❶ **Par calcul direct :**

a) $f'(x)=15x^2-4x$

b) $f'(x)=2x\cdot\sqrt{1-x}+x^2\cdot\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}=2x\cdot\sqrt{1-x}-\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-x}}$

c) $f'(x)=3\sin^2(x)\cdot\cos(x)$

d) $f'(x)=\cos\left(x^3\right)\cdot 3x^2$

e) $f'(x)=6x\cdot(4-\cos(3x))+3x^2\cdot(-\sin(3x)\cdot 3)=6x\cdot(4-\cos(3x))-9x^2\cdot\sin(3x)$

f) $f'(x)=-\dfrac{2}{(2x+1)^2}$

g) $f'(x)=-\sin\left(3x^2-5x+4\right)\cdot(6x-5)$

h) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-4}}\cdot 2x-27x^2=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}-27x^2$

i) $f'(x)=4\cos(4x)\cdot\cos(3x)+\sin(4x)\cdot(-3\sin(3x))=4\cos(4x)\cdot\cos(3x)-3\sin(4x)\cdot\sin(3x)$

j) $f'(x)=\dfrac{1\cdot(x-1)^2+(x+2)\cdot 2\cdot(x-1)}{3\cdot\left(\sqrt[3]{(x+2)\cdot(x-1)^2}\right)^2}=\dfrac{(x-1)\cdot[x-1+2x+4]}{3\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^4}}=\dfrac{(x+1)}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\cdot\sqrt[3]{(x-1)}}$

k) $f'(x)=\dfrac{1\cdot(x-1)\cdot(x+3)-(x+2)\cdot[1\cdot(x+3)+(x-1)\cdot 1]}{(x-1)^2\cdot(x+3)^2}=-\dfrac{x^2+4x+7}{(x-1)^2\cdot(x+3)^2}$

l) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$

m) $f'(x)=4x\cdot e^{5x}+2x^2\cdot 5e^{5x}=e^{5x}\cdot\left(4x+10x^2\right)$

n) $f'(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

o) $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{1+x^2}\cdot\dfrac{2x\cdot\left(x^2-1\right)-\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)\cdot\left(x^2-1\right)}$

p) $f'(x)=\dfrac{\left(e^x+e^{-x}\right)\cdot\left(e^x+e^{-x}\right)-\left(e^x-e^{-x}\right)\cdot\left(e^x-e^{-x}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\dfrac{\left(e^{2x}+2+e^{-2x}\right)-\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\dfrac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$

❷ **On considère la parabole d'équation $f(x)=5x-x^2$.**

a) Selon l'équation de la sécante : $S(x)=f(a)+\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot(x-a)$.

On connaît : $a=1$ et $a+h=3,5$ on en déduit : $h=2,5$, $f(a)=4$ et $f(a+h)=5,25$.

Ainsi on obtient : $S(x) = 4 + \frac{5{,}25-4}{2{,}5}(x-1) = 4 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{x+7}{2}$

b) Selon l'équation de la tangente : $T_a(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$.

On a $f(2) = 6$ et $f(3) = 6$.

On calcule : $f'(a) = 5 - 2a$ on en déduit : $f'(2) = 1$ et $f'(3) = -1$.

Ainsi on obtient : $T_2(x) = 6 + 1\cdot(x-2) = x+4$ $T_3(x) = 6 - 1\cdot(x-3) = -x+9$.

c) La droite normale est perpendiculaire à la tangente.

Sa pente en $a = 4$ sera donc égale à $m = -\frac{1}{f'(4)} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$.

De plus, la normale passe par le point $\langle 4; f(4)\rangle = \langle 4;4\rangle$.

Ainsi on obtient : $N_4(x) = 4 + \frac{1}{3}\cdot(x-4) = \frac{x+8}{3}$

❸ **On considère la parabole d'équation $y = x^2 - 3x + 5$.**

a) $T_a(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$ et $f'(a) = 2a - 3$, ce qui entraîne : $f'(2) = 1$.

Ainsi on obtient : $T_2(x) = 3 + 1\cdot(x-2) = x+1$.

b) La normale en $a = 2$ est de pente -1 ; l'angle formé vaut donc 45°.

❹ **On considère la courbe d'équation $y = x^7$.**

La sécante passant par les deux points $\langle 0;0\rangle$ et $\langle t;t^7\rangle$ a pour pente $m = \frac{t^7 - 0}{t - 0} = t^6$.

Il faut déterminer le(s) point(s) a tel(s) que $f'(a) = t^6$.

Or $f'(a) = 7a^6$, ce qui entraîne : $7a^6 = t^6 \Leftrightarrow a = \pm\frac{t}{\sqrt[6]{7}}$ il existe donc 2 solutions…

❺ **On considère la courbe d'équation $f(x) = x - x^3$, ainsi que la droite $g(x) = -3x$.**

a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x - x^3 = -3x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) = 0$
Ces courbes ont 3 intersections, en $A = \langle -2;\ 6\rangle$, $B = \langle 0;0\rangle$ et $C = \langle +2;\ -6\rangle$.

b) Il faut calculer l'angle entre les tangentes aux deux courbes, aux points *A*, *B* et *C*.

On a : $f'(a) = 1 - 3a^2$ et $g'(a) = -3$ de plus : $\alpha_a = \left|\arctan(f'(a)) - \arctan(g'(a))\right|$.

Ainsi :

$$\alpha_A = \left|\arctan(-11) - \arctan(-3)\right| \cong 13{,}24°$$
$$\alpha_B = \left|\arctan(1) - \arctan(-3)\right| \cong 116{,}56°$$
$$\alpha_C = \left|\arctan(-11) - \arctan(-3)\right| \cong 13{,}24°$$