❶ Calculez les sommes suivantes :

a)

$$\sum_{i=1}^{5} 0{,}1 \cdot i^2 =$$

$$0{,}1\cdot 1 + 0{,}1\cdot 4 + 0{,}1\cdot 9 + 0{,}1\cdot 16 + 0{,}1\cdot 25 = 5{,}5$$

b)

$$\sum_{i=3}^{6} \frac{1}{i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20}$$

c)

$$\sum_{i=K-2}^{K+1} \frac{1}{i} = \frac{1}{K-2} + \frac{1}{K-1} + \frac{1}{K} + \frac{1}{K+1} = \ldots =$$

$$\frac{4K^3 - 6K^2 - 2K + 2}{(K-2)\cdot(K-1)\cdot K\cdot(K+1)}$$

d)

$$\sum_{j=\lambda}^{\lambda+2} (j-3)^2 = (\lambda-3)^2 + (\lambda+1-3)^2 + (\lambda+2-3)^2 =$$

$$(\lambda-3)^2 + (\lambda-2)^2 + (\lambda-1)^2 = \ldots = 3\lambda^2 - 12\lambda + 14$$

---

❷ $S_3 = 6$; $S_4 = 10$; $S_5 = 15$ et $S_{10} = 55$

On demande maintenant de calculer S_N pour une valeur quelconque de $N \in \mathbb{N}$.

Astuce : $S_N = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (N-2) + (N-1) + N$ ***N* termes !**

Par commutativité : $S_N = N + (N-1) + (N-2) + \ldots\ldots + 3 + 2 + 1$

Addition terme à terme : $2 \cdot S_N = (N+1) + (N+1) + (N+1) + \ldots + (N+1) + (N+1) + (N+1)$

D'où : $$S_N = \frac{N\cdot(N+1)}{2}$$

Vérifiez que vous retrouvez $S_3 = \frac{3.4}{2}$; $S_4 = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$; $S_5 = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$ et $S_{10} = \frac{10\cdot 11}{2} = 55$ OK !

---

❸ Montrez que $S_{2,N} = \sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N\cdot(N+1)\cdot(2N+1)}{6}$ pour n'importe quelle valeur de $N \in \mathbb{N}$

L'égalité suivante se vérifie facilement :

$$\begin{array}{l} N\ \ N-1\ \ N-2\ \ldots\ 3\ \ 2\ \ 1 \\ N\ \ N-1\ \ N-2\ \ldots\ 3\ \ 2 \\ N\ \ N-1\ \ N-2\ \ldots\ 3 \\ \ldots \\ N\ \ N-1 \\ N \end{array}
+
\begin{array}{l} N\ \ N\ \ldots\ N\ \ N\ \ N \\ N-1\ \ N-1\ \ldots\ N-1\ \ N-1 \\ N-2\ \ N-2\ \ N-2 \\ \ldots \\ 2\ \ 2 \\ 1 \end{array}
+
\begin{array}{l} 1\ \ 2\ \ 3\ \ldots\ N-1\ \ N \\ 2\ \ 3\ \ldots\ N-1\ \ N \\ 3\ \ldots\ N-1\ \ N \\ \ldots \\ N-1\ \ N \\ N \end{array}
=
\begin{array}{l} 2N+1\ \ 2N+1\ \ldots\ldots\ 2N+1\ \ 2N+1\ \ 2N+1 \\ 2N+1\ \ 2N+1\ \ldots\ldots\ 2N+1\ \ 2N+1 \\ 2N+1\ \ 2N+1\ \ldots\ldots\ 2N+1 \\ \ldots \\ 2N+1\ \ 2N+1 \\ 2N+1 \end{array}$$

Chacun des trois bloques triangulaires du membre de gauche correspond à la somme cherché $S_{2,N}$.

Le membre de droite vaut $(2N+1)\cdot(1+2+3+\ldots+N)$, qui vaut $(2N+1)\cdot\frac{N\cdot(N+1)}{2}$.

L'égalité entre les deux membres permet d'exprimer simplement la somme cherchée en fonction de N.

Donc $3\cdot S_{2,N} = \frac{(2N+1)\cdot N\cdot(N+1)}{2}$.

On a donc montré l'égalité désirée $S_{2,N} = \frac{N\cdot(N+1)\cdot(2N+1)}{6}$.

❹ <u>En utilisant les formules</u> établies dans les exercices ❷ et ❸, calculez les sommes suivantes :

a) $\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5'050$

b) $\sum_{i=1}^{K-3} i = \frac{(K-3)\cdot(K-3+1)}{2} = \frac{(K-3)\cdot(K-2)}{2}$

c) $\sum_{i=1}^{100} i^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = 338'350$

d) $\sum_{i=1}^{5K+3} i^2 = \frac{(5K+3)\cdot(5K+3+1)\cdot(10K+6+1)}{6}$
$= \frac{(5K+3)\cdot(5K+4)\cdot(5K+7)}{6}$

---

❺ $\tilde{S}_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{i}{N^2} = \frac{1}{N^2}\cdot\left[1+2+3+\ldots+(N-2)+(N-1)+N\right]$

$\tilde{S}_N = \frac{1}{N^2}\cdot\frac{N\cdot(N+1)}{2} = \frac{N\cdot(N+1)}{2\cdot N^2} = \frac{N+1}{2N}$

$\tilde{\tilde{S}}_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{i^2}{N^3} = \frac{1}{N^3}\cdot\left[1^2+2^2+3^2+\ldots+(N-2)^2+(N-1)^2+N^2\right]$,

$\tilde{\tilde{S}}_N = \frac{1}{N^3}\cdot\frac{N\cdot(N+1)\cdot(2N+1)}{6} = \frac{N\cdot(N+1)\cdot(2N+1)}{6N^3} = \frac{(N+1)\cdot(2N+1)}{6N^2}$

$$\lim_{N\to\infty} \tilde{S}_N = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N} = \lim_{N\to\infty} \frac{N\cdot\left(1+\frac{1}{N}\right)}{2N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1+\frac{1}{N}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{N\to\infty} \tilde{\tilde{S}}_N = \lim_{N\to\infty} \frac{(N+1)\cdot(2N+1)}{6N^2} = \lim_{N\to\infty} \frac{2N^2+3N+1}{6N^2} = \lim_{N\to\infty} \frac{N^2\cdot\left(2+\frac{3}{N}+\frac{1}{N^2}\right)}{6\cdot N^2} = \lim_{N\to\infty} \frac{2+\frac{3}{N}+\frac{1}{N^2}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

---

❻ En appliquant la définition relative au symbole $\sum$ et les propriétés des nombres réels, démontrez les trois propriétés suivantes (très utiles en statistiques) : ($N \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i+y_i) = x_1+y_1+x_2+y_2+\ldots+x_N+y_N = x_1+x_2+\ldots+x_N + y_1+y_2+\ldots+y_N = \sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda\cdot x_i = \lambda\cdot x_1+\lambda\cdot x_2+\ldots+\lambda\cdot x_N = \lambda\cdot(x_1+x_2+\ldots+x_N) = \lambda\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} k = \underbrace{k}_{1^{er}} + \underbrace{k}_{2^{ème}} + \ldots + \underbrace{k}_{N^{ème}} = k\cdot N$$