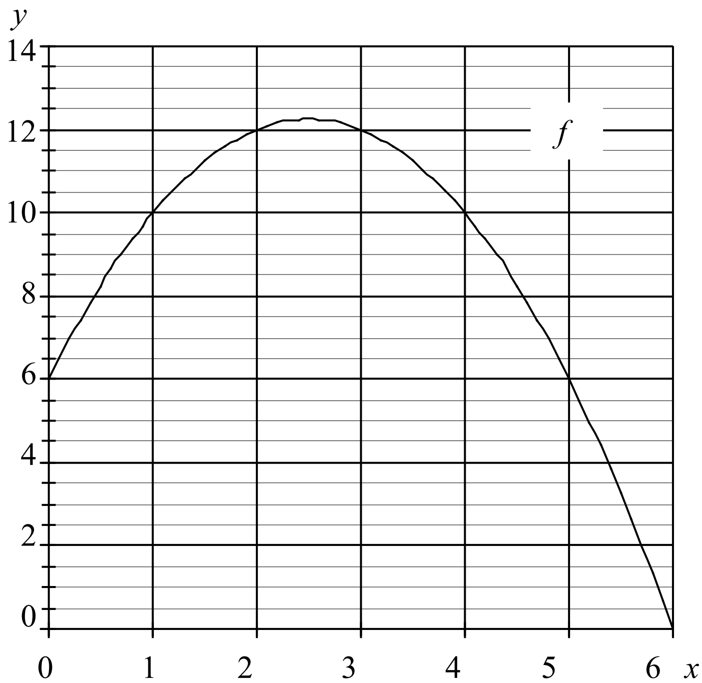
❶ a) $f:[0\,;6]\to\mathbb{R}$

$x \mapsto -x^2+5x+6$



Calcul du minorant et du majorant sur chaque intervalle :

intervalle	$\underline{x_i}$	minorant : $f\left(\underline{x_i}\right)$	$\overline{x_i}$	majorant : $f\left(\overline{x_i}\right)$
[0 ; 1]	0	6	1	10
[1 ; 2]	1	10	2	12
[2 ; 3]	2 ou 3	12	2,5	12,25
[3 ; 4]	4	10	3	12
[4 ; 5]	5	6	4	10
[5 ; 6]	6	0	5	6

Δx = la longueur de l'intervalle [0 ; 6] divisé par 6 = 1.

Somme minorante $A_m = \sum_{i=1}^{6} f\left(\underline{x_i}\right)\cdot\Delta x$ = (6 + 10 + 12 + 10 + 6 + 0) · 1 = 44.

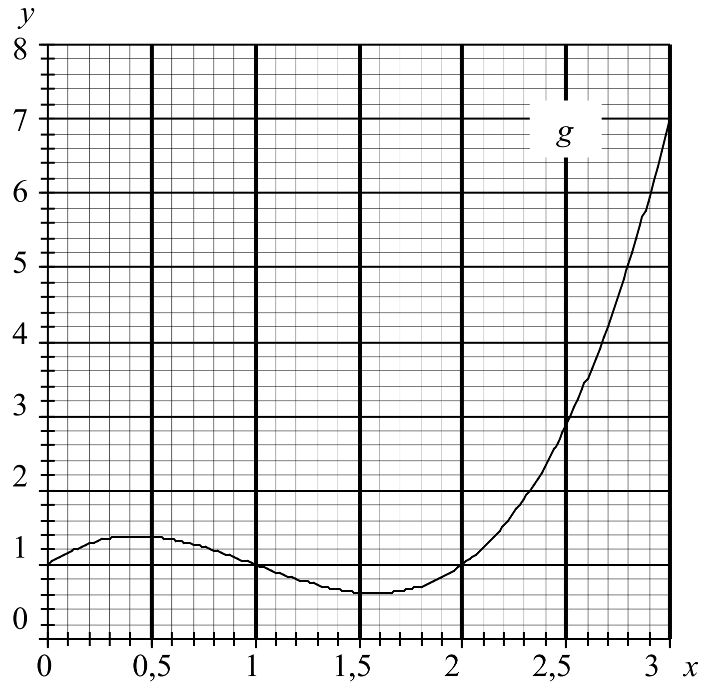
Somme majorante $A_M = \sum_{i=1}^{6} f\left(\overline{x_i}\right)\cdot\Delta x$ = (10 + 12 + 12,25 + 12 + 10 + 6) · 1 = 62,25.

<u>Conclusion :</u> L'aire entre l'axe des abscisses, la courbe et les verticales $x=0$ et $x=6$ est comprise entre 44 et 62,25. C'est un résultat assez grossier, qui peut être affiner en subdivisant l'intervalle [0 ; 6] en des intervalles de longueurs plus petites.

Vous pourrez bientôt montrer que l'aire égale : $-\frac{6^3}{3}+5\cdot\frac{6^2}{2}+6\cdot 6=54$

❶ b) $g : [0\,;3] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x + 1$



Calcul du minorant et du majorant sur chaque intervalle :

intervalle	$\underline{x_i}$	minorant : $f\left(\underline{x_i}\right)$	$\overline{x_i}$	majorant : $f\left(\overline{x_i}\right)$
[0,0 ; 0,5]	0	1	≈ 0,4	≈1,384
[0,5 ; 1,0]	1	1	0,5	1,375
[1,0 ; 1,5]	1,5	0,625	1	1
[1,5 ; 2,0]	≈ 1,6	≈0,616	2	1
[2,0 ; 2,5]	2	1	2,5	2,875
[2,5 ; 3,0]	2,5	2,875	3	7

Δx = la longueur de l'intervalle [0 ; 3] divisé par 6 = 0,5.

Somme minorante $A_m = \sum_{i=1}^{6} f\left(\underline{x_i}\right) \cdot \Delta x \approx (1 + 1 + 0{,}625 + 0{,}616 + 1 + 2{,}875) \cdot 0{,}5 = 3{,}558 \approx \underline{3{,}6}$.

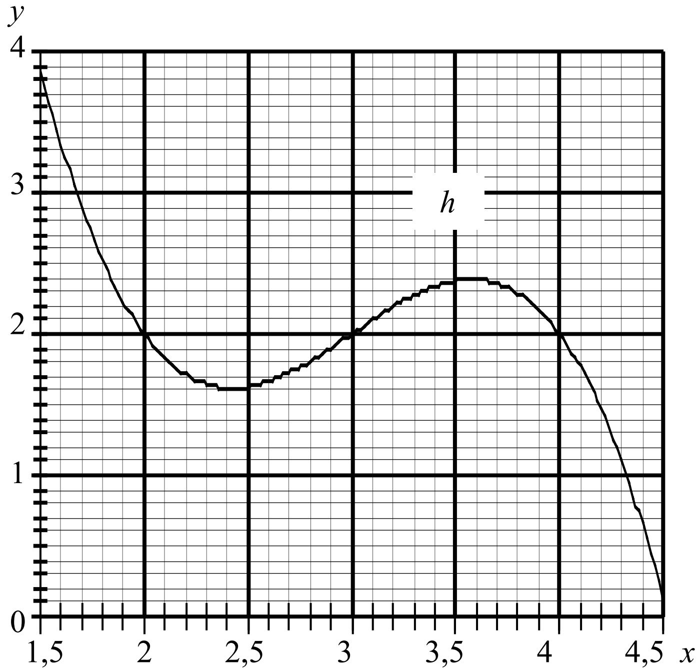
Somme majorante $A_M = \sum_{i=1}^{6} f\left(\overline{x_i}\right) \cdot \Delta x \approx (1{,}384 + 1{,}375 + 1 + 1 + 2{,}875 + 7) \cdot 0{,}5 = 7{,}317 \approx \underline{7{,}3}$.

Conclusion : L'aire entre l'axe des abscisses, la courbe et les verticales $x = 0$ et $x = 3$ est comprise entre 3,6 et 7,3. C'est un résultat assez grossier, qui peut être affiner en subdivisant l'intervalle [0 ; 3] en des intervalles de longueurs plus petites.

Vous pourrez bientôt montrer que l'aire égale : $\frac{3^4}{4} - 3 \cdot \frac{3^3}{3} + 2 \cdot \frac{3^2}{2} + 3 = 5{,}25$

❶ c) $h : [1,5 \,;\, 4,5] \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto -x^3 + 9x^2 - 26x + 26$



Calcul du minorant et du majorant sur chaque intervalle :

intervalle	$\underline{x_i}$	minorant : $f\left(\underline{x_i}\right)$	$\overline{x_i}$	majorant : $f\left(\overline{x_i}\right)$
[1,5 ; 2,0]	2	2	1,5	3,875
[2,0 ; 2,5]	≈2,43	≈1,615	2	2
[2,5 ; 3,0]	2,5	1,625	3	2
[3,0 ; 3,5]	3	2	3,5	2,375
[3,5 ; 4,0]	4	2	≈3,6	≈2,384
[4,0 ; 4,5]	4,5	0,125	4	2

Δx = la longueur de l'intervalle [1,5 ; 4,5] divisé par 6 = 0,5.

Somme minorante $A_m = \sum_{i=1}^{6} f\left(\underline{x_i}\right) \cdot \Delta x \approx (2 + 1,615 + 1,625 + 2 + 2 + 0,125) \cdot 0,5 = 4,6825 \approx \underline{4,7}$.

Somme majorante $A_M = \sum_{i=1}^{6} f\left(\overline{x_i}\right) \cdot \Delta x \approx (3,875 + 2 + 2 + 2,375 + 2,384 + 2) \cdot 0,5 = 7,317 \approx \underline{7,3}$.

<u>Conclusion :</u> L'aire entre l'axe des abscisses, la courbe et les verticales $x = 1,5$ et $x = 4,5$ est comprise entre 4,7 et 7,3. C'est un résultat assez grossier, qui peut être affiner en subdivisant l'intervalle [1,5 ; 4,5] en des intervalles de longueurs plus petites.

Vous pourrez bientôt montrer que l'aire égale :

$$-\frac{4,5^4}{4} + 9 \cdot \frac{4,5^3}{3} - 26 \cdot \frac{4,5^2}{2} + 26 \cdot 4,5 - \left(-\frac{1,5^4}{4} + 9 \cdot \frac{1,5^3}{3} - 26 \cdot \frac{1,5^2}{2} + 26 \cdot 1,5 \right) = 6$$

❷ <u>Cas où $a = 0$.</u>

Le but de cet exercice est de se rendre compte que l'aire limitée par la courbe de $f(x) = x^2 + x$ est égale à l'aire limitée par la courbe de $f_1(x) = x$ plus l'aire limitée par la courbe de $f_2(x) = x^2$.

Notons A l'aire limitée par la courbe de $f(x) = x^2 + x$, l'axe Ox, et les verticales $x = a$ et $x = b$.
Notons A_1 l'aire limitée par la courbe de $f_1(x) = x$, l'axe Ox, et les verticales $x = a$ et $x = b$.
Notons A_2 l'aire limitée par la courbe de $f_2(x) = x^2$, l'axe Ox, et les verticales $x = a$ et $x = b$.

$$A = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot\Delta x = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^2 + x_i\right)\cdot\Delta x = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^2\cdot\Delta x + x_i\cdot\Delta x\right) =$$

$$A = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\cdot\Delta x + \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} x_i\cdot\Delta x = A_2 + A_1$$

Nous avons vu dans les activités du cours que $A_1 = \frac{1}{2}\cdot b^2$ et que $A_2 = \frac{1}{3}\cdot b^3$.

En conséquence, $A = \frac{1}{3}\cdot b^3 + \frac{1}{2}\cdot b^2$.

Remarquez que l'aire entre les courbes de $f(x) = x^2 + x$ et de $f_2(x) = x^2$ est égale à l'aire entre la courbe de $f_1(x) = x$ et l'axe des abscisses Ox. A première vue, ce n'est pas évident !