Le symbole $\sum$ pour noter des sommes. Référez-vous à la page 5 du cours !

❶ Calculez les sommes suivantes :

a) $\sum_{i=1}^{5} 0{,}1\cdot i^2$ b) $\sum_{i=3}^{6} \frac{1}{i}$ c) $\sum_{i=K-2}^{K+1} \frac{1}{i}$ d) $\sum_{j=\lambda}^{\lambda+2} (j-3)^2$

---

❷ Soit la somme $S_N = \sum_{i=1}^{N} i = 1+2+3+.....+(N-2)+(N-1)+N$.

Calculez : S_3 ; S_4 ; S_5 et S_{10}

On demande maintenant de calculer S_N pour une valeur quelconque de $N \in \mathbb{N}$.

Astuce : $S_N = 1 + 2 + 3 +.....+(N-2)+(N-1)+N$

Par commutativité : $S_N = N+(N-1)+(N-2)+.....+ 3 + 2 + 1$

En additionnant les deux nombres de chaque colonne, on obtient toujours $N+1$, donc la somme des nombres des deux lignes s'obtient facilement.

---

❸ Montrez que $S_{2,N} = \sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N\cdot(N+1)\cdot(2N+1)}{6}$ pour n'importe quelle valeur de $N \in \mathbb{N}$.

Plusieurs manières sont possibles, par exemple aidez-vous de *l'astuce décrite à la page suivante*.

---

❹ En utilisant les formules établies dans les exercices ❷ et ❸ , calculez les sommes suivantes :

a) $\sum_{i=1}^{100} i$ b) $\sum_{i=1}^{K-3} i$ c) $\sum_{i=1}^{100} i^2$ d) $\sum_{i=1}^{5K+3} i^2$

---

❺ Calculez les sommes $\tilde{S}_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{i}{N^2}$ et $\tilde{\tilde{S}}_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{i^2}{N^3}$. $N \in \mathbb{N}$

Déterminez ensuite : $\tilde{L} = \lim_{N\to\infty} \tilde{S}_N$ et $\tilde{\tilde{L}} = \lim_{N\to\infty} \tilde{\tilde{S}}_N$.

---

❻ En appliquant la définition relative au symbole $\sum$ et les propriétés des nombres réels, démontrez les trois propriétés suivantes (très utiles en statistiques) : ($N \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda\cdot x_i = \lambda\cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} k = k\cdot N$$

Une astuce pour l'exercice ❸. Ecriture : $S_N = \sum_{i=1}^{N} i$ et $S_{2,N} = \sum_{i=1}^{N} i^2$

L'exemple sera écrit pour $N = 5$.
Ecrivez ($N+1$) colonnes contenant les nombres de 1 à N, comme ci-dessous.

$$
\begin{array}{cccccccl}
 & 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & & \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & \rightarrow & (\ 1^2 + 1\ )/2 \\
2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \rightarrow & \quad \ldots \qquad \ldots \\
3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & \rightarrow & (\,(N-2)^2 + N-2)\,)/2 \\
4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & \rightarrow & (\,(N-1)^2 + N-1)\,)/2 \\
5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \rightarrow & (N^2 + N)/2
\end{array}
$$

En additionnant en diagonale les nombres de la partie gauche (au-dessus de la ligne oblique), on obtient la somme des carrés de 1 à N.
En additionnant les nombres de la partie droite (au-dessous de la ligne oblique), on obtient les sommes :

$$\frac{1}{2}\cdot\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+N^2\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(1+2+3+\ldots+N\right) \ = \ \frac{1}{2}\cdot S_{2,N}+\frac{1}{2}\cdot S_N .$$

Les deux manières d'additionner les nombres des ($N+1$) colonnes donne :

$$(N+1)\cdot S_N = S_{2,N} + \frac{1}{2}\cdot S_{2,N} + \frac{1}{2}\cdot S_N$$

De cette égalité on en déduit $S_{2,N} = \ldots = \dfrac{N\cdot(N+1)\cdot(2N+1)}{6}$ $\left(=\dfrac{N^3}{3}+\dfrac{N^2}{2}+\dfrac{N}{6}\right)$.

Un intérêt de cette méthode est qu'elle est **généralisable** pour calculer $1^3+2^3+3^3+\ldots+N^3$.

Ecriture : $S_N = \sum_{i=1}^{N} i$; $S_{2,N} = \sum_{i=1}^{N} i^2$ et $S_{3,N} = \sum_{i=1}^{N} i^3$

L'exemple sera écrit pour $N = 5$.
Ecrivez ($N+1$) colonnes contenant les carrés des nombres de 1 à N, comme ci-dessous.

$$
\begin{array}{cccccccl}
 & 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 & & \\
1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 1^2 & \rightarrow & \quad 1^3/3 + \quad 1^2/2 + \quad 1/6 \\
2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 1^2 & 2^2 & \rightarrow & \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\
3^2 & 4^2 & 5^2 & 1^2 & 2^2 & 3^2 & \rightarrow & (N-2)^3/3 + (N-2)^2/2 + (N-2)/6 \\
4^2 & 5^2 & 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \rightarrow & (N-1)^3/3 + (N-1)^2/2 + (N-1)/6 \\
5^2 & 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & \rightarrow & \quad N^3/3 + \quad N^2/2 + \quad N/6
\end{array}
$$

En additionnant en diagonale les nombres de la partie gauche (au-dessus de la ligne oblique), on obtient la somme des cubes de 1 à N.
La somme des nombres sous la diagonale donne : $S_{3,N}/3 + S_{2,N}/2 + S_N/6$
Les deux manières d'additionner les nombres des ($N+1$) colonnes donne :

$$(N+1)\cdot S_{2,N} = S_{3,N} + \frac{1}{3}\cdot S_{3,N} + \frac{1}{2}\cdot S_{2,N} + \frac{1}{6}\cdot S_N$$

De cette égalité on en déduit $S_{3,N} = \ldots = \dfrac{N^4}{4}+\dfrac{N^3}{2}+\dfrac{N^2}{4}$.