I. Introduction

Les différents modèles mathématiques construits pour étudier les phénomènes où intervient le hasard sont basés sur la notion de probabilité. Celle-ci exige des *dénombrements d'ensembles finis*. C'est l'objet d'étude de *l'analyse combinatoire*.

Toute suite d'éléments choisis parmi les éléments d'un ensemble fini peut être *ordonnée ou non*, selon que l'on tient compte ou non de la position occupée par les éléments. D'autre part, la suite peut être *avec* ou *sans répétitions*, selon qu'un même élément puisse être utilisé plusieurs ou une seule fois.

exemples

- Si on jette un dé, combien de résultats distincts sont-ils possibles ?
- Combien y a-t-il de « mains » différentes au poker ?
- Combien peut-on former d'anagrammes du mot « Analyse » ?
- De combien de façons peut-on choisir 4 personnes parmi 17 ?
- Combien existe-t-il de nombres compris entre 100 et 100'000 commençant par un chiffre impair et contenant des chiffres différents ?

II. Notation factorielle

$$\boxed{n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

Le nombre $n!$ se lit *« n factorielle »*.

On convient que $0! = 1$ (justification : c.f. chapitre **V.**)

exemples

$5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$

$50! = 50\cdot 49\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \cong 3{,}04140932\cdot 10^{64}$

exercices

II.1) $7! = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5'040$ Sur la calculatrice, tapez : 7 PRB ! =

II.2) $\dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 10\cdot 9 = 90$ Calculatrice : 10 PRB ! ÷ 8 PRB ! =

II.3) $\dfrac{10!}{3!\cdot 7!} = \dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\ \cdot\ 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1} = 120$

vrai ou faux ?

II.4) $n! = n\cdot(n-1)!$ C'est vrai car : $n! = n\cdot\underbrace{(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}_{=(n-1)!} = n\cdot(n-1)!$

II.5) $\dfrac{72!}{70!}$ n'existe pas.

Sur la calculatrice, 72! donne : "OVERFLOW Error",

mais $\dfrac{72!}{70!} = \dfrac{72\cdot71\cdot70\cdot69\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{70\cdot69\cdot\ldots\cdot2\cdot1} = 72\cdot 71 = 5'112$ est bien défini.

III. Arrangements sans répétitions

exemple III.1

Soient ♠ ♥ ♦ ♣ quatre objets. Les arrangements sans répétitions de ces 4 objets pris 2 à la fois sont :

♠ ♥	♠ ♦	♠ ♣	♥ ♠	♥ ♦	♥ ♣
♦ ♠	♦ ♥	♦ ♣	♣ ♠	♣ ♥	♣ ♦

exemple III.2

Combien de mots fictifs peut-on écrire avec 3 lettres distinctes choisies parmi les lettres $C\,H\,I\,E\,N$?
Il y a 5 choix pour la première lettre, 4 choix pour la deuxième et 3 choix pour la dernière, donc au total : $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ mots fictifs possibles.

Définition et formule

On dispose de n objets distincts. Un **arrangement sans répétitions** de n objets pris k à la fois, est une manière de choisir k ($k \leq n$) objets parmi n. **L'ordre compte**.

Le nombre d'arrangements sans répétitions de n objets pris k à la fois, est noté A_k^n, et vaut :

$$A_k^n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

explication

Il y a n choix pour le *1er* objet, $n-1$ pour le *2ème*, $n-2$ pour le *3ème*, …, $n-k+1$ pour le *kème*.

remarque

Deux arrangements distincts diffèrent par l'ordre **ou** par la nature des objets les composant.

exercice III.1 : Calculez le nombre de tiercés possibles lorsque 18 chevaux prennent le départ.
Il y a 18 choix pour le premier cheval, 17 choix pour le deuxième et 16 choix pour le dernier, donc au total : $18 \cdot 17 \cdot 16 = 4'896$ tiercés possibles.

exercice III.2 : De combien de manières différentes peut-on élire un président et un vice-président parmi 10 personnes ?
Il y a 10 choix pour la première personne, 9 choix pour la deuxième, donc au total :
$A_8^{10} = 10 \cdot 9 = 90$ manières d'élire un président et un vice-président.
Calculatrice : 10 PRB nPr 2 =

IV. Arrangements avec répétitions

exemple IV.1

Soient △ 🛎 Ⓟ trois objets. Les arrangements avec répétitions de ces 3 objets pris 2 à la fois sont :

△ △	△ 🛎	△ Ⓟ	🛎 △	🛎 🛎	🛎 Ⓟ	Ⓟ △	Ⓟ 🛎	Ⓟ Ⓟ

exemple IV.2

Combien de mots fictifs peut-on écrire avec 3 lettres parmi les lettres *C H I E N* ?
Cette fois, on peut utiliser plusieurs fois la même lettre. Il y a 5 choix pour la première lettre, 5 choix pour la deuxième et 5 choix pour la dernière, donc au total :
$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ mots fictifs possibles.

Définition et formule

On dispose de n objets distincts. Un **arrangement avec répétitions** de n objets pris k à la fois, est une manière de choisir k objets parmi ces n objets, le même objet pouvant être pris plusieurs fois. **L'ordre compte**.

Le nombre d'arrangements avec répétitions de n objets pris k à la fois, est noté $\overline{A_k^n}$, et vaut :

$$\boxed{\overline{A_k^n} = n^k}$$

explication

Il y a n choix pour le *1er* objet, n pour le *2ème*, n pour le *3ème*, …, n pour le *kème*.

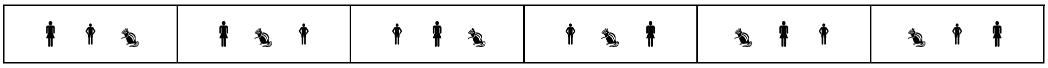
exercice IV.1 : Combien de séries différentes peut-on obtenir en jouant à « pile ou face » 7 fois ?
Il y a 2 résultats possibles lors de chaque lancé, donc $2^7 = 128$ séries possibles.

exercice IV.4 : Combien de séquences peut-on lire sur un compteur de voitures ? Ce compteur est composé de 5 cylindres sur chacun desquels sont gravés les chiffres de 0 à 9.
Il y a 10 chiffres possibles par cylindre, donc 10^5 séquences possibles.

V. Permutations sans répétitions

exemple V.1

Soient  trois objets. Les permutations de ces 3 objets sont :



exemple V.2

Combien de mots fictifs peut-on écrire en utilisant exactement une fois chaque lettre du mot « *C H I E N* » ?

Il y a 5 choix pour la première lettre, 4 choix pour la deuxième, 3 choix pour la deuxième, 2 choix pour la troisième et 1 choix pour la dernière, donc au total : $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ mots fictifs possibles.

Définition et formule

On dispose de n objets distincts. Une **permutation** de n objets est un arrangement sans répétitions de **tous** ces n objets.

Le nombre de permutations de n objets est noté P_n, et vaut :

$$\boxed{P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

explication

Il y a n choix pour le *1er* objet, $n-1$ pour le *2ème*, 2 pour l'avant dernier et 1 pour le dernier.

remarque

Deux permutations distinctes ne diffèrent que par l'ordre des objets les composant.

question

La formule $A_n^n = n!$ justifie la convention $0! = 1$. Pourquoi ?

exercice V.1 : De combien de façons différentes peut-on ranger 4 mouchoirs différents dans 4 tiroirs, en plaçant un mouchoir par tiroir ?

Il y a $4! = 24$ permutations possibles des 4 mouchoirs donc 24 façons de ranger ces mouchoirs différents dans 4 tiroirs.

exercice V.2 : Combien y a-t-il de possibilités d'aligner 20 élèves ?
A raison de 10 secondes par permutations, combien de temps faudrait-il pour épuiser toutes les possibilités ?

Il y a $20! \approx 2{,}4329 \cdot 10^{18}$ permutations possibles des 20 élèves.
A raison de 10 secondes par permutations, cela fait environ
$2{,}4329 \cdot 10^{19}$ secondes $\approx$ 770 milliards d'années, plus que l'âge de l'univers, qui est d'environ 13,5 milliards d'années.

VI. Permutations avec répétitions

exemple VI.1 : Soient 🎥 🎥 🎥 et \|/ \|/ cinq objets.

Dans cet exemple, il y a $p = 2$ sortes d'objets, $n_1 = 3$ et $n_2 = 2$. Les permutations avec répétitions sont :

🎥 🎥 🎥 |/ |/	🎥 🎥 |/ 🎥 |/	🎥 |/ 🎥 🎥 |/	|/ 🎥 🎥 🎥 |/	🎥 🎥 |/ |/ 🎥
🎥 |/ 🎥 |/ 🎥	|/ 🎥 🎥 |/ 🎥	🎥 |/ |/ 🎥 🎥	|/ 🎥 |/ 🎥 🎥	|/ |/ 🎥 🎥 🎥

Définition et formule

On dispose de n objets. Parmi ces n objets il y a p sortes différentes. On suppose qu'il y a : n_1 objets de sorte *1*, n_2 objets de sorte *2*, … , n_p objets de sorte p, où $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$.

Une **permutation avec répétition** de ces n objets est une permutation de ces n objets, dans laquelle on ne distingue pas les objets d'une même sorte.

Le nombre de permutations avec répétitions de $n = n_1 + n_2 + ... + n_p$ objets est :

$$\boxed{\overline{P}(n_1, n_2, ..., n_p) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_p!}}$$

explication

Il y a $n!$ permutations possibles de ces n objets, parmi lesquelles il y a $n_1!$ permutations des objets de la première sorte, qu'on ne distingue pas, il y a $n_2!$ permutations des objets de la deuxième sorte, qu'on ne distingue pas, etc.
Dans les $n!$ permutations des objets, on en compte $n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_p!$ fois trop.

exercice VI.1 : Combien de mots fictifs peut-on écrire avec les lettres du mot « *LILLE* » ?

Il y a 5! = 120 permutations, si on distingue les trois lettres "L". Pour chaque mot, il y a 3! = 6 permutations des lettres "L", qui ne change pas le mot.

Donc, si on ne distingue pas les lettres, il y a 5! divisé par 3! = $\frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$ mots possibles.

exercice VI.2 : De combien de façons peut-on aligner 2 livres rouges, 5 livres verts et 1 livre blanc sur une étagère ? (Seule la couleur différencie les livres !)

Il y a (2+5+1)! = 8! = 40'320 permutations, si on distingue les livres. Pour chaque alignement, il y a 2! = 2 permutations des livres rouges et 5! = 120 permutations des livres verts, qui ne change pas l'alignement.

Donc, si on ne distingue pas les livres de même couleur, il y a $\frac{8!}{2! \cdot 5!} = 168$ alignements possibles.

VII. Combinaisons sans répétitions

exemple VII.1

Soient 🕯 ☾ 📽 🗎 💿 cinq objets.

Les combinaisons sans répétitions de 5 objets pris 3 à la fois sont :

🕯 ☾ 📽	🕯 ☾ 🗎	🕯 ☾ 💿	🕯 📽 🗎	🕯 📽 💿
🕯 🗎 💿	☾ 📽 🗎	☾ 📽 💿	☾ 🗎 💿	📽 🗎 💿

Il y a donc 10 manières de choisir 3 éléments parmi 5, *l'ordre n'important pas*.

A chacune de ces combinaisons correspond $3! = 6$ arrangements possibles :

🕯 ☾ 📽	🕯 ☾ 📽	🕯 📽 ☾	☾ 🕯 📽
	☾ 📽 🕯	📽 🕯 ☾	📽 ☾ 🕯

conséquence

Il y a donc 3! fois moins de combinaisons de 5 objets pris 3 à la fois, que d'arrangements de 5 objets pris 3 à la fois.

exemple VII.2

Combien peut-on former d'ensembles de 3 lettres différentes parmi les lettres *C H I E N* ?

Si on tient compte de l'ordre de tirage, il y a 5 choix pour la première lettre, 4 choix pour la deuxième et 3 choix pour la dernière, donc au total : $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ façons de tirer les trois lettres. Mais pour chaque ensemble de 3 lettres, il y a 3! = 6 façons qui donnent les même lettres, seul l'ordre change. Donc il y a $\frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$ ensembles différents de 3 lettres tirées parmi les 5 lettres du mot "C H I E N".

Définition et formule

On dispose de n objets distincts. Une **combinaison sans répétitions** de n objets pris k à la fois, est un choix de k ($k \leq n$) objets parmi n. **L'ordre ne compte pas**.

Le nombre de combinaisons sans répétitions de n objets pris k à la fois, est noté C_k^n, et vaut :

$$\boxed{C_k^n = \frac{A_k^n}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$

remarque

Deux combinaisons distinctes diffèrent par la nature des objets les composant, mais pas par l'ordre.

exercice VII.1 : Combien de glaces distinctes avec 3 parfums différents peut-on faire avec 8 parfums ?

C'est une combinaison de 3 choix pris parmi 8. Cela donne $C_3^8 = 56$ choix possibles.

Calculatrice : 8 PRB nCr 3 =

On peut définir des *combinaisons avec répétitions*, mais nous ne le ferons pas.