I. Introduction

Les différents modèles mathématiques construits pour étudier les phénomènes où intervient le hasard sont basés sur la notion de probabilité. Celle-ci exige des *dénombrements d'ensembles finis*. C'est l'objet d'étude de *l'analyse combinatoire*.

Toute suite d'éléments choisis parmi les éléments d'un ensemble fini peut être *ordonnée ou non*, selon que l'on tient compte ou non de la position occupée par les éléments. D'autre part, la suite peut être *avec* ou *sans répétitions*, selon qu'un même élément puisse être utilisé plusieurs ou une seule fois.

Exemples

- Si on jette un dé, combien de résultats distincts sont-ils possibles ?
- Combien y a-t-il de « mains » différentes au poker ?
- Combien peut-on former d'anagrammes du mot « Analyse » ?
- De combien de façons peut-on choisir 4 personnes parmi 17 ?
- Combien existe-t-il de nombres compris entre 100 et 100'000 commençant par un chiffre impair et contenant des chiffres différents ?

II. Permutations sans répétitions et notation factorielle

Exercice II.1

a) De combien de manières différentes peut-on placer 5 personnes l'une à côté de l'autre ?
b) Combien de nombres peut-on écrire en utilisant exactement une fois chacun des chiffres de 1 à 6 ?

Définition

On dispose de n objets distincts. Une **permutation** de n objets est une manière de placer ces n objets distincts sur une rangée.

Formule

Le nombre de permutations de n objets est noté P_n, et vaut :

$$\boxed{P_n = \qquad\qquad\qquad}$$

Explication

Il y a n choix pour placer le *1er* objet, $n-1$ pour le *2ème*, 2 pour l'avant dernier et 1 pour le dernier.

Remarque

Deux permutations distinctes ne diffèrent que par l'ordre des objets les composant.

Exercice II.2

a) Combien y a-t-il de possibilités d'aligner 12 élèves ?
b) A raison de 10 secondes par permutations, combien de temps faudrait-il pour épuiser toutes les possibilités ?

II.2 Notation factorielle

Nous venons de voir que le produit $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot3\cdot2\cdot1$ intervient naturellement dans le dénombrement du nombre de permutation de n objets. Ce produit intervient encore dans de nombreux dénombrements, donc la notation $n!$ a été introduite pour le décrire.

Le nombre $n!$ se lit *« n factorielle »*. Donc $\boxed{n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot3\cdot2\cdot1}$

Remarque
La touche PRB de la *calculatrice* TI 34 ou TI 36 permet de calculer la factorielle d'un nombre, ainsi que deux autres grandeurs décrites dans les chapitres suivants.

Exemples

$5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$

$50! = 50\cdot49\cdot...\cdot3\cdot2\cdot1 \approx 3,04140932\cdot10^{64}$

Exercices II.3

a) $7! =$

b) $\dfrac{10!}{8!} =$

c) $\dfrac{23!}{20!} =$

d) $\dfrac{20!}{3!\cdot17!} =$

e) Montrez que : $n! = n\cdot(n-1)!$

f) $69! \approx$

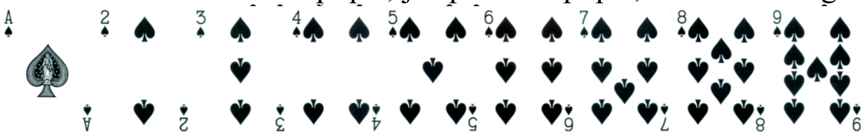
g) $70! \approx$

h) Que devient la formule $n! = n\cdot(n-1)!$ dans le cas où $n = 1$?
Justifiez la convention : $0! = 1$.

III. Arrangements sans répétition

Exercice III.1

Parmi les 9 cartes As de pique, jusqu'à 9 de pique, combien d'alignements de 4 cartes peut-on former ?



Exercice III.2

Combien de mots fictifs de 3 lettres distinctes peut-on écrire avec les 26 lettres de l'alphabet ?

Définition

On dispose de n objets distincts. Un **arrangement sans répétitions** de n objets pris k à la fois, est une manière de choisir k ($k \leq n$) objets parmi n. **L'ordre compte**.

Formule

Le nombre d'arrangements sans répétitions de n objets pris k à la fois, est noté A_k^n, et vaut :

$$A_k^n =$$

Explication

Il y a n choix pour le *1er* objet, $n-1$ pour le *2ème*, $n-2$ pour le *3ème*, …, $n-k+1$ pour le $k^{ème}$.

Remarques

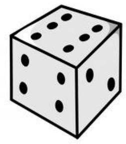
° Deux arrangements distincts diffèrent par l'ordre **ou** par la nature des objets les composant.

° La touche PRB de la *calculatrice* TI 34 ou TI 36 permet de calculer le nombre d'arrangements sans répétition de n objets pris k à la fois. $A_5^9 =$ 9 PRB nPr 5 =

Exercice III.3

a) Calculez le nombre de tiercés possibles lorsque 18 chevaux prennent le départ.
b) De combien de manières différentes peut-on élire un président et un vice-président parmi 10 personnes ?
c) La formule $A_n^n = n!$ justifie la convention $0! = 1$. Pourquoi ?

IV. Arrangements avec répétitions



Exercice IV.1
En lançant 4 fois de suite un dé standard, combien de séquences différentes peut-on obtenir ?

Exercice IV.2
Combien de mots fictifs de 3 lettres peut-on écrire avec les 26 lettres de l'alphabet ?

Définition
On dispose de n objets distincts. Un **arrangement avec répétitions** de n objets pris k à la fois, est une manière de choisir k objets parmi ces n objets, le même objet pouvant être pris plusieurs fois. **L'ordre compte**.

Formule
Le nombre d'arrangements avec répétitions de n objets pris k à la fois, est noté $\overline{A_k^n}$, et vaut :

$$\boxed{\overline{A_k^n} = \qquad\qquad}$$

Explication
Il y a n choix pour le *1er* objet, n pour le *2ème*, n pour le *3ème*, …, n pour le *kème*.

Exercice IV.3
a) Combien de séries différentes peut-on obtenir en jouant à « pile ou face » 7 fois ?
b) Combien de séquences peut-on lire sur un compteur de voitures ? Ce compteur est composé de 5 cylindres sur chacun desquels sont gravés les chiffres de 0 à 9.
c) Combien de sous-ensembles différents peut-on former à partir de l'ensemble { A ; B ; C ; D } ?

V. Permutations avec répétitions

Exercice V.1

Combien de mots fictifs peut-on écrire avec les lettres du mot « *LILLE* » ?

Exercice V.2

De combien de façons peut-on aligner 3 garçons et 4 filles, sans distinguer ni les garçons, ni les filles ?

Définition

On dispose de n objets. Parmi ces n objets il y a p sortes différentes. On suppose qu'il y a :
n_1 objets de sorte *1*, n_2 objets de sorte *2*, … , n_p objets de sorte p, où $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$.
Une **permutation avec répétition** de ces n objets est une permutation de ces n objets, dans laquelle on ne distingue pas les objets d'une même sorte.

Formule

Le nombre de permutations avec répétitions de $n = n_1 + n_2 + ... + n_p$ objets se note $\overline{P}(n_1, n_2, ..., n_p)$ et vaut :

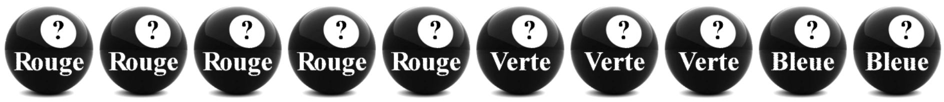
$$\overline{P}(n_1, n_2, ..., n_p) =$$

Explication

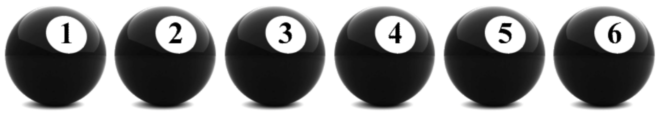
Il y a $n!$ permutations possibles de ces n objets, parmi lesquelles il y a $n_1!$ permutations des objets de la première sorte, qu'on ne distingue pas, il y a $n_2!$ permutations des objets de la deuxième sorte, qu'on ne distingue pas, etc.
Dans les $n!$ permutations des objets, on en compte $n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_p!$ fois trop.

Exercice V.3

a) De combien de façons peut-on aligner 2 livres rouges, 5 livres verts et 1 livre blanc sur une étagère ? (Seule la couleur différencie les livres !)
b) De combien de manière différentes peut-on placer l'une à côté de l'autre, 5 boules rouges, 3 vertes et 2 bleues ?



VI. Combinaisons sans répétition



Exercice VI.1

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.
De combien de manière peut-on retirer 3 boules de l'urne ?

Exercice VI.2

Combien d'équipes de 3 personnes peut-on former à partir de 7 personnes ?

Définition

On dispose de n objets distincts. Une **combinaison sans répétitions** de n objets pris k à la fois, est un choix de k ($k \leq n$) objets parmi n. **L'ordre ne compte pas**.

Formule

Le nombre de combinaisons sans répétitions de n objets pris k à la fois, est noté C_k^n, et vaut :

$$C_k^n =$$

Explication

Pour faire un arrangement sans répétition de n objets pris k à la fois, on peut commencer par faire une combinaisons sans répétition de n objets pris k à la fois, puis arranger les k objets en les permutant. Cela donne le lien entre le nombre d'arrangements, le nombre de combinaisons et le nombre de permutations.

Remarques

° Deux combinaisons distinctes diffèrent par la nature des objets les composant, mais pas par l'ordre.

° La touche PRB de la *calculatrice* TI 34 ou TI 36 permet de calculer le nombre de combinaisons sans répétition de n objets pris k à la fois. $C_5^9 =$ 9 PRB nCr 5 =

exercice VI.3

a) Combien de glaces distinctes avec 4 parfums différents peut-on faire avec 9 parfums ?
b) Combien de mains de 5 cartes peut-on former à partir d'un jeu de 9 cartes ?
c) Pourquoi obtient-on le même résultat en a) et en b) ?