

Le symbole  $\Sigma$  pour noter des sommes. Référez-vous à la page 5 du cours !

❶ Calculez les sommes suivantes :

a)  $\sum_{i=1}^5 0,1 \cdot i^2$

b)  $\sum_{i=3}^6 \frac{1}{i}$

c)  $\sum_{i=K-2}^{K+1} \frac{1}{i}$

d)  $\sum_{j=\lambda}^{\lambda+2} (j-3)^2$

❷ Soit la somme  $S_N = \sum_{i=1}^N i = 1 + 2 + 3 + \dots + (N-2) + (N-1) + N$ .

Calculez :  $S_3$  ;  $S_4$  ;  $S_5$  et  $S_{10}$

On demande maintenant de calculer  $S_N$  pour une valeur quelconque de  $N \in \mathbb{N}$ .

**Astuce :**  $S_N = 1 + 2 + 3 + \dots + (N-2) + (N-1) + N$

Par commutativité :  $S_N = N + (N-1) + (N-2) + \dots + 3 + 2 + 1$

En additionnant les deux nombres de chaque colonne, on obtient toujours  $N + 1$ , donc la somme des nombres des deux lignes s'obtient facilement.

❸ Montrez que  $S_{2,N} = \sum_{i=1}^N i^2 = \frac{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{6}$  pour n'importe quelle valeur de  $N \in \mathbb{N}$ .

Plusieurs manières sont possibles, par exemple aidez-vous de l'astuce décrite à la page suivante.

❹ En utilisant les formules établies dans les exercices ❷ et ❸, calculez les sommes suivantes :

a)  $\sum_{i=1}^{100} i$

b)  $\sum_{i=1}^{K-3} i$

c)  $\sum_{i=1}^{100} i^2$

d)  $\sum_{i=1}^{5K+3} i^2$

❺ Calculez les sommes  $\tilde{S}_N = \sum_{i=1}^N \frac{i}{N^2}$  et  $\tilde{\tilde{S}}_N = \sum_{i=1}^N \frac{i^2}{N^3}$ .  $N \in \mathbb{N}$

Déterminez ensuite :  $\tilde{L} = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{S}_N$  et  $\tilde{\tilde{L}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\tilde{S}}_N$ .

❻ En appliquant la définition relative au symbole  $\Sigma$  et les propriétés des nombres réels, démontrez les trois propriétés suivantes (très utiles en statistiques) :  $(N \in \mathbb{N})$

$$\sum_{i=1}^N (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^N x_i + \sum_{i=1}^N y_i$$

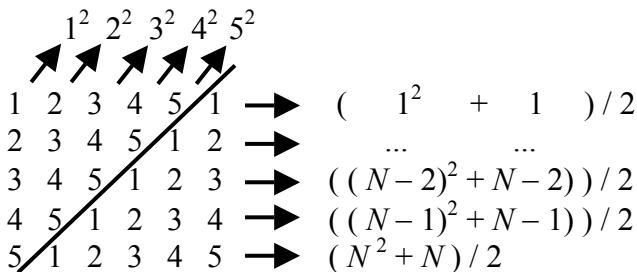
$$\sum_{i=1}^N \lambda \cdot x_i = \lambda \cdot \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\sum_{i=1}^N k = k \cdot N$$

Une astuce pour l'exercice ③. Ecriture :  $S_N = \sum_{i=1}^N i$  et  $S_{2,N} = \sum_{i=1}^N i^2$

L'exemple sera écrit pour  $N = 5$ .

Ecrivez  $(N + 1)$  colonnes contenant les nombres de 1 à  $N$ , comme ci-dessous.



En additionnant en diagonale les nombres de la partie gauche (au-dessus de la ligne oblique), on obtient la somme des carrés de 1 à  $N$ .

En additionnant les nombres de la partie droite (au-dessous de la ligne oblique), on obtient les sommes :

$$\frac{1}{2} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + N^2) + \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + N) = \frac{1}{2} \cdot S_{2,N} + \frac{1}{2} \cdot S_N.$$

Les deux manières d'additionner les nombres des  $(N + 1)$  colonnes donne :

$$(N + 1) \cdot S_N = S_{2,N} + \frac{1}{2} \cdot S_{2,N} + \frac{1}{2} \cdot S_N$$

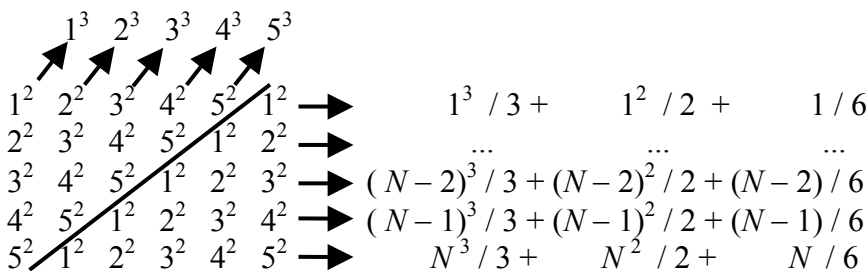
De cette égalité on en déduit  $S_{2,N} = \dots = \frac{N \cdot (N + 1) \cdot (2N + 1)}{6} \left( = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6} \right).$

Un intérêt de cette méthode est qu'elle est **généralisable** pour calculer  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + N^3$ .

Ecriture :  $S_N = \sum_{i=1}^N i$  ;  $S_{2,N} = \sum_{i=1}^N i^2$  et  $S_{3,N} = \sum_{i=1}^N i^3$

L'exemple sera écrit pour  $N = 5$ .

Ecrivez  $(N + 1)$  colonnes contenant les carrés des nombres de 1 à  $N$ , comme ci-dessous.



En additionnant en diagonale les nombres de la partie gauche (au-dessus de la ligne oblique), on obtient la somme des cubes de 1 à  $N$ .

La somme des nombres sous la diagonale donne :  $S_{3,N} / 3 + S_{2,N} / 2 + S_N / 6$

Les deux manières d'additionner les nombres des  $(N + 1)$  colonnes donne :

$$(N + 1) \cdot S_{2,N} = S_{3,N} + \frac{1}{3} \cdot S_{3,N} + \frac{1}{2} \cdot S_{2,N} + \frac{1}{6} \cdot S_N$$

De cette égalité on en déduit  $S_{3,N} = \dots = \frac{N^4}{4} + \frac{N^3}{2} + \frac{N^2}{4}.$