

Exercice 1

L'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse a est :

$$T_a(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

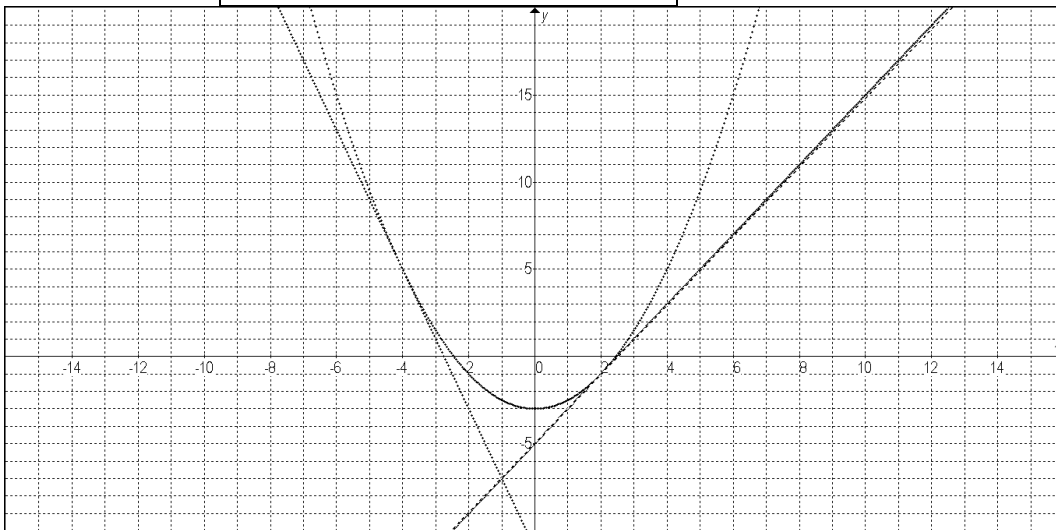
1.1 $f(x) = 0,5x^2 - 3$; $a = 2$; $f(a) = f(2) = 0,5 \cdot 2^2 - 3 = -1$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{0,5 \cdot x^2 - 3 - (0,5 \cdot a^2 - 3)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{0,5 \cdot (x^2 - a^2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{0,5 \cdot (x - a) \cdot (x + a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 0,5 \cdot (x + a) = a \end{aligned}$$

Donc $f'(2) = 2$.

Ainsi : $T_2(x) = -1 + 2 \cdot (x - 2) = 2x - 5$

De même, $T_4(x) = 5 + (-4) \cdot (x + 4) = -4x - 11$



1.2 $f(x) = \frac{1}{x^3}$; $a = 1$; $f(a) = f(1) = 1$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{a^3}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{a^3 - x^3}{x^3 \cdot a^3}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(a - x)(a^2 + ax + x^2)}{x^3 \cdot a^3} \cdot \frac{1}{(x - a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(-a + x)(a^2 + ax + x^2)}{(x - a) \cdot x^3 \cdot a^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(a^2 + ax + x^2)}{x^3 \cdot a^3} = -\frac{3a^2}{a^6} = -\frac{3}{a^4} \end{aligned}$$

Remarque : les règles de calculs de dérivées permettent d'arriver au même résultat plus rapidement !

Donc $f'(1) = -3$.

Ainsi : $T_1(x) = 1 - 3 \cdot (x - 1)$

1.3 $f(x) = 5 - x + \frac{1}{x}$; $a = -1$; $f(a) = f(-1) = 5 - (-1) + \frac{1}{-1} = 5$

Avec les règles de dérivation, on obtient : $f'(a) = -1 - \frac{1}{x^2}$

Donc $f'(-1) = -2$.

Donc $T_{-1}(x) = 5 - 2 \cdot (x + 1)$

Exercice 2

La tangente à la courbe est horizontale \Leftrightarrow sa pente est nulle \Leftrightarrow la dérivée de la fonction s'annule.

$$2.1 \quad f(x) = x^2 - 2x + 4 \quad ; \quad f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 - 2x + 4) - (a^2 - 2a + 4)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2 - 2x + 2a}{x - a} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a) \cdot (x + a) - 2 \cdot (x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a) \cdot [(x + a) - 2]}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) - 2 = 2a - 2$$

$$f'(a) = 2a - 2 \quad ; \quad f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

La tangente à la courbe de f est horizontale en $P = (1 ; f(1)) = (1 ; 3)$.

Equation de la tangente : $y = 3$

$$2.2 \quad f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - 1 \quad ; \quad f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - 1\right) - \left(a^3 - \frac{9}{2}a^2 + 6a - 1\right)}{x - a} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}a^2 + 6x - 6a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a) \cdot (x^2 + ax + a^2) - \frac{9}{2} \cdot (x - a) \cdot (x + a) + 6 \cdot (x - a)}{x - a} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a) \cdot \left[(x^2 + ax + a^2) - \frac{9}{2} \cdot (x + a) + 6 \right]}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(x^2 + ax + a^2 \right) - \frac{9}{2} \cdot (x + a) + 6 = 3a^2 - 9a + 6$$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 9a + 6 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (a - 2) \cdot (a - 1) = 0 \Leftrightarrow a = 2 \text{ ou } a = 1$$

La tangente à la courbe de f est horizontale en $P = (2 ; f(2)) = (2 ; 1)$ et en

$P = (1 ; f(1)) = (1 ; 1,5)$

Equations respectives de ces tangentes : $y = 1$ et $y = 1,5$

$$2.3 \quad f(x) = x + \frac{1}{x} \quad ; \quad f'(a) = 1 - \frac{1}{a^2} \text{ on a utilisé la dérivée de chaque terme, chacune vue au cours !}$$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{a^2} = 0 \Leftrightarrow a = -1 \text{ ou } a = 1$$

La tangente à la courbe de f est horizontale en $P = (-1 ; f(-1)) = (-1 ; -2)$ et en

$P = (1 ; f(1)) = (1 ; 2)$

Equations respectives de ces tangentes : $y = -2$ et $y = 2$

Exercice 3

$$f(x) = -\frac{1}{x} \quad f'(a) = -\left(-\frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{a^2}$$

Si la tangente forme un angle de 45° avec l'axe des x , alors sa pente est de 1. Donc la dérivée égale 1 en les points ayant une tangente de 45° .

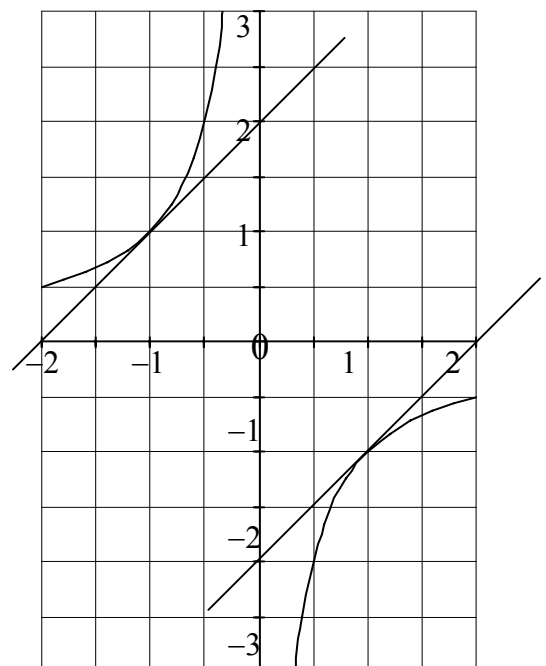
Il faut résoudre : $\frac{1}{a^2} = 1$.

Il y a les deux solutions que l'on voit sur le graphique.

$a = 1$ ou $a = -1$.

On a montré que la tangente à f forme un angle de 45° avec l'horizontale, uniquement en les deux points

$(1 ; -1)$ et $(-1 ; 1)$.



Exercice 4

4.1 Soit $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$. La question revient à déterminer pour quelle(s) valeur(s) de α et β la dérivée de la fonction f s'annule en $x = 1$ et la fonction égale 1 en $x = 1$.

$f'(x) = 3 \cdot x^2 + \alpha \cdot 2 \cdot x + \beta$. Ceci mène au système d'équations :

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} 3 \cdot 1^3 + \alpha \cdot 2 \cdot 1 + \beta = 0 \\ 1^3 + \alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 = 1 \end{cases} \text{ simplifié en : } \begin{cases} 2\alpha + \beta = -3 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, on élimine l'inconnue β et on obtient : $\alpha = -3$.

Donc $\beta = -\alpha = 3$.

4.2 Soit $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$. On cherche α et β pour que $T_{-1}(x) = x + 4$.

$$f'(x) = 3x^2 + \alpha \cdot 2 \cdot x + \beta.$$

On sait que $f(-1) = T_{-1}(-1) = 3$, donc $-1 + \alpha - \beta = 3$.

On sait que $f'(-1)$ égale le facteur de x , donc $f'(-1) = 1$, donc $3 - 2\alpha + \beta = 1$.

Ceci mène au système d'équations :

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ -2a + b = -2 \end{cases}$$

En additionnant les deux équations, on élimine l'inconnue β et on obtient : $-\alpha = 2$.

Donc $\alpha = -2$ et $\beta = \alpha - 4 = -6$

$\alpha = -2$ et $\beta = -6$ sont les valeurs cherchées.

4.3 Pour que deux fonctions aient des tangentes en une même abscisse a qui soient parallèles, il faut que la dérivée de ces fonctions en cette abscisse a soit la même.

a) $f'(a) = g'(a) \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{-2}{a^3} = -\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot a \Leftrightarrow -\frac{8}{a^3} = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow 16 = a^4 \Leftrightarrow a = \pm 2$

f et g ont des tangentes parallèles aux points d'abscisses $x = -2$ et $x = 2$. Ce sont les seules solutions.

b) $f'(a) = g'(a) \Leftrightarrow -\sin(a) = \cos(a) \Leftrightarrow \sin(-a) = \sin(\pi/2 - a) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -a = \pi/2 - a + 2k\pi \text{ ou } \pi - (-a) = \pi/2 - a + 2k\pi, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = \pi/2 + 2k\pi \text{ ou } 2a = \pi/2 - \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{R}$$

La première égalité est impossible et ne donne aucune solution.

La deuxième égalité donne : $a = -\pi/4 + k\pi, k \in \mathbb{R}$

f et g ont des tangentes parallèles aux points d'abscisses $x = -\pi/4 + k \cdot \pi, k \in \mathbb{R}$. Ce sont les seules solutions.

