Le symbole $\sum$ pour noter des sommes. Référez-vous à la page 5 du cours !

❶ Calculez les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} 0{,}1 \cdot i^2$ b) $\displaystyle\sum_{i=3}^{6} \frac{1}{i}$ c) $\displaystyle\sum_{i=K-2}^{K+1} \frac{1}{i}$ d) $\displaystyle\sum_{j=\lambda}^{\lambda+2} (j-3)^2$

---

❷ Soit la somme $S_N = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} i = 1+2+3+.....+(N-2)+(N-1)+N$.

Calculez : S_3 ; S_4 ; S_5 et S_{10}

On demande maintenant de calculer S_N pour une valeur quelconque de $N \in \mathbb{N}$.

Astuce : $S_N = 1 + 2 + 3 + ... + (N-2) + (N-1) + N$

Par commutativité : $S_N = N + (N-1) + (N-2) + ... + 3 + 2 + 1$

En additionnant les deux nombres de chaque colonne, on obtient toujours $N+1$, donc la somme des nombres des deux lignes s'obtient facilement.

---

❸ Montrez que $S_{2,N} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N\cdot(N+1)\cdot(2N+1)}{6}$ pour n'importe quelle valeur de $N \in \mathbb{N}$.

Voici une astuce ingénieuse pour calculer la somme désirée :

$$\begin{array}{lclclcl}
N\ \ N-1\ \ N-2\ \dots\ 3\ \ 2\ \ 1 & & N\ \ \ N\ \dots\ N\ \ \ N\ \ \ N & & 1\ \ 2\ \ 3\ \dots\ N-1\ \ N & & 2N+1\ \ 2N+1\ .....\ 2N+1\ \ 2N+1\ \ 2N+1 \\
N\ \ N-1\ \ N-2\ \dots\ 3\ \ 2 & & N-1\ \ N-1\ \dots N-1\ \ N-1 & & 2\ \ 3\ \dots\ N-1\ \ N & & 2N+1\ \ 2N+1\ .....\ 2N+1\ \ 2N+1 \\
N\ \ N-1\ \ N-2\ \dots\ 3 & + & N-2\ \ N-2\ \ \ N-2 & + & 3\ \dots\ N-1\ \ N & = & 2N+1\ \ 2N+1\ .....\ 2N+1 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
N\ \ N-1 & & 2\ \ \ 2 & & N-1\ \ N & & 2N+1\ \ 2N+1 \\
N & & 1 & & N & & 2N+1
\end{array}$$

Chacun des trois bloques triangulaires du membre de gauche correspond à la somme cherchée.
Le membre de droite vaut $(2N+1)$ fois une somme vue dans l'exercice 2.
L'égalité entre les deux membres permet d'exprimer simplement la somme cherchée en fonction de N.

---

❹ <u>En utilisant les formules</u> établies dans les exercices ❷ et ❸ , calculez les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} i$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{K-3} i$ c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} i^2$ d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5K+3} i^2$

---

❺ Calculez les sommes $\tilde{S}_N = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{i}{N^2}$ et $\tilde{\tilde{S}}_N = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{i^2}{N^3}$. $N \in \mathbb{N}$

Déterminez ensuite : $\tilde{L} = \lim\limits_{N\to\infty} \tilde{S}_N$ et $\tilde{\tilde{L}} = \lim\limits_{N\to\infty} \tilde{\tilde{S}}_N$.

---

❻ En appliquant la définition relative au symbole $\sum$ et les propriétés des nombres réels, démontrez les trois propriétés suivantes (très utiles en statistiques) : ($N \in \mathbb{N}$)

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} y_i$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \lambda \cdot x_i = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$ c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} k = k \cdot N$