❶ 1.1 $\vec{a}\bullet\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(60°)=2\cdot 3\cdot 0,5=3$

1.2 $\vec{a}\bullet\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(120°)=2\cdot 3\cdot(-0,5)=-3$

---

❷ 2.1 Avec deux vecteurs non nuls, mais perpendiculaires.

2.2 Par exemple :

$\|\vec{a}\|=1$; $\|\vec{b}\|=2$ $\quad \vec{a}\bullet\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(0°)=1\cdot 2\cdot 1=2$ ou $\vec{a}\bullet\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(60°)=4\cdot 1\cdot 0,5=2$

---

❸ 3.1 $\vec{a}\bullet\vec{b}=-3\cdot 7+0\cdot 0+4\cdot(-1)=-25$

3.2 $\|\vec{a}\|=\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}=5$; $\|\vec{b}\|=\sqrt{7^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

En écrivant le PS sous ses deux expressions à l'aide des normes déjà calculées, on obtient :

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\varphi)=5\cdot 5\sqrt{2}\cdot\cos(\varphi)=-25 \quad\Rightarrow \cos(\varphi)=\frac{-25}{25\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad \varphi=135°$$

3.3 $\vec{c}\perp\vec{a}$: $\vec{c}=\langle 4\,;38\,;3\rangle$ ou $\vec{c}=\langle 2\,;\sqrt{7}\,;1,5\rangle$ une infinité de possibilités !

$\vec{d}\perp\vec{b}$: $\vec{d}=\langle 1\,;\pi\,;7\rangle$ ou $\vec{d}=\langle 5\,;e^3\,;35\rangle$ une infinité de possibilités !

3.4 Soit $\vec{v}=\langle x\,;y\,;z\rangle$ le vecteur cherché. On doit avoir **:**

$$\begin{cases}-3x+0y+4z=0 & \vec{v}\perp\vec{a}\\ 7x+0y-z=0 & \vec{v}\perp\vec{b}\end{cases} \quad\text{ou encore}\quad \begin{cases}-3x+4z=0\\ 7x-z=0\end{cases}$$

Ce système admet-il des solutions ?

En tirant z de la première équation : $z=0,75x$ et en injectant dans la 2ème équation :

$7x-0,75x=0 \quad\Rightarrow\quad 6,25x=0 \quad\Rightarrow x=0 \quad ; \quad z=0$

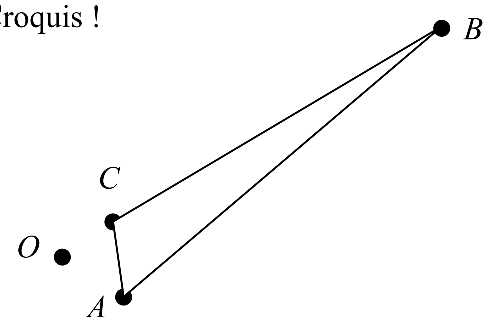
En revanche y peut être choisi arbitrairement puisqu'il ne subit aucune contrainte (mult. par 0).

Un vecteur orthogonal à $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est donc : $\vec{v}=\langle 0\,;\alpha\,;0\rangle$ où $\alpha\in\mathbb{R}$.

---

❹

Croquis !



$\overrightarrow{AB}=\langle 1-2;6-2;9-1\rangle=\langle -1;4;8\rangle$

$\overrightarrow{AC}=\langle -1-2;0-2;0-1\rangle=\langle -3;-2;-1\rangle$

$\overrightarrow{BC}=\langle -1-1;0-6;0-9\rangle=\langle -2;-6;-9\rangle$

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-1)^2+(4)^2+(8)^2}=\sqrt{1+16+64}=9$

$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$

$\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2+(-9)^2}=\sqrt{4+36+81}=11$

Exprimons maintenant des produits scalaires sous les deux formes :

$$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=9\cdot\sqrt{14}\cdot\cos\left(\sphericalangle\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=(-1)\cdot(-3)+4\cdot(-2)+8\cdot(-1) \Rightarrow \cos\left(\sphericalangle\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{-13}{9\sqrt{14}} \Rightarrow\left(\sphericalangle\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\approx 113°$$

$$\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=9\cdot 11\cdot\cos\left(\sphericalangle\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=(1)\cdot(-2)+(-4)\cdot(-6)+(-8)\cdot(-9) \Rightarrow \cos\left(\sphericalangle\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=\frac{94}{99} \Rightarrow\left(\sphericalangle\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\approx 18°$$

$$\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{CA}=11\cdot\sqrt{14}\cdot\cos\left(\sphericalangle\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)=(2)\cdot(3)+6\cdot(2)+9\cdot(1) \Rightarrow \cos\left(\sphericalangle\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)=\frac{27}{11\sqrt{14}} \Rightarrow\left(\sphericalangle\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)\approx 49°$$

---

❺ Soit $\vec{a}=\langle a_1;a_2;a_3\rangle$ $\qquad \vec{a}\bullet\vec{a}=\langle a_1;a_2;a_3\rangle\bullet\langle a_1;a_2;a_3\rangle=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2=\|\vec{a}\|^2$

---

❻ Donnée : $A = O = \langle 0\,;0\,;0\rangle$; $\overrightarrow{AB}=\langle 1\,;0\,;0\rangle$; $\overrightarrow{AD}=\langle 0\,;1\,;0\rangle$; $\overrightarrow{AE}=\langle 0\,;0\,;1\rangle$.

6.1 $A=\langle 0\,;0\,;0\rangle$; $B=\langle 1\,;0\,;0\rangle$; $C=\langle 1\,;1\,;0\rangle$; $D=\langle 0\,;1\,;0\rangle$;
$E=\langle 0\,;0\,;1\rangle$; $F=\langle 1\,;0\,;1\rangle$; $G=\langle 1\,;1\,;1\rangle$; $H=\langle 0\,;1\,;1\rangle$.

6.2 $\overrightarrow{AG}=\langle 1\,;1\,;1\rangle$; $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OE}=\langle 1\,;0\,;-1\rangle$; $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE}=\langle 0\,;1\,;-1\rangle$.

6.3 Calculons les produits scalaires :
$\overrightarrow{AG}\bullet\overrightarrow{EB}=1\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot(-1)=0$, ce qui montre que $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{EB}$.
$\overrightarrow{AG}\bullet\overrightarrow{ED}=0\cdot 1+1\cdot 1+(-1)\cdot 1=0$, ce qui montre que $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{ED}$.

6.4 Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonale à deux vecteurs qui déterminent le triangle BED, donc il est orthogonale à la surface du triangle BED.

---

❼ On donne les points $A=\langle 3\,;4\,;12\rangle$ et $B=\langle -3\,;-4\,;-12\rangle$. $C=<x\,;y\,;z>$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}=\langle x-3\,;y-4\,;z-12\rangle$ et $\overrightarrow{BC}=\langle x+3\,;y+4\,;z+12\rangle$ sont donc perpendiculaires, donc

$\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BC}=0 \;\Leftrightarrow\; (x-3)\cdot(x+3)+(y-4)\cdot(y+4)+(z-12)\cdot(z+12)=0 \;\Leftrightarrow$

$x^2-9+y^2-16+z^2-144=0 \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2+z^2=9+16+144=169 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{x^2+y^2+z^2=13^2}}$.

Les points C dont les coordonnées satisfont cette équation sont donc tous à une distance 13 de l'origine. La figure engendrée par l'ensemble des points C satisfaisant la condition demandée est une sphère centrée à l'origine, de rayon 13.

---

❽ On donne les points $A=\langle 4\,;6\,;17\rangle$ et $B=\langle -2\,;-2\,;-7\rangle$. $C=<x\,;y\,;z>$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}=\langle x-4\,;y-6\,;z-17\rangle$ et $\overrightarrow{BC}=\langle x+2\,;y+2\,;z+7\rangle$ sont donc perpendiculaires, donc

$\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BC}=0 \;\Leftrightarrow\; (x-4)\cdot(x+2)+(y-6)\cdot(y+2)+(z-17)\cdot(z+7)=0 \;\Leftrightarrow$

$x^2-2x-8+y^2-4y-12+z^2-10z-119=0 \;\Leftrightarrow$

$\underline{x^2-2x+1}-9+\underline{y^2-4y+2^2}-16+\underline{z^2-10z+25}-144=0 \;\Leftrightarrow$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=169 \;\Leftrightarrow\; (x-1)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=13^2$

On peut aussi écrire cela sous la forme : $\left\|\langle x\,;y\,;z\rangle-\langle 1\,;2\,;5\rangle\right\|=13$

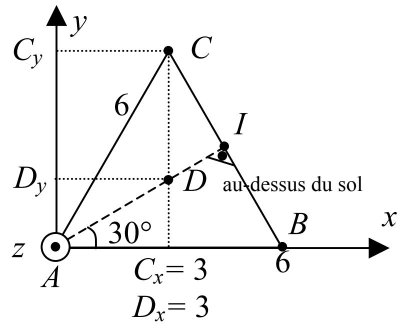
Les points C dont les coordonnées satisfont cette équation sont donc tous à une distance 13 du point $P=\langle 1\,;2\,;5\rangle$, donc la figure engendrée par l'ensemble des points C satisfaisant la condition demandée est une sphère centrée au point $P=\langle 1\,;2\,;5\rangle$, de rayon 13.

Le point P est au milieu du segment [AB]. $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\dfrac{\langle 4\,;6\,;17\rangle+\langle -2\,;-2\,;-7\rangle}{2}=\langle 1\,;2\,;5\rangle$.

On peut aussi remarquer que les points A et B sont ceux de l'exercice 7, décalé de $\langle 1\,;2\,;5\rangle$, donc il est normal que l'on trouve une sphère de même rayon, mais ce centre décalé de $\langle 1\,;2\,;5\rangle$.

---

❾ Remarquez que $A = O$, donc $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX}$, pour tout point X.
Un croquis peut aider !



9.1 L'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est de 60°, car le triangle ABC est équilatéral.
Beaucoup d'autres angles sont aussi de 60°, car chaque face est un triangle équilatéral.

9.2 Le point C se trouve dans le plan, donc sa troisième coordonnée est nulle.
La longueur d'une arête vaut 6, donc $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 6$.

$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = 3^2 + c_y^2 = 36$, donc $c_y^2 = 27$, donc $c_y = \sqrt{27} = 3 \cdot \sqrt{3}$. Donc $\vec{C} = \left\langle 3\,;\, 3\cdot\sqrt{3}\,;\, 0 \right\rangle$

9.3 $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 = 6^2$; $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \cdot \cos(60°) = 6 \cdot 6 \cdot 0,5 = 18$. De même $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AD} = 18$

9.4 Notons $\vec{D} = \left\langle d_x\,;\, d_y\,;\, d_z \right\rangle$

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = \left\langle 6\,;\,0\,;\,0 \right\rangle \bullet \left\langle d_x\,;\, d_y\,;\, d_z \right\rangle = 6 \cdot d_x + 0 = 18$, donc $d_x = 3$

$\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AD} = \left\langle 3\,;\, 3\cdot\sqrt{3}\,;\, 0 \right\rangle \bullet \left\langle 3\,;\, d_y\,;\, d_z \right\rangle = 3 \cdot 3 + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot d_y + 0 = 18$, donc $d_y = \sqrt{3}$

$\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 = \left\|\left\langle 3\,;\, \sqrt{3}\,;\, d_z \right\rangle\right\|^2 = 3^2 + 3 + d_z^2 = 36$, donc $d_z = 2 \cdot \sqrt{6}$

Conclusion : $\vec{D} = \left\langle 3\,;\, \sqrt{3}\,;\, 2\cdot\sqrt{6} \right\rangle$

9.5 $\overrightarrow{OI} = \dfrac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} = \left\langle \dfrac{6+3}{2}\,;\, \dfrac{0 + 3\cdot\sqrt{3}}{2}\,;\, 0 \right\rangle = \left\langle 4,5\,;\, 1,5\cdot\sqrt{3}\,;\, 0 \right\rangle$

9.6 Notons φ l'angle entre $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{AI} \bullet \overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AI}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = \frac{\left\langle 4,5\,;\, 1,5\cdot\sqrt{3}\,;\, 0 \right\rangle \bullet \left\langle 3\,;\, \sqrt{3}\,;\, 2\cdot\sqrt{6} \right\rangle}{\sqrt{4,5^2 + 1,5^2 \cdot 3}\ \cdot\ 6} = \frac{13,5 + 4,5}{\sqrt{27} \cdot 6} = \frac{18}{\sqrt{27} \cdot 6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\varphi = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54,7356°$, cela parait raisonnable, comparé au 60° entre les arrêtes !