❶ Réponses :

1. $I_1=\int_{-2}^{2} x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{2}=\frac{2^3}{3}-\frac{(-2)^3}{3}=\frac{16}{3}$

2. $I_2=\int_{0}^{3} x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{0}^{3}=\frac{3^4}{4}-\frac{0^4}{4}=\frac{81}{4}$

3. $I_3=\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)dx=\left.\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{1}=\left(1-\frac{1^3}{3}\right)-\left((-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)=\frac{4}{3}$

4. $I_4=\int_{1}^{2} \left(x^2-x\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right|_{1}^{2}=\left(\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}\right)-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}\right)=\frac{5}{6}$

5. $I_5=\int_{-1}^{3} \left(9-x^2\right)dx=\left.\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{3}=\left(9\cdot 3-\frac{3^3}{3}\right)-\left(9\cdot(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)=\frac{80}{3}$

6. $I_6=\int_{0}^{2} \left(8-x^3\right)dx=\left.\left(8x-\frac{x^4}{4}\right)\right|_{0}^{2}=\left(8\cdot 2-\frac{2^4}{4}\right)-\left(8\cdot 0-\frac{0^4}{4}\right)=12$

7. $I_7=\int_{1}^{3} \left(x^3-x^2\right)dx=\left.\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{1}^{3}=\left(\frac{3^4}{4}-\frac{3^3}{3}\right)-\left(\frac{1^4}{4}-\frac{1^3}{3}\right)=\frac{34}{3}$

8. $I_8=\int_{-1}^{2} 3\cdot\left(x-2\right)^2dx=\left.\left(x-2\right)^3\right|_{-1}^{2}=\left(2-2\right)^3-\left(-1-2\right)^3=27$

9. $I_9=\int_{0}^{1} \left(1+x-x^2\right)dx=\left.\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{0}^{1}=\left(1+\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}\right)-\left(0+\frac{0^2}{2}-\frac{0^3}{3}\right)=\frac{7}{6}$

10. $I_{10}=\int_{0}^{\pi} \left(1+\sin\left(x\right)\right)dx=\left.\left(x-\cos(x)\right)\right|_{0}^{\pi}=\left(\pi-\cos(\pi)\right)-\left(0-\cos(0)\right)=\pi+2$

11. $I_{11}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(x\right)dx=\left.\sin(x)\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2$

12. $I_{12}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(2x\right)dx=\left.-\frac{1}{2}\cdot\cos(2x)\right|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}\cdot\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot 0)\right)=\frac{1}{2}$

❷ Solutions :

1.	$\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left(2x\right)dx=\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{2}\cdot\left(\cos(2\pi)-\cos(-2\pi)\right)=-\frac{1}{2}\cdot(1-1)=0$
2.	$\int_{-11}^{2}\sqrt[3]{5-2x}\,dx=\int_{-11}^{2}(5-2x)^{\frac{1}{3}}dx=\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{-2}(5-2x)^{\frac{4}{3}}\right]_{-11}^{2}=\frac{-3}{8}\cdot\left\{(5-4)^{\frac{4}{3}}-(5+22)^{\frac{4}{3}}\right\}=\frac{-3}{8}\cdot\left\{1-81\right\}=30$
3.	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sin\left(4x\right)-5\cos\left(x\right)\right)dx=\left[-\frac{1}{4}\cos(4x)-5\sin(x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$ $\left\{\left[-\frac{1}{4}\cos(4\pi)-5\sin(\pi)\right]-\left[-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{-4\pi}{2}\right)-5\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right]\right\}=\left\{\left[-\frac{1}{4}-0\right]-\left[-\frac{1}{4}-(-5)\right]\right\}=-5$

4.
$$\int_0^1 \frac{x^3+1}{\left(x^4+4x+1\right)^2}\,dx = \left.\frac{-\left(x^4+4x+1\right)^{-1}}{4}\right|_0^1 = \left.\frac{-1}{4\cdot\left(x^4+4x+1\right)}\right|_0^1 = \frac{-1}{4\cdot\left(1^4+4\cdot1+1\right)} - \frac{-1}{4\cdot\left(0^4+4\cdot0+1\right)} =$$
$$\frac{1}{4}-\frac{1}{4\cdot6}=\frac{5}{24}$$

5.
$$\int_1^3 \left(8-x^3\right)dx = \left[8x-\frac{1}{4}x^4\right]_1^3 = \left[24-\frac{81}{4}\right]-\left[8-\frac{1}{4}\right] = 24-8-\frac{81}{4}+\frac{1}{4} = 16-\frac{80}{4} = -4$$

6.
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos(x)\cdot\sin^2(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}\cdot\sin^3(x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = \frac{1}{3}\cdot\left\{\left[\sin^3(2\pi)\right]-\left[\sin^3\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} = \frac{1}{3}\cdot\{[0]-[-1]\} = \frac{1}{3}$$

7.
$$\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \int_{-1}^0 x\cdot\left(x^2+4\right)^{\frac{-1}{2}}\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}\cdot\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}}\right]_{-1}^0 = (0+4)^{\frac{1}{2}}-(1+4)^{\frac{1}{2}} == 2-\sqrt{5}$$

8.
$$\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{7}{5}} 2(3-5x)^3\,dx = \left[2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-5}\cdot(3-5x)^4\right]_{\frac{1}{5}}^{\frac{7}{5}} = \frac{-1}{10}\cdot\left\{\left[(3-7)^4\right]-\left[(3-1)^4\right]\right\} = \frac{-1}{10}\cdot\{[256]-[16]\} = -24$$

9.
$$\int_0^1 \left(x^2-1\right)\left(x^3-3x\right)^4\,dx = \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(x^3-3x\right)^5\right]_0^1 = \frac{1}{15}\cdot\left\{\left[\left(1^3-3\right)^5\right]-\left[\left(0^3-0\right)^5\right]\right\} = \frac{1}{15}\cdot\{[-32]-[0]\} = \frac{-32}{15}$$

10.
$$\int_1^8 \left(\frac{1}{\sqrt{2x}}-3\sqrt{x}\right)dx = \int_1^8 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x^{\frac{-1}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1}\cdot x^{\frac{1}{2}}-3\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_1^8 = \left[\sqrt{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}-2\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_1^8 =$$
$$\left[2^{\frac{1}{2}}\cdot8^{\frac{1}{2}}-2\cdot8^{\frac{3}{2}}\right]-\left[\sqrt{2}\cdot1^{\frac{1}{2}}-2\cdot1^{\frac{3}{2}}\right] = \left[4-2\cdot8\cdot2\cdot\sqrt{2}\right]-\left[\sqrt{2}-2\right] = 4-32\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}+2 = 6-33\cdot\sqrt{2}$$

11.
$$\int_{-2}^1 \frac{3x^2-5x}{2x}\,dx = \int_{-2}^1 (1{,}5x-2{,}5)\,dx = \left[1{,}5\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2-2{,}5x\right]_{-2}^1 = \left[0{,}75\cdot1^2-2{,}5\right]-\left[0{,}75\cdot4+5\right] =$$
$$0{,}75-2{,}5-3-5 = -9{,}75$$

12.
$$\int_{-\pi/2}^{\pi} -\sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\cos^2(x)\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{2}\cdot\left\{\cos^2(\pi)-\cos^2\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right\} = \frac{1}{2}\cdot\left\{(-1)^2-0^2\right\} = 0{,}5$$

13.
$$\int_2^4 e^{x/2}\,dx = \left[2\cdot e^{\frac{x}{2}}\right]_2^4 = 2\cdot\left\{e^{\frac{4}{2}}-e^{\frac{2}{2}}\right\} = 2\cdot\left(e^2-e\right)$$

14.
$$\int_1^5 \frac{1}{3x}\,dx = \int_1^5 \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\Big[\ln|x|\Big]_1^5 = \frac{1}{3}\cdot\{\ln(5)-\ln(1)\} = \frac{\ln(5)}{3}$$

15.
$$\int_{-3}^2 x\cdot e^{-2x^2}\,dx = \left[\frac{-1}{4}\cdot e^{-2x^2}\right]_{-3}^2 = \frac{-1}{4}\cdot\left\{e^{-2\cdot4}-e^{-2\cdot9}\right\} = \frac{e^{-18}-e^{-8}}{4}$$

16.
$$\int_{-2}^0 \frac{x}{x^2+3}\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+3)\right]_{-2}^0 = \frac{1}{2}\cdot\{\ln(3)-\ln(7)\} = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{3}{7}\right) = \ln\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \underline{\underline{\ln\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)}}}$$
Réponses au choix !

17. $$\int_2^4 \frac{4x+4}{x^2+2x+3}\,dx = \int_2^4 2\cdot(2x+2)\cdot\left(x^2+2x+3\right)^{-1}dx = 2\cdot\left[\ln\left(x^2+2x+3\right)\right]\Big|_2^4 =$$
$$2\cdot\left\{\left[\ln(16+8+3)\right]-\left[\ln(4+4+3)\right]\right\}=$$
$$\underline{\underline{2\cdot\{\ln(27)-\ln(11)\} = 2\cdot\ln\left(\frac{27}{11}\right)}}$$

18. $$\int_{-2}^{0}\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{x^2+x}\,dx = \int_{-2}^{0}\frac{1}{2}\cdot(2x+1)e^{x^2+x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[e^{x^2+x}\right]\Big|_{-2}^{0} = \frac{1}{2}\cdot\left\{\left[e^{0}\right]-\left[e^{4-2}\right]\right\} = \frac{1-e^2}{2}$$

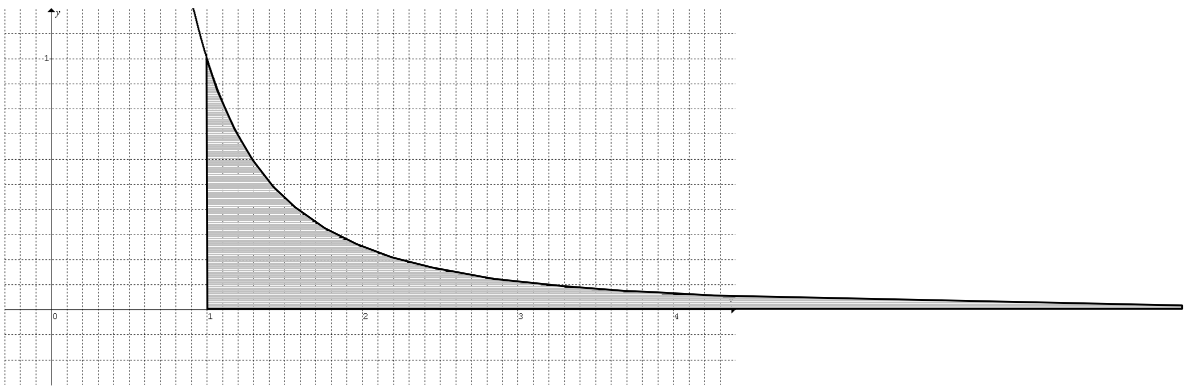
❸ $$\int_{-2}^{k}(-2x+3)\,dx = \left(-x^2+3x\right)\Big|_{-2}^{k} = -k^2+3k+10 = -8$$
$$\Rightarrow\quad -k^2+3k+18=0 \quad\Rightarrow\quad (k-6)(k+3)=0 \qquad\Rightarrow\qquad k=-3 \quad\text{ou}\quad k=6$$

❹ 1. La résolution : $\int_{-2}^{2}\frac{-1}{x^2}dx = \int_{-2}^{2}-x^{-2}\,dx = x^{-1}\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{x}\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{-2} = 1$ est fausse, car la fonction $y=\frac{-1}{x^2}$ s'annule en $x=0$. Elle n'est donc pas continue et le théorème fondamental ne s'applique pas.
Cette intégrale n'est pas définie !

2. La résolution : $\int_{1}^{3}-\frac{2x-1}{\left(x^2-x-2\right)^2}dx = \left(x^2-x-2\right)^{-1}\Big|_{1}^{3} = \ldots$ est fausse, car la fonction à intégrer s'annule en $x=2$ qui se trouve dans l'intervalle [1 ; 3]. Elle n'est donc pas continue et le théorème fondamental ne s'applique pas. Cette intégrale n'est pas définie !

3. La fonction à intégrer tend vers l'infini lorsque x tend vers 0, et elle n'est pas continue en 0.
Malgré cela, l'intégration sans réfléchir donne un résultat qui a un sens.
$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \frac{3}{2}\cdot x^{\frac{2}{3}}\Big|_0^8 = \frac{3}{2}\cdot 8^{\frac{2}{3}} - 0 = 6$ est un résultat correct.

4. Malgré que la borne supérieure ne soit pas un nombre, cette intégrale peut se faire sans difficultés particulières : $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{\infty}-\left(-\frac{1}{1}\right) = 1$. L'interprétation géométrique est jolie :
le périmètre de la surface est infinie, mais l'aire de la surface est finie et d'aire égale à 1 !



5. $\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{x}\Big|_1^{\infty} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\infty}-\frac{1}{2} = \infty$. Cette fois-ci, l'aire est infinie

6. $\int_0^{\infty}\sin(x)\,dx$ Cette intégrale n'a pas une valeur définie, car la fonction sinus oscille périodiquement. L'aire "sous la courbe" oscille aussi en fonction de la borne supérieure de l'intégrale.

❺ Problèmes

1.a Non, les débits sont toujours des fonctions positives $f(t) \geq 0$ et $g(t) \geq 0$ pour tout t.

1.b La quantité d'eau entrée dans le lac entre les temps t_0 et t_1 égale $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\, dt$.

1.c La quantité d'eau sortie dans le lac entre les temps t_0 et t_1 égale $\int_{t_0}^{t_1} g(t)\, dt$.

1.d La variation d'eau dans le lac entre les temps t_0 et t_1 égale $\int_{t_0}^{t_1} \left(f(t) - g(t)\right) dt$.

1.e La variation totale d'eau dans le lac entre les temps $t_0 = 0$ jours et $t_1 = 30$ jours égale

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(f(t)-g(t)\right) dt = \int_0^{30} \left(10 - \frac{1}{2}t - 2\cdot\sin(2\pi t)\right) dt = \left(10\cdot t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{\pi}\cdot\cos(2\pi t)\right)\Bigg|_0^{30} = 75 \text{ méga litres.}$$

---

2. Après 2 heures, la consommation totale de carburant sera de : $\int_0^2 \left(4 - \frac{2}{1+t}\right) dt =$

$$4t + 2\cdot\ln(1+t)\Big|_0^2 = 8 + 2\cdot\ln(3) - (0+\ln(1)) \cong 10{,}197 \text{ litres.}$$

---

3. 1 année ≈ 52 semaines.

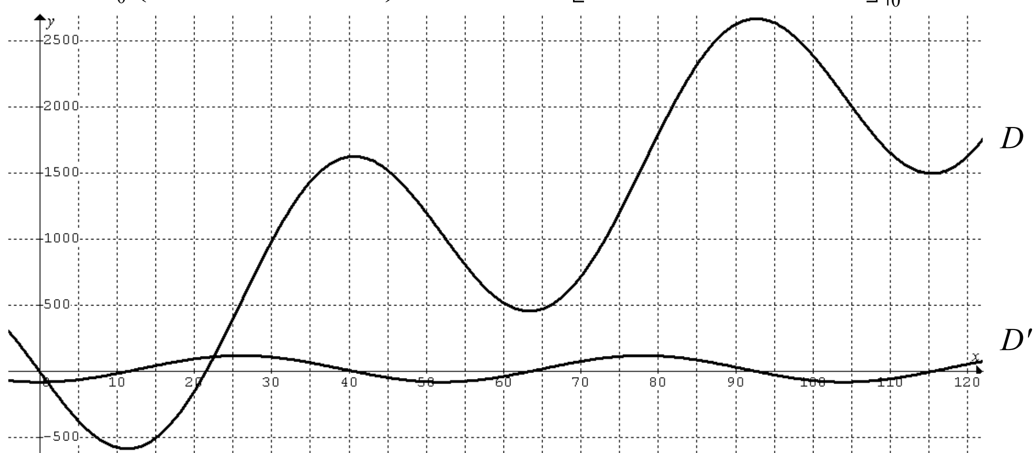
a) Bénéfice de la société sur 52 semaines = revenu sur 52 semaines − dépenses sur 52 semaines =

$$\int_0^{52} \left(100'000\cdot\left(1{,}1 - \cos\left(\frac{\pi t}{26}\right)\right) - 90'000\right) dt = \int_0^{52} \left(20'000 - 100'000\cdot\cos\left(\frac{\pi t}{26}\right)\right) dt$$

$$= \left(20'000t - \frac{2600'000}{\pi}\cdot\sin\left(\frac{\pi t}{26}\right)\right)\Bigg|_0^{52} = 1'040'000 \text{ CHF}$$

b) Pour les calculs des **avoirs** notons : $D(x)$ = " Argent en milliers de CHF disponible à l'instant x ".

$$D(x) = \int_0^x \left(20 - 100\cdot\cos\left(\frac{\pi t}{26}\right)\right) dt = D(x) = \left[20t - \frac{2'600}{\pi}\cdot\sin\left(\frac{\pi t}{26}\right)\right]\Bigg|_0^x = 20x - \frac{2'600}{\pi}\cdot\sin\left(\frac{\pi t}{26}\right)$$



c) Cette somme $D(x)$ est maximale lorsque $D'(x) = 0$: $D'(x) = 20 - 100\cdot\cos\left(\frac{\pi t}{26}\right)$.

$$D'(x) = 20 - 100\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{26}\right) = 0 \iff \cos\left(\frac{\pi x}{26}\right) = 0{,}2 \iff \frac{\pi x}{26} = \cos^{-1}(0{,}2) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \iff$$

$$\frac{\pi x}{26} \approx \pm 1{,}37\,[rad] + 2k\pi \iff x \approx \left(\pm 1{,}37\,[rad] + 2k\pi\right)\cdot\frac{26}{\pi} \iff x \approx \pm 11{,}34 + 52\cdot k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Le maximum est obtenu pour $x \approx -11{,}34 + 52 \approx 40{,}66$. Cela se confirme sur le graphique.
La trésorerie est maximale durant le 41ème semaine.

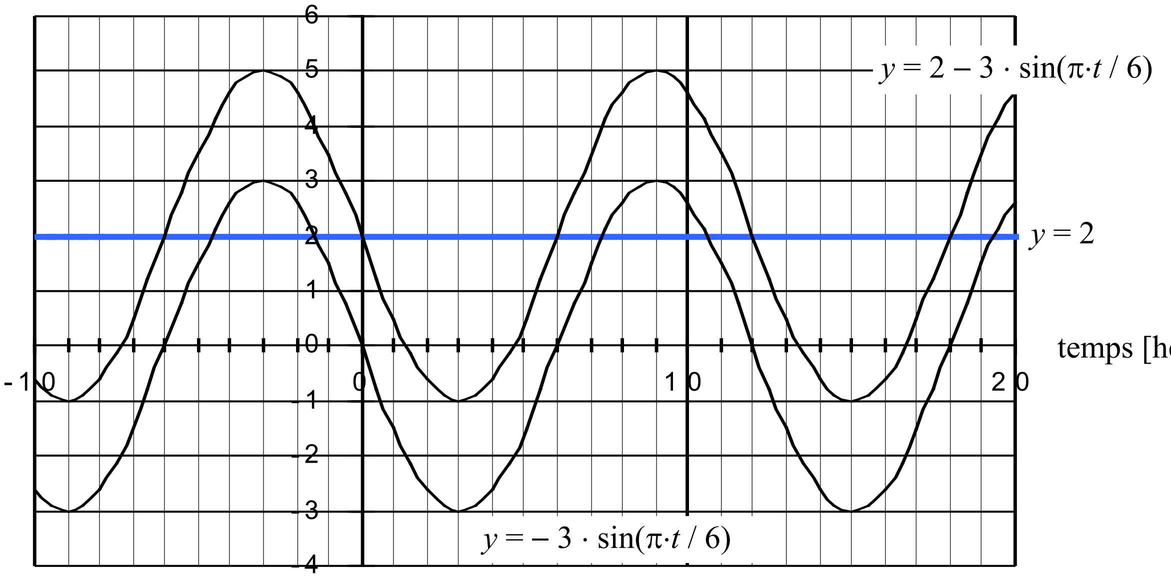
4. a) La position du paquet est définie par :

$$D(T) = \int_0^T \left(2 - 3\cdot\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right) dt = \left(2t + \frac{18}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right)\Bigg|_0^T =$$

$$D(T) = 2T + \frac{18}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi T}{6}\right) - \left[2\cdot 0 + \frac{18}{\pi}\cdot\cos(0)\right] \approx 2\cdot T + 5,730\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot T}{6}\right) - 5,730$$

b) Après 4 heures, la position est : $D(4) \approx 2\cdot 4 + 5,730\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot 4}{6}\right) - 5,730 = -0,594$ milles.

Les douaniers doivent rechercher le paquet à environ 0,6 milles en amont de l'estuaire.
Ils doivent donc remonter la rivière de 0,6 milles relativement à l'endroit de la fouille du bateau.



Position du paquet en fonction du temps.