❶ $\vec{a}\bullet\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(60°)=2\cdot 3\cdot 0,5=3$; $\vec{a}\bullet\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(120°)=2\cdot 3\cdot(-0,5)=-3$

---

❷ 2.1 Avec deux vecteurs non nuls, mais perpendiculaires.

2.2 Par exemple :

$\|\vec{a}\|=1$; $\|\vec{b}\|=2$ $\quad \vec{a}\bullet\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(0°)=1\cdot 2\cdot 1=2$ ou $\vec{a}\bullet\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(60°)=4\cdot 1\cdot 0,5=2$

---

❸ 3.1 $\vec{a}\bullet\vec{b}=-3\cdot 7+0\cdot 0+4\cdot(-1)=-25$

3.2 $\|\vec{a}\|=\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}=5$; $\|\vec{b}\|=\sqrt{7^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

En écrivant le PS sous ses deux expressions à l'aide des normes déjà calculées, on obtient :

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\varphi)=5\cdot 5\sqrt{2}\cdot\cos(\varphi)=-25 \quad\Rightarrow \cos(\varphi)=\frac{-25}{25\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad \varphi=135°$$

3.3 $\vec{c}\perp\vec{a}$: $\vec{c}=\langle 4;38;3\rangle$ ou $\vec{c}=\langle 2;\sqrt{7};1,5\rangle$ une infinité de possibilités !

$\vec{d}\perp\vec{b}$: $\vec{d}=\langle 1;\pi;7\rangle$ ou $\vec{d}=\langle 5;e^3;35\rangle$ une infinité de possibilités !

3.4 Soit $\vec{v}=\langle x;y;z\rangle$ le vecteur cherché. On doit avoir **:**

$$\begin{cases}-3x+0y+4z=0 & \vec{v}\perp\vec{a}\\ 7x+0y-z=0 & \vec{v}\perp\vec{b}\end{cases} \quad\text{ou encore}\quad \begin{cases}-3x+4z=0\\ 7x-z=0\end{cases}$$

Ce système admet-il des solutions ?

En tirant z de la première équation : $z=0,75x$ et en injectant dans la 2ème équation :

$7x-0,75x=0 \quad\Rightarrow\quad 6,25x=0 \quad\Rightarrow x=0$; $z=0$

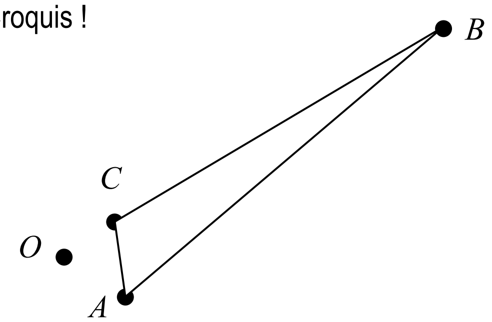
En revanche y peut être choisi arbitrairement puisqu'il ne subit aucune contrainte (mult. par 0).

Un vecteur orthogonal à $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est donc : $\vec{v}=\langle 0;\alpha;0\rangle$ où $\alpha\in\mathbb{R}$.

---

❹

Croquis !



$\overrightarrow{AB}=\langle 1-2;6-2;9-1\rangle=\langle -1;4;8\rangle$

$\overrightarrow{AC}=\langle -1-2;0-2;0-1\rangle=\langle -3;-2;-1\rangle$

$\overrightarrow{BC}=\langle -1-1;0-6;0-9\rangle=\langle -2;-6;-9\rangle$

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-1)^2+(4)^2+(8)^2}=\sqrt{1+16+64}=9$

$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$

$\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2+(-9)^2}=\sqrt{4+36+81}=11$

Exprimons maintenant des produits scalaires sous les deux formes :

$$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=9\cdot\sqrt{14}\cdot\cos\left(\sphericalangle\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=(-1)\cdot(-3)+4\cdot(-2)+8\cdot(-1) \Rightarrow \cos\left(\sphericalangle\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{-13}{9\sqrt{14}} \quad\Rightarrow\left(\sphericalangle\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\approx 113°$$

$$\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=9\cdot 11\cdot\cos\left(\sphericalangle\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=(1)\cdot(-2)+(-4)\cdot(-6)+(-8)\cdot(-9) \Rightarrow \cos\left(\sphericalangle\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=\frac{94}{99} \quad\Rightarrow\left(\sphericalangle\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\approx 18°$$

$$\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{CA}=11\cdot\sqrt{14}\cdot\cos\left(\sphericalangle\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)=(2)\cdot(3)+6\cdot(2)+9\cdot(1) \Rightarrow \cos\left(\sphericalangle\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)=\frac{27}{11\sqrt{14}} \quad\Rightarrow\left(\sphericalangle\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)\approx 49°$$

---

❺ Soit $\vec{a}=\langle a_1;a_2;a_3\rangle$ $\quad \vec{a}\bullet\vec{a}=\langle a_1;a_2;a_3\rangle\bullet\langle a_1;a_2;a_3\rangle=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2=\|\vec{a}\|^2$
