

Dans tout ce qui suit, il est important que  $x$  soit en **radians**. Si  $x$  était en degrés, les résultats donneraient des nombres à virgules moins simples !

1.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{1} \cdot \frac{\sin(3x)}{3x} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$
2.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin(3x)}{3x} = \frac{3}{2} \cdot \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$
3.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/3)}{2x} = \lim_{\frac{x}{3} \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{2 \cdot 3}{1} \cdot \frac{x}{3}} = \frac{1}{6} \cdot \lim_{\frac{x}{3} \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} = \frac{1}{6}$
4.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{1} \cdot \frac{\sin(ax)}{ax} = \frac{a}{1} \cdot \lim_{ax \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = a \cdot 1 = a$
5.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(ax)} = \lim_{ax \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} \cdot \lim_{ax \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(ax)} \stackrel{\text{utilisation de 4.}}{=} a \cdot 1 = a$
6.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin(3x)} = \frac{2}{3} \cdot \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin(3x)} = \frac{2}{3}$
Naturellement, le résultat 4. pourrait être directement utilisé.	
7.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{1}{x} = 1 \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ , donc cette limite n'existe pas !
8.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot \frac{x}{1} = \lim_{x^2 \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1} = 1 \cdot 0 = 0$
9.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x) \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \cdot \cos(x)} = 1 \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ , donc cette limite n'existe pas !
10.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x)}{\sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{3} \cdot \frac{\tan(5x)}{5x} \cdot \frac{3x}{\sin(3x)} = \frac{5}{3} \cdot \lim_{5x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x)}{5x} \cdot \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin(3x)} = \frac{5}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{3}$
Naturellement, les résultats 4. et 6. pourraient être directement utilisés.	
11.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \lim_{(x-1) \rightarrow 0} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1$
12.	$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(x)}{x - \pi/2} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin(\pi/2 - x)}{x - \pi/2} = \lim_{(x - \pi/2) \rightarrow 0} \frac{-\sin(x - \pi/2)}{x - \pi/2} = -1 \cdot \lim_{(x - \pi/2) \rightarrow 0} \frac{\sin(x - \pi/2)}{x - \pi/2} = -1 \cdot 1 = -1$
13.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1 \cdot 1 = 1$
14.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \tan(x) + \sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \tan(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
15.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 - 2x)}{x^2 - 2x} = \lim_{x^2 - 2x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 - 2x)}{x^2 - 2x} = 1$
16.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 2x)}{x^2 - 2x} = \frac{\sin(1^2 - 2)}{1^2 - 2} = \frac{\sin(-1)}{-1} = \frac{-\sin(1)}{-1} = \sin(1)$ C'est une limite immédiate !
17.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 2x)}{x^2 - 2x} = \lim_{x^2 - 2x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 - 2x)}{x^2 - 2x} = 1$ Très similaire à la limite n° 15.
18.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x^2 - 2x)}{x^2 - 2x} = \frac{\sin(3^2 - 2 \cdot 3)}{3^2 - 2 \cdot 3} = \frac{\sin(3)}{3}$ C'est une limite immédiate !

$$19. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = \dots \text{ par application de la formule } \sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}_{\rightarrow \cos(a)} \cdot \lim_{\frac{x-a}{2} \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}}_{\rightarrow 1} = \cos(a)$$

*Avec la limite suivante, ce sont les limites les plus importantes de cette série !*

$$20. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a} = \dots \text{ par application de la formule } \cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2 \cdot \sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{-\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)}_{\rightarrow -\sin(a)} \cdot \lim_{\frac{x-a}{2} \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}}_{\rightarrow 1} = -\sin(a)$$

*Avec la limite précédente, ce sont les limites les plus importantes de cette série !*

21.

En substituant  $h = x - a$  ;  $x = a + h$  ;  $h \rightarrow 0$  ;  $x \rightarrow a$  on retrouve exactement la limite n° 19, donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \dots = \cos(a)$$

22.

En substituant  $h = x - a$  ;  $x = a + h$  ;  $h \rightarrow 0$  ;  $x \rightarrow a$  on retrouve exactement la limite n° 20, donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a} = \dots = -\sin(a)$$