est pas prise. Cela permet donc de former $\overline{A_4^2} = 2^4 = 16$ sous ensembles. Voici la liste de ces 16 sous-ensembles :
$\varnothing$; $\{A\}$; $\{B\}$; $\{C\}$; $\{D\}$; $\{A, B\}$; $\{A, C\}$; $\{A, D\}$; $\{B, C\}$; $\{B, D\}$; $\{C, D\}$
$\{A, B, C\}$; $\{A, B, D\}$; $\{A, C, D\}$; $\{B, C, D\}$; $\{A, B, C, D\}$.

VI. Permutations avec répétitions

Exercice VI.1

Combien de mots fictifs peut-on écrire avec les lettres du mot « *LILLE* » ?

Si on distingue les 6 lettres, on peut écrire 6! mots fictifs. Mais chaque permutation des 3 lettres "L" donne un mot équivalent. Donc chaque mot de la liste des 6! mots apparaît sous 3! formes équivalentes. Le nombre de mots que l'on peut écrire vaut donc $\frac{6!}{3!} = 120$.

Exercice VI.2

De combien de façons peut-on aligner 3 garçons et 4 filles, sans distinguer ni les garçons, ni les filles ?

Si on distingue les 7 personnes, il y a 7! façons de les aligner.

Mais les 3! permutations des garçons et les 4! permutations des filles ne changent rien si on ne distingue pas les garçons entre eux, ni les filles entre elles.

Il y a donc $\frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$ façons d'aligner des 3 garçons et 4 filles.

Définition et formule

On dispose de n objets. Parmi ces n objets il y a p sortes différentes. On suppose qu'il y a :
n_1 objets de sorte *1*, n_2 objets de sorte *2*, … , n_p objets de sorte p, où $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$.

Une **permutation avec répétition** de ces n objets est une permutation de ces n objets, dans laquelle on ne distingue pas les objets d'une même sorte.

Le nombre de permutations avec répétitions de $n = n_1 + n_2 + ... + n_p$ objets se note $\overline{P}(n_1, n_2, ..., n_p)$ et vaut :

$$\boxed{\overline{P}(n_1, n_2, ..., n_p) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_p!}}$$

Explication

Il y a $n!$ permutations possibles de ces n objets, parmi lesquelles il y a $n_1!$ permutations des objets de la première sorte, qu'on ne distingue pas, il y a $n_2!$ permutations des objets de la deuxième sorte, qu'on ne distingue pas, etc.

Dans les $n!$ permutations des objets, on en compte $n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_p!$ fois trop.

Exercice VI.3

a) De combien de façons peut-on aligner 2 livres rouges, 5 livres verts et 1 livre blanc sur une étagère ? (Seule la couleur différencie les livres !)

b) De combien de manière différentes peut-on placer l'une à côté de l'autre, 5 boules rouges, 3 vertes et 2 bleues ?

a) On peut aligner ces 8 livres de $\frac{8!}{2! \cdot 5! \cdot 1!} = 168$ façons différentes.

b) On peut placer ces 10 boules de $\frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = 2'520$ manières différentes l'une à côté de l'autre.

VII. Combinaisons sans répétitions

Exercice VII.1

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.
De combien de manière peut-on retirer 3 boules de l'urne ?

Si on tenait compte de l'ordre, il y aurait A_3^6 tirages possibles. Mais parmi ces tirages, il y en a chaque fois 3! qui font apparaître les mêmes boules, mais dans un ordre différent. Vu que l'ordre ne compte pas ici, il y a $\frac{A_3^6}{3!} = \frac{120}{6} = 20$ manières de retirer 3 boules de l'urne.

Exercice VII.2

Combien d'équipes de 3 personnes peut-on former à partir de 7 personnes ?

Si on tenait compte de l'ordre, il y aurait A_3^7 équipes possibles. Mais parmi ces tirages, il y en a chaque fois 3! qui font apparaître les mêmes personnes, mais dans un ordre différent. Vu que l'ordre ne compte pas ici, il y a $\frac{A_3^7}{3!} = \frac{210}{6} = 35$ équipes possibles.

Définition et formule

On dispose de n objets distincts. Une **combinaison sans répétitions** de n objets pris k à la fois, est un choix de k ($k \leq n$) objets parmi n. **L'ordre ne compte pas**.

Le nombre de combinaisons sans répétitions de n objets pris k à la fois, est noté C_k^n, et vaut :

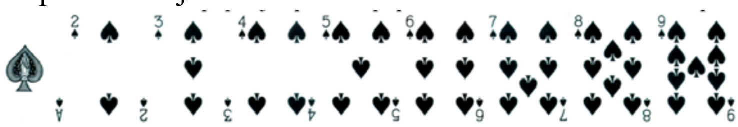
$$\boxed{C_k^n = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$$

Remarques

- Deux combinaisons distinctes diffèrent par la nature des objets les composant, mais pas par l'ordre.
- La touche PRB de la *calculatrice* TI 34 ou TI 36 permet de calculer le nombre de combinaisons sans répétition de n objets pris k à la fois. C_5^9 = 9 PRB nCr 5 =

exercice VII.3

a) Combien de glaces distinctes avec 4 parfums différents peut-on faire avec 9 parfums ?
b) Combien de mains de 5 cartes peut-on former à partir d'un jeu de 9 cartes ?
c) Pourquoi obtient-on le même résultat en a) et en b) ?



a) On peut former $C_4^9 = 126$ glaces distinctes.

b) On peut former $C_5^9 = 126$ mains de 5 cartes à partir d'un jeu de 9 cartes.

c) Remarquez que $C_{(n-k)}^n = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = C_k^n$, donc $C_4^9 = C_5^9$.