Exercice 1 $f_1(x)=\frac{1}{4}\cdot x^2-3$ et $f_2(x)=\frac{1}{x}-x$

1.1 Référez-vous au graphique de gauche ci-dessous.

1.2 $f_1(x)=0,25\cdot x^2-3$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{0,25\cdot x^2-3-(0,25\cdot a^2-3)}{x-a}=$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{0,25\cdot\left(x^2-a^2\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{0,25\cdot(x-a)\cdot(x+a)}{x-a}=\lim_{x\to a}0,25\cdot(x+a)=0,5\cdot a$$

Donc, pour $a = 2$, $f(a)=f(2)=0,25\cdot 2^2-3=-2$ et $f'(a)=f'(2)=1$.

Et, pour $a = -4$, $f(a)=f(-4)=0,25\cdot(-4)^2-3=1$ et $f'(a)=f'(-4)=-2$.

1.3 L'équation de la tangente à la courbe d'équation $y=f(x)$ au point d'abscisse a est :

$T_a(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$

Ainsi : $\boxed{T_2(x)=-2+1\cdot(x-2)=x-4}$, qui correspond bien au graphique.

De même, $\boxed{T_4(x)=1+(-2)\cdot(x+4)=-2x-7}$

1.3 Référez-vous au graphique de droite ci-dessous.

1.4 $f_2(x)=\frac{1}{x}-x$, $f_2'(x)=\left(\frac{1}{x}-x\right)'=-\frac{1}{x^2}-1$

Donc, pour $a = 2$, $f(a)=f(2)=0,5-2=-1,5$ et $f'(a)=f'(2)=-0,25-1=-1,25$.

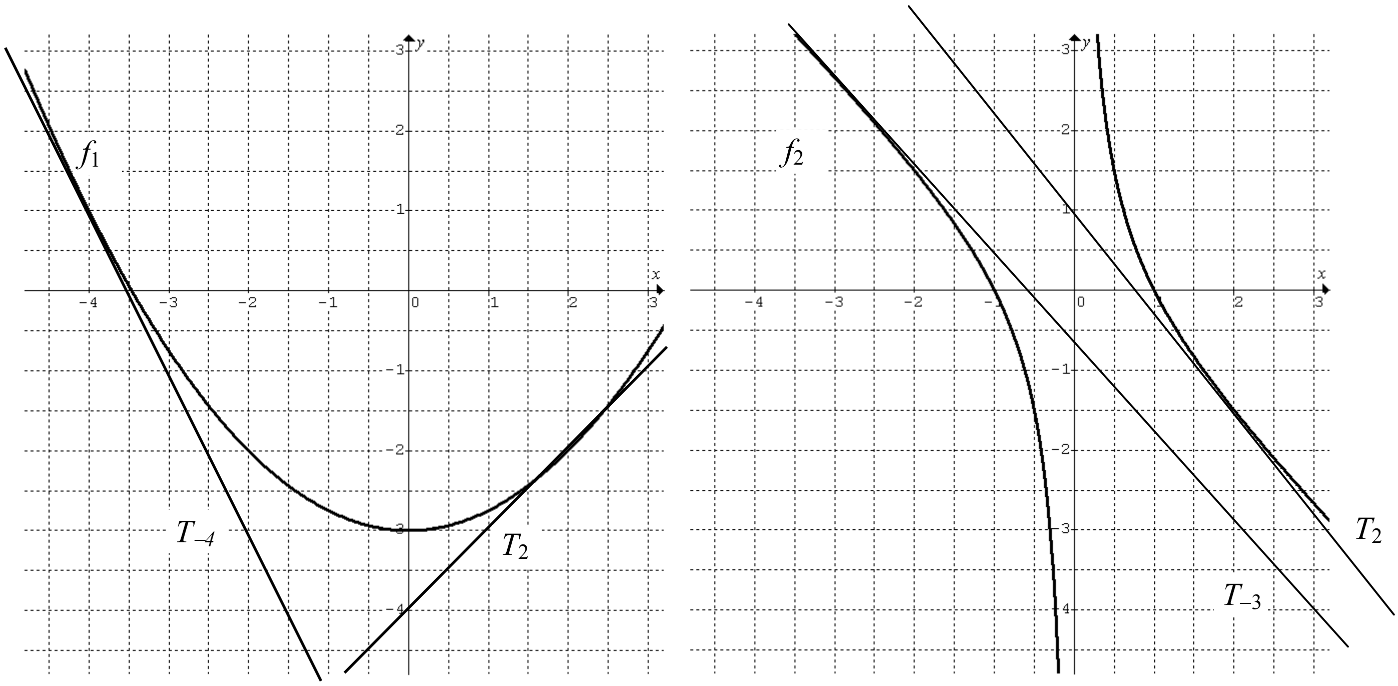
Et, pour $a = -3$, $f_2(-3)=-\frac{1}{3}-(-3)=\frac{8}{3}\approx 2,667$ et $f'(-3)=-\frac{1}{9}-1=-\frac{10}{9}\approx -1,1111$.

1.6 L'équation de la tangente à la courbe d'équation $y=f(x)$ au point d'abscisse a est :

$T_a(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$

Ainsi : $\boxed{T_2(x)=-1,5-1,25\cdot(x-2)=-1,25\cdot x+1}$, qui correspond bien au graphique.

De même, $\boxed{T_{-3}(x)=\frac{8}{3}-\frac{10}{9}\cdot(x+3)=-\frac{10}{9}\cdot x-\frac{2}{3}}$



1.7* Etonnamment, il n'existe aucune tangente à la fonction f_2 en deux points. Cela peut se voir en remarquant que la droite $y=-x$ est une asymptote qui sépare les deux courbes, qui n'ont jamais une tangente moins oblique que la droite $y=-x$. $\left(f_2'(a)<-1\right.$ pour tout $\left.a\in\mathbb{R}.\right)$

Exercice 2

La tangente à la courbe est horizontale $\Leftrightarrow$ sa pente est nulle $\Leftrightarrow$ la dérivée de la fonction s'annule.

2.1 $f(x)=x^2-2x+1{,}5$; $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\left(x^2-2x+1{,}5\right)-\left(x^2-2x+1{,}5\right)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2-2x+2a}{x-a}=$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\cdot(x+a)-2\cdot(x-a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\cdot\left[(x+a)-2\right]}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(x+a)-2=2a-2$

$f'(a)=2a-2$; $f'(a)=0 \Leftrightarrow 2a-2=0 \Rightarrow a=1$

La tangente à la courbe de f est horizontale en $P=(1\,;f(1))=(1\,;0{,}5)$.

Equation de la tangente : $y=0{,}5$

2.2 $f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x$; $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\left(x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x\right)-\left(a^3-\dfrac{9}{2}a^2+6a\right)}{x-a}=$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3-\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{9}{2}a^2+6x-6a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\cdot\left(x^2+ax+a^2\right)-\dfrac{9}{2}\cdot(x-a)\cdot(x+a)+6\cdot(x-a)}{x-a}=$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\cdot\left[\left(x^2+ax+a^2\right)-\dfrac{9}{2}\cdot(x+a)+6\right]}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\left(x^2+ax+a^2\right)-\dfrac{9}{2}\cdot(x+a)+6=3a^2-9a+6$

$f'(a)=0 \Leftrightarrow 3a^2-9a+6=0 \Leftrightarrow 3\cdot(a-2)\cdot(a-1)=0 \Rightarrow a=1$ ou $a=2$

La tangente à la courbe de f est horizontale en $P_1=(1\,;\,f(1))=(1\,;2{,}5)$ et en $P_2=(2\,;\,f(2))=(2\,;2)$.

Equations respectives de ces tangentes : $y=2{,}5$ et $y=2$

2.3 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; $f'(a)=1-\dfrac{1}{a^2}$ on a utilisé la dérivée de chaque terme, chacune vue au cours !

$f'(a)=0 \Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{a^2}=0 \Rightarrow a=-1$ ou $a=1$

La tangente à la courbe de f est horizontale en $P_1=(-1\,;f(-1))=(-1\,;-2)$ et en $P_2=(1\,;f(1))=(1\,;2)$

Equations respectives de ces tangentes : $y=-2$ et $y=2$

Exercice 3

3.1 Soit $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x$. La question revient à déterminer pour quelle(s) valeur(s) de α et β la dérivée de la fonction f s'annule en $x=1$ et la fonction égale 2 en $x=1$.

$f'(x)=3\cdot x^2+\alpha\cdot 2\cdot x+\beta$. Ceci mène au système d'équations :

$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f(1)=2 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} 3\cdot 1^3+\alpha\cdot 2\cdot 1+\beta=0 \\ 1^3+\alpha\cdot 1^2+\beta\cdot 1=2 \end{cases}$ simplifié en : $\begin{cases} 2\alpha+\beta=-3 \\ \alpha+\beta=1 \end{cases}$

En soustrayant les deux équations, on élimine l'inconnue β et on obtient : $\alpha=-4$.

Donc $\beta=1-\alpha=5$.

Donc la fonction cherchée est : $f(x)=x^3-4x^2+5x$

Suite de l'exercice 3.

3.2 Soit $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$. On cherche α et β pour que $T_{-1}(x) = x + 4$.

$f'(x) = 3x^2 + \alpha \cdot 2 \cdot x + \beta$.

On sait que $f(-1) = T_{-1}(-1) = 3$, donc $-1 + \alpha - \beta = 3$.

On sait que $f'(-1)$ égale le facteur de x, donc $f'(-1) = 1$, donc $3 - 2\alpha + \beta = 1$.

Ceci mène au système d'équations :

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ -2a + b = -2 \end{cases}$$

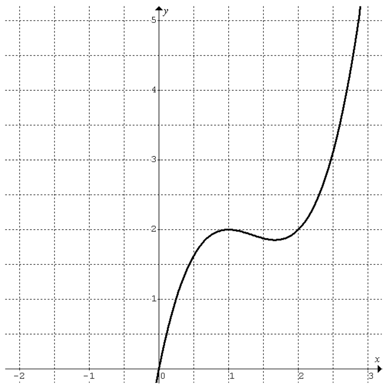
En additionnant les deux équations, on élimine l'inconnue β et on obtient : $-\alpha = 2$.

Donc $\alpha = -2$ et $\beta = \alpha - 4 = -6$

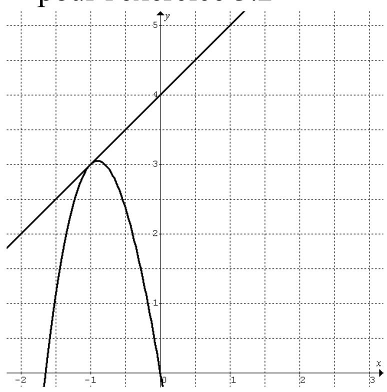
$\alpha = -2$ et $\beta = -6$ sont les valeurs cherchées. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 6x$

Vérifications sur des graphiques :

Pour l'exercice 3.1



pour l'exercice 3.2



3.3 Pour que deux fonctions aient des tangentes en une même abscisse a qui soient parallèles, il faut que la dérivée de ces fonctions en cette abscisse a soit la même.

$$f'(a) = g'(a) \iff 4 \cdot \frac{-2}{a^3} = -\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot a \iff -\frac{8}{a^3} = -\frac{a}{2} \iff 16 = a^4 \iff a = \pm 2$$

f et g ont des tangentes parallèles aux points d'abscisses $x = -2$ et $x = 2$. Ce sont les seules solutions.

Supplément : **Exercice 4**

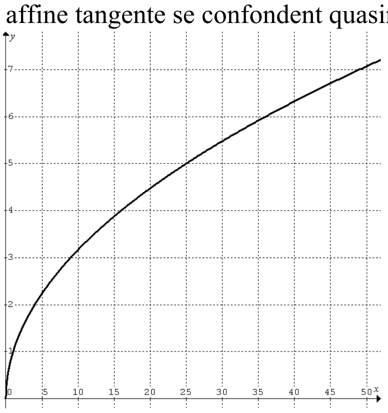
Le but est de remarquer qu'il est facile de calculer une bonne approximation de $\sqrt{50}$ à l'aide de la dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.

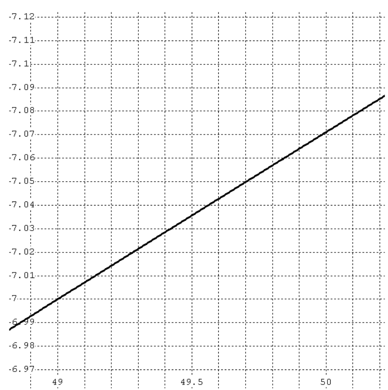
4.1 Calculez la dérivée de cette fonction en $a = 49$.

4.2 Ecrivez l'équation de l'application affine tangente à f en $a = 49$.

4.3 Remarquez que $\sqrt{50} \approx \sqrt{49} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{49}} \cdot (50 - 49)$ et calculez la précision de cette approximation.

Pour information, le graphique de gauche ci-dessous est celui de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ et celui de droite est un agrandissement de cette fonction autour des valeurs qui nous intéresses. Remarquez que la fonction f et sont application affine tangente se confondent quasiment sur l'agrandissement.





Correction de l'exercice supplémentaire n° 4.

4.1 $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad f(49)=\sqrt{49}=7$ $\quad f\,'(x)=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$ $\quad f\,'(49)=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{49}}=\dfrac{1}{14}\approx 0,0714$

4.2 L'application affine tangente à f en $a = 49$ est $y=7+\dfrac{1}{14}\cdot(x-49)$

4.3 La fonction et son application affine tangente en $a = 49$ sont presque égales autour de $a = 49$, donc $\sqrt{50}=f(50)\approx f(49)+f\,'(49)\cdot(x-49)=7+\dfrac{1}{14}\cdot(50-49)\approx 7,0714$.

Comparé au calcul de la calculatrice $\sqrt{50}=7,07107...$, on voit que les 4 premiers chiffres sont identiques.