1.1 $\overrightarrow{AG}=(1;1;1)$ $\overrightarrow{BE}=(-1;0;1)$ $\overrightarrow{ED}=(0;1;-1)$ $\overrightarrow{DB}=(1;-1;0)$

1.2 Composantes du vecteur $\overrightarrow{AG}=(1;1;1)$.

Calculons les produits scalaires :

$\overrightarrow{AG}\bullet\overrightarrow{BE}=-1\cdot1+0\cdot1+1\cdot1=0$ $\overrightarrow{AG}\bullet\overrightarrow{ED}=0\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot1=0$ $\overrightarrow{AG}\bullet\overrightarrow{DB}=1\cdot1+(-1)\cdot1+0\cdot1=0$

Donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonale à ces trois vecteurs qui déterminent un triangle (dans un plan), auquel le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est également orthogonale

---

2. On donne les points $A=(3\,;4\,;12)$ et $B=(-3\,;-4\,;-12)$. $C=(x\,;y\,;z)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CA}=(3-x\,;4-y\,;12-z)$ et $\overrightarrow{CB}=(-3-x\,;-4-y\,;-12-z)$ sont donc perpendiculaires,

donc $\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow (3-x)\cdot(-3-x)+(4-y)\cdot(-4-y)+(12-z)\cdot(-12-z)=0 \Leftrightarrow$

$-9+x^2-16+y^2-144+z^2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=9+16+144=169=13^2$

Le point C peut se trouver en n'importe quel point d'une sphère centrée à l'origine, de rayon 13.

---

3. On donne les points $A(5;22;0)$ et $B(1;0;10)$. $C=(x\,;y\,;z)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CA}=(5-x\,;22-y\,;0-z)$ et $\overrightarrow{CB}=(1-x\,;0-y\,;10-z)$ sont donc perpendiculaires, donc

$\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow (5-x)\cdot(1-x)+(22-y)\cdot(0-y)+(0-z)\cdot(10-z)=0 \Leftrightarrow$

$5+x^2-6x-22y+y^2-10z+z^2=0 \Leftrightarrow$

$5+\underline{x^2-6x+9}-9+\underline{y^2-22y+121}-121+\underline{z^2-10z+25}-25=0 \Leftrightarrow$

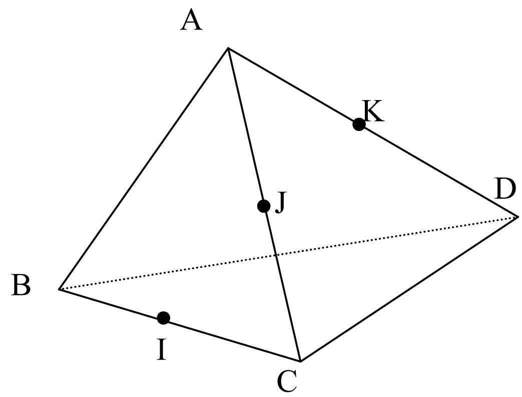
$(x-3)^2+(y-11)^2+(z-5)^2=-5+9+121+25 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-11)^2+(z-5)^2=150=\left(5\sqrt{6}\right)^2$

Le point C peut se trouver en n'importe quel point d'une sphère dont le centre est le point $(3\,;11\,;5)$ = milieu de $[AB]$ et de rayon $R=\frac{1}{2}\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(1-5)^2+(0-22)^2+(10-0)^2}=\frac{\sqrt{600}}{2}=\frac{10\cdot\sqrt{6}}{2}=5\cdot\sqrt{6}$

4.

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier de côté "a"
(Les quatre faces sont des triangles équilatéraux).

Soit I, J et K les milieux respectifs des arêtes [BC] ; [AC] et [AD].



4.1 Calculez les produits scalaires
$\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AI}\bullet\overrightarrow{BC}$,
$\overrightarrow{IK}\bullet\overrightarrow{AD}$ ***(utilisez*** $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JK}$ et
$\overrightarrow{BK}\bullet\overrightarrow{CD}$ ***(utilisez*** $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CK}$ ***)***

4.2 Afin de déterminer la valeur de l'ange $\widehat{ADI}$, calculez de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{DI}$.

(vérifiez que $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)$

et utilisez cette égalité…)

La correction est en page suivante.

4.1 $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC} = -\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cdot\cos(\widehat{BAC}) = -a\cdot a\cdot\cos(60°) = -a^2\cdot\frac{1}{2} = -\frac{a^2}{2}$

$$\overrightarrow{AI}\bullet\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\right)\bullet\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2} = 0$$

Préparation pour le calcul de $\overrightarrow{IK}\bullet\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CD}$$ Donc :

$$\overrightarrow{IK}\bullet\overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JK}\right)\bullet\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\bullet\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{DC}\right)\bullet\left(-\overrightarrow{DA}\right) =$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\cdot\cos(\widehat{BAD})+\frac{1}{2}\cdot\left\|\overrightarrow{DC}\right\|\bullet\left\|\overrightarrow{DA}\right\|\cos(\widehat{CDA}) = -\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2 = 0 \Rightarrow IK\perp AD$$

Autre raisonnement :

$[AI]$ est la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a, donc $\left\|\overrightarrow{AI}\right\| = \frac{\sqrt{3}\cdot a}{2}$, de même $\left\|\overrightarrow{DI}\right\| = \frac{\sqrt{3}\cdot a}{2}$,

Donc le triangle AID est isocèle en I et sa médiane **IK est aussi perpendiculaire au côté AD.**

$$\overrightarrow{BK}\bullet\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CK}\right)\bullet\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CK}\bullet\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CK}\bullet\overrightarrow{CD} =$$

$$-\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\cdot\cos(\widehat{BCD})+\left\|\overrightarrow{CK}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\cdot\cos(\widehat{KCD}) = -a^2\cdot\cos(60°)+\frac{\sqrt{3}\cdot a}{2}a\cdot\cos(30°) =$$

$$-\frac{a^2}{2}+\frac{\sqrt{3}\cdot a}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{a^2}{2}+\frac{3\cdot a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

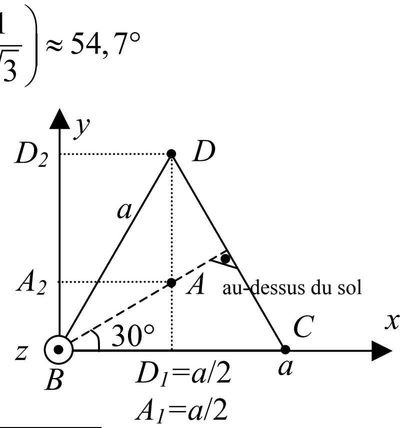
4.2 $\overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{DI} = \left\|\overrightarrow{DA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{DI}\right\|\cdot\cos(\widehat{ADI}) = a\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot a}{2}\cdot\cos(\widehat{ADI}) = \frac{\sqrt{3}\cdot a^2}{2}\cdot\cos(\widehat{ADI})$

D'autre part :

$$\overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA}\bullet\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{DA}\bullet\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{DC} =$$

$$\frac{a^2}{2}\cdot\cos(\widehat{ADB})+\frac{a^2}{2}\cdot\cos(\widehat{ADC}) = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

Donc : $\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(\widehat{ADI}) = \frac{a^2}{2} \quad\Rightarrow\quad \cos(\widehat{ADI}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad\Rightarrow\quad \widehat{ADI} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\approx 54,7°$



Une autre manière de résoudre cet exercice est d'utiliser des coordonnées :

$B = (0\ ;0\ ;0)$ On a fixé l'origine.

$C = (a\ ;0\ ;0)$ On a fixé l'axe X.

$D = (a/2\ ;D_2\ ;0)$. $\left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2 = a^2 = \frac{a^2}{4}+D_2^2$ donc $\boxed{D_2 = \frac{\sqrt{3}\cdot a}{2}}$

$A = (a/2\ ;A_2\ ;A_3)$. $\boxed{A_2 = \frac{a}{2}\cdot\tan(30°) = \frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}\cdot a}{6}}$

$\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 = a^2 = \frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{36}+A_3^2 = \frac{3a^2}{12}+\frac{a^2}{12}+A_3^2 = \frac{4a^2}{12}+A_3^2 = \frac{a^2}{3}+A_3^2$ donc $\boxed{A_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot a}$

Maintenant, tous les produits scalaires sont "simples" à calculer.

Exemple : $\overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{DI} = \left(a/2-a/2\ ;\sqrt{3}\cdot a/6-\sqrt{3}\cdot a/2\ ;\sqrt{2/3}\cdot a-0\right)\bullet\left(a/2-a/2\ ;\sqrt{3}\cdot a/2\ ;0\right) =$

$\overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{DI} = \left(0\ ;\sqrt{3}\cdot a/3\ ;\sqrt{2/3}\cdot a\right)\bullet\left(0\ ;\sqrt{3}\cdot a/2\ ;0\right) = \sqrt{3}\cdot a/3\cdot\sqrt{3}\cdot a/2 = a^2/2$