

❶ Calculez les sommes suivantes :

a)

$$\sum_{i=1}^5 0,1 \cdot i^2 =$$

$$0,1 \cdot 1 + 0,1 \cdot 4 + 0,1 \cdot 9 + 0,1 \cdot 16 + 0,1 \cdot 25 = 5,5$$

c)

$$\sum_{i=K-2}^{K+1} \frac{1}{i} = \frac{1}{K-2} + \frac{1}{K-1} + \frac{1}{K} + \frac{1}{K+1} = \dots = \frac{4K^3 - 6K^2 - 2K + 2}{(K-2) \cdot (K-1) \cdot K \cdot (K+1)}$$

b)

$$\sum_{i=3}^6 \frac{1}{i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20}$$

d)

$$\sum_{j=\lambda}^{\lambda+2} (j-3)^2 = (\lambda-3)^2 + (\lambda+1-3)^2 + (\lambda+2-3)^2 = (\lambda-3)^2 + (\lambda-2)^2 + (\lambda-1)^2 = \dots = 3\lambda^2 - 12\lambda + 14$$

❷ $S_3 = 6$; $S_4 = 10$; $S_5 = 15$ et $S_{10} = 55$

On demande maintenant de calculer S_N pour une valeur quelconque de $N \in \mathbb{N}$.

Astuce : $S_N = 1 + 2 + 3 + \dots + (N-2) + (N-1) + N$ **N termes !**

Par commutativité : $S_N = N + (N-1) + (N-2) + \dots + 3 + 2 + 1$

Addition terme à terme : $2 \cdot S_N = (N+1) + (N+1) + (N+1) + \dots + (N+1) + (N+1) + (N+1)$

D'où :
$$S_N = \frac{N \cdot (N+1)}{2}$$

Vérifiez que vous retrouvez $S_3 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$; $S_4 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$; $S_5 = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ et $S_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$ OK !

❸ Montrez que $S_{2,N} = \sum_{i=1}^N i^2 = \frac{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{6}$ pour n'importe quelle valeur de $N \in \mathbb{N}$

L'égalité suivante se vérifie facilement :

N	$N-1$	$N-2$	\dots	3	2	1	N	N	\dots	N	N	N	1	2	3	\dots	$N-1$	N	$2N+1$	$2N+1$	\dots	$2N+1$	$2N+1$	$2N+1$
N	$N-1$	$N-2$	\dots	3	2		$N-1$	$N-1$	\dots	$N-1$	$N-1$		2	3	\dots	$N-1$	N	$2N+1$	$2N+1$	\dots	$2N+1$	$2N+1$		
N	$N-1$	$N-2$	\dots	3			$+ N-2$	$N-2$	$N-2$				$+ 3$	\dots	$N-1$	N		$= 2N+1$	$2N+1$	\dots	$2N+1$			
\dots							\dots						\dots					\dots						
N	$N-1$						2	2					$N-1$	N				$2N+1$	$2N+1$					
N							1						N					$2N+1$						

Chacun des trois blocs triangulaires du membre de gauche correspond à la somme cherché $S_{2,N}$.

Le membre de droite vaut $(2N+1) \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + N)$, qui vaut $(2N+1) \cdot \frac{N \cdot (N+1)}{2}$.

L'égalité entre les deux membres permet d'exprimer simplement la somme cherchée en fonction de N .

Donc $3 \cdot S_{2,N} = \frac{(2N+1) \cdot N \cdot (N+1)}{2}$.

On a donc montré l'égalité désirée $S_{2,N} = \frac{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{6}$.

④ En utilisant les formules établies dans les exercices 2 et 3, calculez les sommes suivantes :

$$a) \sum_{i=1}^{100} i = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5'050$$

$$b) \sum_{i=1}^{K-3} i = \frac{(K-3) \cdot (K-3+1)}{2} = \frac{(K-3) \cdot (K-2)}{2}$$

$$c) \sum_{i=1}^{100} i^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = 338'350$$

$$d) \sum_{i=1}^{5K+3} i^2 = \frac{(5K+3) \cdot (5K+3+1) \cdot (10K+6+1)}{6} \\ = \frac{(5K+3) \cdot (5K+4) \cdot (5K+7)}{6}$$

⑤ En appliquant la définition relative au symbole Σ et les propriétés des nombres réels, démontrez les trois propriétés suivantes (très utiles en statistiques) : $(N \in \mathbb{N})$

$$\sum_{i=1}^N (x_i + y_i) = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \dots + x_N + y_N = x_1 + x_2 + \dots + x_N + y_1 + y_2 + \dots + y_N = \sum_{i=1}^N x_i + \sum_{i=1}^N y_i$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda \cdot x_i = \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 + \dots + \lambda \cdot x_N = \lambda \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_N) = \lambda \cdot \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\sum_{i=1}^N k = \underset{1^{er}}{k} + \underset{2^{ème}}{k} + \dots + \underset{N^{ème}}{k} = k \cdot N$$

$$⑥ \tilde{S}_N = \sum_{i=1}^N \frac{i}{N^2} = \frac{1}{N^2} \cdot [1 + 2 + 3 + \dots + (N-2) + (N-1) + N]$$

$$\tilde{S}_N = \frac{1}{N^2} \cdot \frac{N \cdot (N+1)}{2} = \frac{N \cdot (N+1)}{2 \cdot N^2} = \frac{N+1}{2N}$$

$$\tilde{\tilde{S}}_N = \sum_{i=1}^N \frac{i^2}{N^3} = \frac{1}{N^3} \cdot [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (N-2)^2 + (N-1)^2 + N^2],$$

$$\tilde{\tilde{S}}_N = \frac{1}{N^3} \cdot \frac{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{6} = \frac{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{6N^3} = \frac{(N+1) \cdot (2N+1)}{6N^2}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{S}_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{2N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N \cdot \left(1 + \frac{1}{N}\right)}{2N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{N}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\tilde{S}}_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(N+1) \cdot (2N+1)}{6N^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N^2 + 3N + 1}{6N^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^2 \cdot \left(2 + \frac{3}{N} + \frac{1}{N^2}\right)}{6 \cdot N^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{N} + \frac{1}{N^2}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$