❶ a) $f'(x) = 7 \cdot 5 \cdot x^4 = 35 \cdot x^4$

b) $f(x) = x^{1/2} + x^{-1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2 \cdot x^{1/2}} - \frac{1}{2 \cdot x^{3/2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3}}$

c) $f'(x) = 15 \cdot x^2 - 4 \cdot x$

d) $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

e) $f'(x) = \frac{\sin'(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$

$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

f) $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, selon l'exercice e)

g) $f'(x) = \sin'(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \cos'(x) = \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) =$

$= \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$

h) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin'(2x) \cdot (2x)' = \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \cdot 2) = \cos(2x)$

Les dérivées en g) et h) sont les mêmes, car $\sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$.

i) $f'(x) = 3 \cdot \sin^2(x) \cdot \sin'(x) = 3 \cdot \sin^2(x) \cdot \cos(x)$

j) $f'(x) = \sin'(x^3) \cdot (x^3)' = \cos(x^3) \cdot 3x^2 = 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x^3)$

k) $f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot \left(1-x^2\right)' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot \left(-2x\right) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

l) $f'(x) = 2x \cdot \sqrt{1-x^2} + x^2 \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 2x \cdot \sqrt{1-x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x \cdot (1-x^2) - x^3}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= \frac{2x - 2x^3 - x^3}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x - 3x^3}{\sqrt{1-x^2}}$

m) $f'(x) = \frac{-1}{\left(3x^4 - \pi \cdot x\right)^2} \cdot \left(3x^4 - \pi \cdot x\right)' = \frac{-1}{\left(3x^4 - \pi \cdot x\right)^2} \cdot \left(12x^3 - \pi\right) = -\frac{12x^3 - \pi}{\left(3x^4 - \pi \cdot x\right)^2}$

n) $f'(x) = -\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = -\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \cdot \left(\frac{-1}{2 \cdot \sqrt{(x^2+1)^3}}\right) \cdot (x^2+1)' =$

$= \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(x^2+1)^3}} \cdot 2x = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

o) $f'(x) = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{1-\cos^2(x)}}\cdot(1-\cos^2(x))' = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{1-\cos^2(x)}}\cdot(-2\cdot\cos(x)\cdot\cos'(x)) =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}\cdot(-\cos(x))\cdot(-\sin(x)) = \dfrac{\cos(x)\cdot\sin(x)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} = \dfrac{\cos(x)\cdot\sin(x)}{|\sin(x)|} = \cos(x)\cdot \mathit{signe}(x)$

Plus simple est de voir que $f(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)} = \sqrt{\sin^2(x)} = |\sin(x)|$

Ensuite il faut considérer les deux cas. Celui où $\sin(x) \geq 0$ et celui où $\sin(x) < 0$.

p) $f'(x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\sin'(x) + 2\cdot\cos(x)\cdot\cos'(x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) + 2\cdot\cos(x)\cdot(-\sin(x)) = 0$

Plus simple est de voir que : $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, donc la dérivée de f est nulle.

q) $f'(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}\cdot\left((x+3)^2\right)' = \dfrac{1}{(x+3)^2}\cdot\left(2\cdot(x+3)\right) = \dfrac{2}{x+3}$

Plus simple est de voir que : $f(x) = \ln((x+3)^2) = 2\cdot\ln(x+3) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{x+3}\cdot(x+3)' = \dfrac{2}{x+3}$

r) $f'(x) = e^{7x^2-5x}\cdot(7x^2-5x)' = e^{7x^2-5x}\cdot(14x-5)$

s) $f'(x) = 1\cdot(\ln(x)-1) + x\cdot\dfrac{1}{x} = \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x)$

t) $f'(x) = e^x - (-e^{-x}) = e^x + e^{-x}$

u) $f'(x) = \dfrac{-1}{(\ln(x))^2}\cdot\ln'(x) = \dfrac{-1}{\ln^2(x)}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{-1}{x\cdot\ln^2(x)}$

v) $f'(x) = \dfrac{(e^x+e^{-x})\cdot(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})\cdot(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

---

❷ $f(x) = 5x - x^2 \qquad f'(x) = 5 - 2x$.

a) $S_{1;5}(x)$ est une droite donc son équation est du type $S_{1;5}(x) = mx + n$

La pente de $S_{1;5}(x)$ est $\dfrac{f(5)-f(1)}{5-1} = \dfrac{(25-25)-(5-1)}{5-1} = -1$ et pour trouver l'ordonnée à l'origine utilisons le point connu $\langle 1; f(1)\rangle = \langle 1; 4\rangle$ qui lui appartient : $4 = (-1)\cdot 1 + n \Rightarrow n = 5$

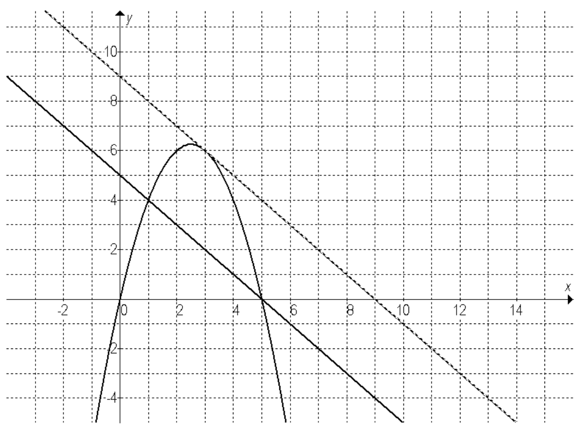
Donc $S_{1;5}(x) = -x + 5$

b)

$T_3(x) = f(3) + f'(3)\cdot(x-3) =$
$6 - 1\cdot(x-3) = -x + 9$

c)

Les droites représentant $S_{1;5}(x)$ et $T_3(x)$ sont parallèles, car elle ont la même pente qui vaut -1.



❸ $f(x) = x^3 - x + 2$.

$T_a(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) = a^3 - a + 2 + (3a^2-1)\cdot(x-a)$

La question revient à chercher a, tel que $T_a(2) = 0$.

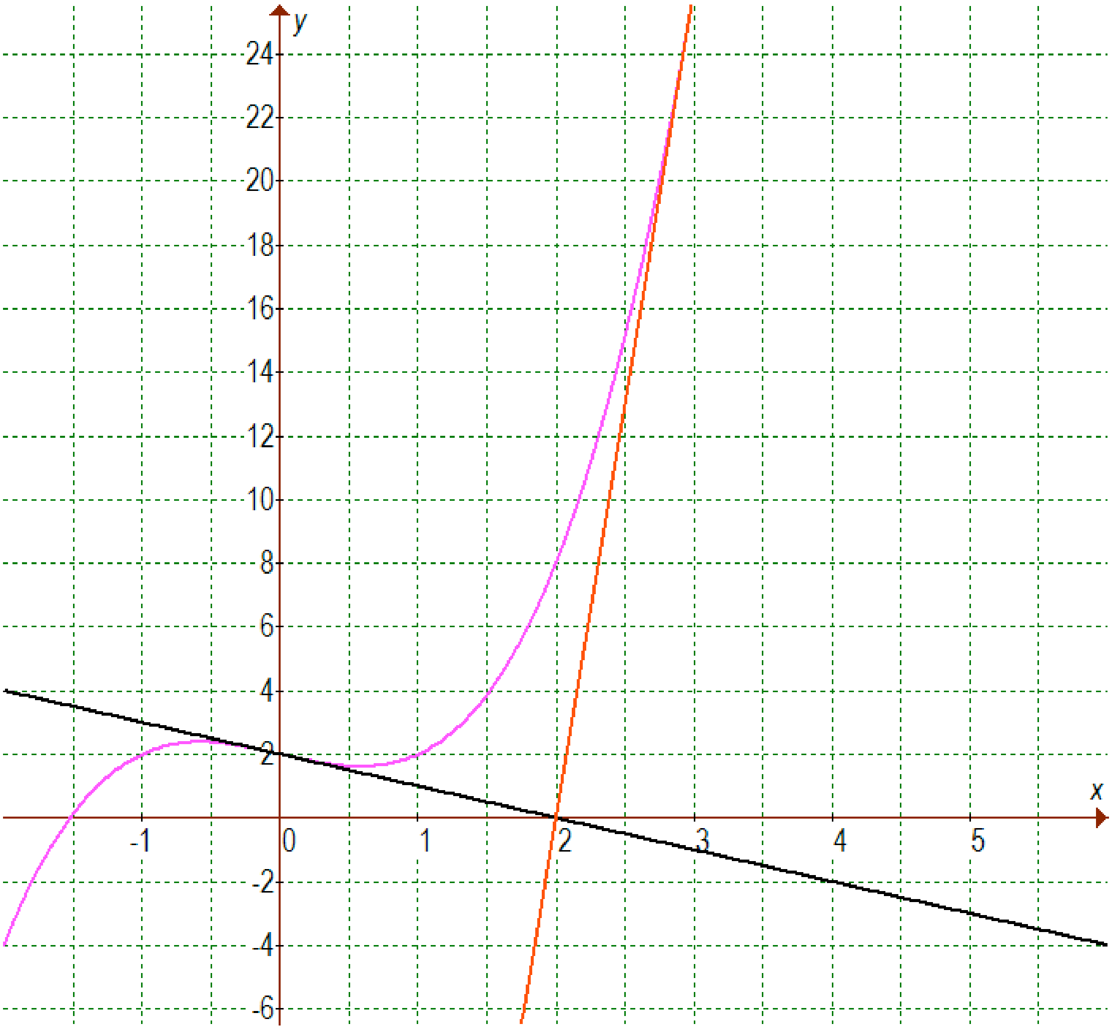
Ceci mène à l'équation : $a^3 - a + 2 + (3a^2-1)\cdot(2-a) = 0$, donc

$a^3 - a + 2 + 6a^2 - 3a^3 - 2 + a = 0$

$-2a^3 + 6a^2 = 0$

$-2a^2\cdot(a-3) = 0$, Donc $a = 0$ ou $a = 3$.

En $(0\,;\,2)$ et $(3\,;\,26)$ la tangente à la fonction f croise l'axe des abscisses au point $(2\,;\,0)$.



❹ a) f(1) se lit sur le graphique et vaut environ 0,75. Son signe est donc positif.
La tangente à f au point d'abscisse $x = 1$ a clairement une pente négative. Par définition, cette pente est égale à $f'(1)$, donc le signe de $f'(1)$ est négatif.

b) i) Sur le graphique, on cherche les points de croisement entre la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses, pour obtenir l'ensemble des solutions de : $f(x) = 0$, qui est : S = {−5 ; −2 ; 2 }.

ii) Sur le graphique, on cherche les points de la courbe de f qui possèdent une tangente horizontale, pour obtenir l'ensemble des solutions de : $f'(x) = 0$, qui est : S = {−4 ; 0 ; 4 }

c) i) Sur le graphique, on cherche les points de la courbe de la fonction f qui se trouvent en-dessous de l'axe des abscisses, pour obtenir l'ensemble des solutions de : $f(x) \leq 0$, qui est :
S = [−5 ; −2] ∪ [2 ; 7]. Les intervalles sont fermés, car l'égalité n'est pas stricte.
L'égalité est "≤" et pas "<". Au-delà de 7, on ne sait pas comment se comporte la fonction.

ii) Sur le graphique, on cherche les points de la courbe de f qui possèdent une tangente de pente négative ou nulle, pour obtenir l'ensemble des solutions de : $f'(x) \leq 0$, qui est :
S = [−6 ; −4] ∪ [0 ; 4]. Les intervalles sont fermés, car l'égalité n'est pas stricte.
L'égalité est "≤" et pas "<". Au-delà de −6, on ne sait pas comment se comporte la fonction.

d) La réponse au point b.i) indique où la fonction croise l'axe des abscisses.
La réponse au point b.ii) indique où la fonction possède une tangente horizontale.
La réponse au point c.i) indique où la fonction se trouve sous l'axe des abscisses.
La réponse au point c.ii) indique où la fonction possède une tangente de pente négative, c'est aussi l'ensemble des points d'abscisses sur lequel la fonction est décroissante.

❺ C'est le même type d'exercice que le précédent, mais les valeurs sont moins bien définies.

a) f(−4) se lit sur le graphique et vaut environ −0,6. Son signe est donc négatif.
La tangente à f au point d'abscisse $x = -4$ a clairement une pente positive. Par définition, cette pente est égale à $f'(-4)$, donc le signe de $f'(-4)$ est positif.

b) i) Sur le graphique, on cherche les points de croisement entre la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses, pour obtenir l'ensemble des solutions de : $f(x) = 0$, qui est : S ≈ {−3,7 ; 3,7 }.

ii) Sur le graphique, on cherche les points de la courbe de f qui possèdent une tangente horizontale, pour obtenir l'ensemble des solutions de : $f'(x) = 0$, qui est : S = {−1 ; 1 }
Il y a une ambiguïté autour de $x = 1$, car on n'arrive pas à déterminer si la fonction est constante sur un petit intervalle autour de 1. Donc la réponse S ≈ {−1 } ∪] 0,6 ; 1,3[est aussi acceptable.
L'intervalle est ouvert, car l'inégalité est stricte !

c) i) Sur le graphique, on cherche les points de la courbe de la fonction f qui se trouvent en-dessous de l'axe des abscisses, pour obtenir l'ensemble des solutions de : $f(x) < 0$, qui est :
S =]−5 ; −3,7[∪]3,7 ; 6]. Les intervalles sont ouvert, car l'égalité est stricte. L'égalité est "<" et pas "≤". Au-delà de −5 et 6, on ne sait pas comment se comporte la fonction.

ii) Sur le graphique, on cherche les points de la courbe de f qui possèdent une tangente de pente négative, pour obtenir l'ensemble des solutions de : $f'(x) < 0$, qui est :
S =]−1 ; 6[\ {1}. Les intervalles sont ouvert, car l'égalité est stricte. Il faut exclure $x = 1$, car en cet endroit la pente de la tangente est nulle. Il faut être cohérent avec la réponse donnée en b).
Au-delà de 6, on ne sait pas comment se comporte la fonction.

d) La réponse au point b.i) indique où la fonction croise l'axe des abscisses.
La réponse au point b.ii) indique où la fonction possède une tangente horizontale.
La réponse au point c.i) indique où la fonction se trouve sous l'axe des abscisses.
La réponse au point c.ii) indique où la fonction possède une tangente de pente négative, c'est aussi l'ensemble des points d'abscisses sur lequel la fonction est décroissante.