GEOMETRIE ANALYTIQUE ET VECTORIELLE DANS LE PLAN

1. Introduction

L'étude de la géométrie fit un grand pas en avant lorsqu'on constata que les points du plan peuvent être représentés par des couples de nombres et que les figures géométriques peuvent être représentées par des équations algébriques. Cette idée fut initiée par le mathématicien Français René Descartes (1596-1650) en 1637 dans l'appendice de son livre : "Discours de la méthode". Cette utilisation de l'algèbre par la géométrie se nomme : "**la géométrie analytique**".

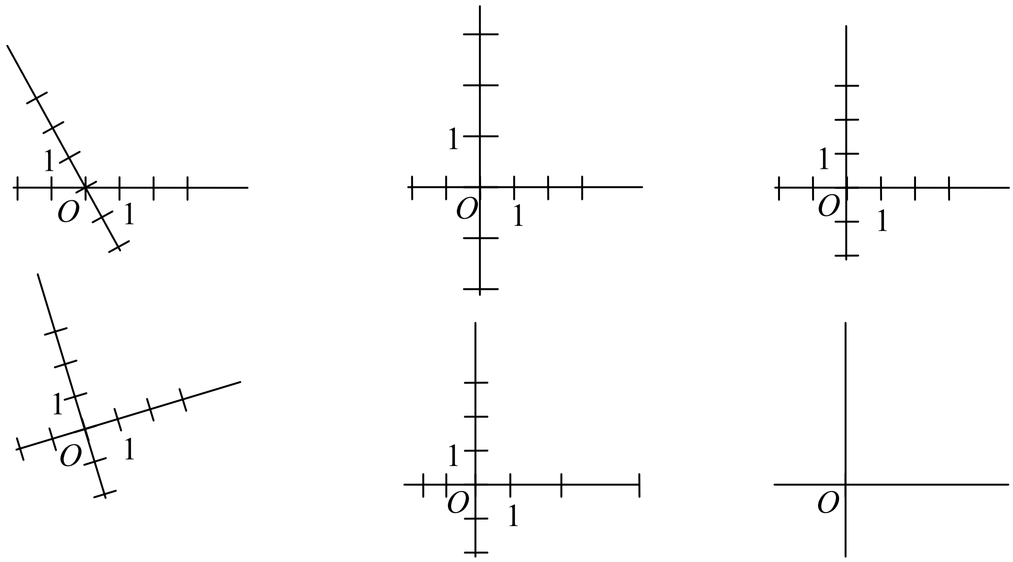
L'idée de base de la géométrie analytique est que les études géométriques peuvent être réalisées au moyen de calculs algébriques. On peut dire pour simplifier que c'est de la géométrie sans dessin !

2. Repère orthonormé

Définition :

Un **repère orthonormé** dans un plan est un système de *deux axes perpendiculaires* et *la distance entre deux graduations successives égale une unité de longueur*. L'intersection des deux axes est prise comme *origine*.

Exercice 2.1 : Parmi les repères suivant, lesquels sont des repères orthonormés ?

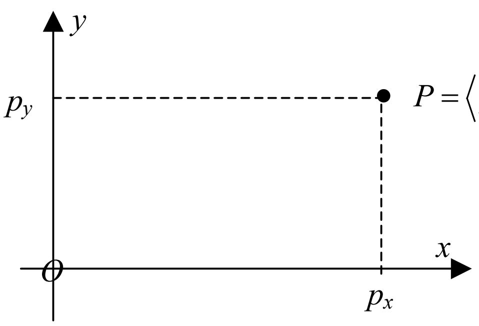


Dans la suite, le plan sera généralement muni d'un repère orthonormé.

Ainsi, chaque point P du plan peut être représenté par un couple $\left\langle p_x \,;\, p_y \right\rangle$ de deux nombres réels qui se nomment les deux **coordonnées** du point P. Réciproquement, à chaque couple de deux nombres réels correspond un point du plan. Il y a donc une **correspondance bijective** entre les points du plan et les couples de nombres réels. C'est pour cette raison qu'on parle souvent du plan $\mathbb{R}^2$.

Notations possibles : $P = \left\langle p_x \,;\, p_y \right\rangle$; $P = \left(p_x \,;\, p_y \right)$; $P\left\langle p_x \,;\, p_y \right\rangle$; $P\left(p_x \,;\, p_y \right)$.

Illustration :



<u>Propositions :</u> Soient $A = \langle a_x ; a_y \rangle$ et $B = \langle b_x ; b_y \rangle$ deux points du plan.

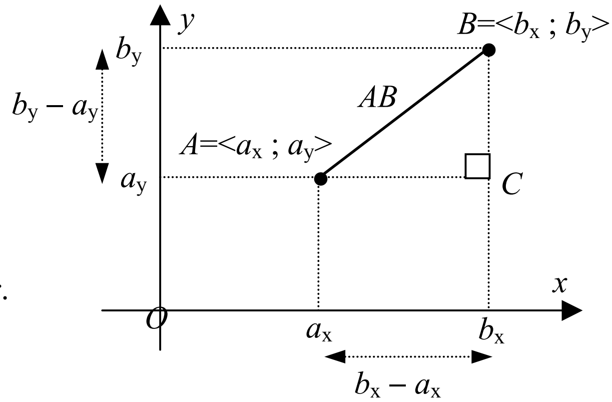
a) La **distance** entre A et B est données par : $AB = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2}$

b) Le **point milieu** M entre A et B est données par : $M = \left\langle \dfrac{a_x + b_x}{2} ; \dfrac{a_y + b_y}{2} \right\rangle$

Il se trouve sur le segment $[AB]$ et $AM = MB$.

<u>Exemple :</u> Soient $A = \langle 1 ; 3 \rangle$ et $B = \langle -2 ; 5 \rangle$ deux points du plan.

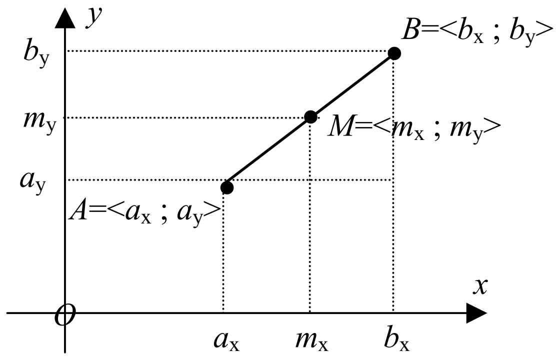
On a : $AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ et $M = \left\langle \dfrac{1-2}{2} ; \dfrac{3+5}{2} \right\rangle = \langle -0,5 ; 4 \rangle$



<u>Démonstration :</u> (Illustration)

a) Appliquons le théorème de Pythagore sur le triangle rectangle ABC.
$AB = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2}$
Le signe est positif, car AB est une longueur.

b) Appliquons le théorème de Thalès.
$\dfrac{1}{2} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{m_x - a_x}{b_x - a_x} = \dfrac{m_y - a_y}{b_y - a_y}$
On en déduit :
$m_x = a_x + \dfrac{b_x - a_x}{2} = \dfrac{a_x + b_x}{2}$ et
$m_y = a_y + \dfrac{b_y - a_y}{2} = \dfrac{a_y + b_y}{2}$



<u>Exercice 2.2 :</u>
Représentez sur un même repère les points $A(2 ; 3)$, $B(1 ; -2)$, $C(-6 ; -5)$, $D(-4 ; 3)$ et $E(4 ; \pi)$.

<u>Exercice 2.3 :</u>

Soient les points $A(2 ; 3)$, $B(1 ; -2)$ et $C(-6 ; -5)$.

Calculez les distances entre : a) A et B b) B et C c) A et C d) C et A

Réponses en valeur exacte.

<u>Exercice 2.4 :</u>

Soit $O(0;0)$ l'origine du repère. Quels sont les points $P(x ; y)$ qui vérifient les conditions suivantes ?

a) $OP = 5$ et $x = 4$ **b)** $OP = 14$ et $y = 12$ **c)** $OP = 8$ et $x = y$ **d)** $OP = 8$ et $x^2 = y^2$

e) $OP = 8$ (Quelle figure géométrique représente l'ensemble des solutions ?)

Réponses en valeur exacte.

Exercice 2.5 :

Les points $A(4\ ;\ -6\ )$, $B(6\ ;\ 10)$, $C(-6\ ;\ 1)$ et $D(1\ ;\ -7)$ pris dans cet ordre sont les sommets d'un quadrilatère $ABCD$ et M, N, P et Q respectivement les points milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

a) Calculez les coordonnées des points M, N, P et Q.

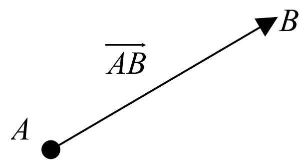
b) Calculez les longueurs des segments $[MN]$, $[NP]$, $[PQ]$, $[QM]$.
Que constatez-vous ? (C.f. point c)
Réponses en valeur exacte.

c) Représentez dans le même repère le quadrilatère $ABCD$ et le quadrilatère $MNPQ$.
Vérifiez votre constatation du point b) sur ce dessin.

d*) Pouvez-vous montrer que la constatation ci-dessus est toujours satisfaites, indépendamment des positions des points A, B, C et D ? (Cela mène au théorème de Varignon)

3. Les vecteurs (de dimension 2)

Des quantités telles que l'aire, le volume, la température ou le temps ne possèdent qu'une valeur quantitative et sont donc entièrement caractérisées par un simple nombre auquel on adjoint une unité. Une quantité de ce type est appelée **quantité scalaire** et le nombre réel correspondant un **scalaire**. Par contre, une quantité telle que la vitesse, l'accélération ou une force possède outre sa valeur quantitative, une direction et est souvent représentée par une **flèche** ou un **segment orienté**, c'est-à-dire un segment muni d'un sens. Un segment orienté **d'origine** A et **d'extrémité** B est noté [AB] et graphiquement, le sens est indiqué par une pointe de flèche en B.

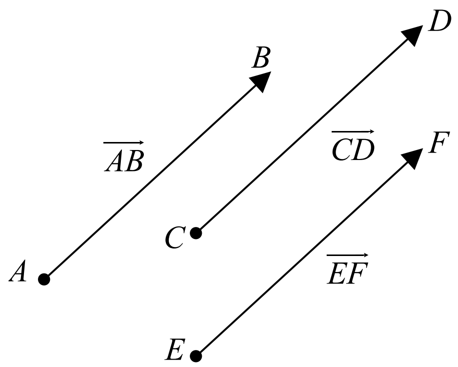


La longueur du segment $[AB]$ s'appelle **la norme** et se note $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

Deux segments orientés parallèles de même norme et de même sens sont dits **équipollents**.

Les segments orientés équipollents suivants sont considérés comme égaux et l'on peut écrire :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$

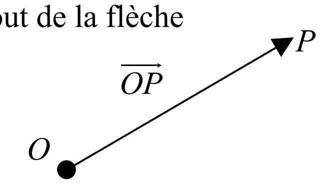


On définit le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ comme l'ensemble des segments orientés équipollents au segment orienté $[AB]$. On dit que le segment orienté $[AB]$ est un **représentant** du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Dans ces conditions, l'origine de la flèche représentant un vecteur peut être déplacée à condition que ni sa *direction*, ni son *sens*, ni sa *norme* n'en soient modifiés.

Dans ce cours nous nous limiterons aux vecteurs de dimension 2 représentés par des flèches dans le plan.

Un **vecteur** est donc caractérisé par :
° sa **norme**
° sa **direction**
° son **sens**

Dans un plan muni d'une origine O, à chaque point P du plan, correspond le vecteur $\overrightarrow{OP}$.
De même à chaque vecteur correspond le point P du plan de trouvant au bout de la flèche représentant et partant de l'origine O.



Dans un plan muni d'un repère orthonormé ayant comme origine le croisement des axes x et y, il y a une **correspondance bijective** entre :
i) les **points du plan** ;
ii) les **couples de nombres réels** ;
iii) les **vecteurs** (de dimension 2).

Ainsi, <u>à chaque vecteur du plan correspond un unique couple de nombres réels</u>, à savoir les coordonnées $\langle p_x ; p_y \rangle$ du point correspondant à ce vecteur.

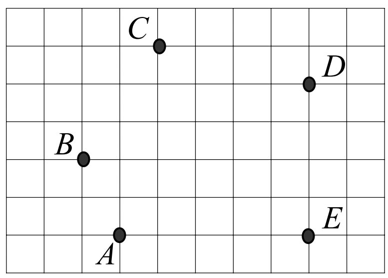
Inversement, <u>à chaque couple $< p_x ; p_y >$ correspond le vecteur $\overrightarrow{OP}$</u>, où P est le point de coordonnées $\langle p_x ; p_y \rangle$.

<u>Conventions :</u>
On écrira : $\vec{p} = \langle p_x ; p_y \rangle$ pour désigner le vecteur $\overrightarrow{OP}$ correspondant au couple $\langle p_x ; p_y \rangle$.
On écrira : $P = \langle p_x ; p_y \rangle$ ou $P(p_x ; p_y)$ pour désigner le point P correspondant au couple $\langle p_x ; p_y \rangle$.
Les nombres p_x et p_y sont appelés les **composantes** du vecteur $\overrightarrow{OP}$.
Le nombre p_x est appelé la **première composante** (ou **composante horizontale**) du vecteur $\overrightarrow{OP}$.
Le nombre p_y est appelé la **deuxième composante** (ou **composante verticale**) du vecteur $\overrightarrow{OP}$.

L'ensemble de tous les vecteurs $\langle x ; y \rangle$ où x et y sont des nombres réels, sera désigné par $\boxed{\mathbb{R}^2}$.
$\mathbb{R}^2$ peut être vu comme le pan muni d'un repère orthonormé.

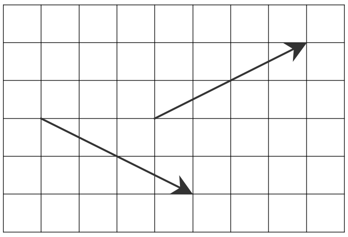
Donc par la suite, il n'y aura pas toujours une distinction entre ces trois notions.
On notera indifféremment $P = \langle p_x ; p_y \rangle$ ou $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \langle p_x ; p_y \rangle$.

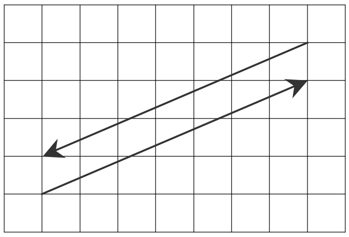
<u>Exercice 3.1 :</u>
Dessinez **deux** représentants des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CD}$.

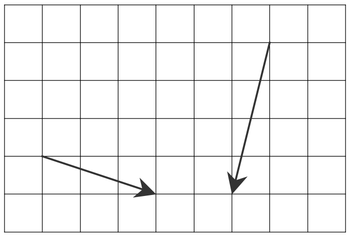


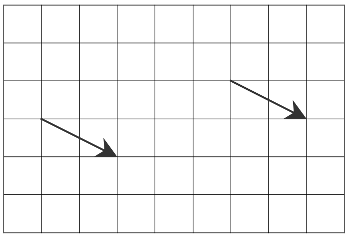
Exercice 3.2 :

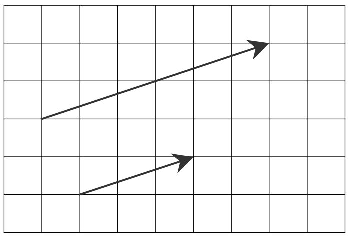
Dans chacun des dessins suivants, les deux flèches représentent-elles le même vecteur ? Justifiez vos réponses.

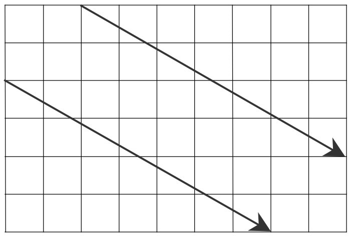
a) 

b) 

c) 

d) 

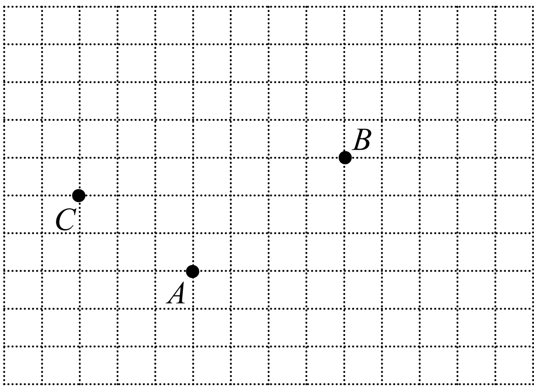
e) 

f) 

Exercice 3.3 :

Trouvez des points D, E, F et G tels que :

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BA}$.

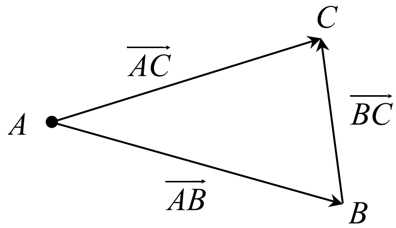


4. Opérations dans $\mathbb{R}^2$

Normalement, on ne peut pas additionner des points du plan, ni les multiplier par des nombres. Mais lorsque le plan est muni d'un repère orthonormé, nous allons voir que l'addition de points du plan peut être défini à l'aide de l'addition vectorielle ou de l'addition de nombres.

4.1 L'addition dans $\mathbb{R}^2$

On peut **additionner deux vecteurs** en utilisant la relation suivante : $\boxed{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}$
C'est la **relation de CHASLES** (Michel 1793-1880).

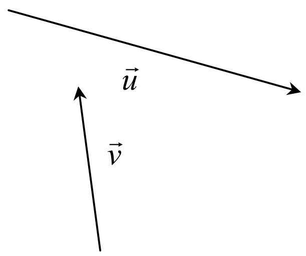


Voici deux manières équivalentes d'additionner deux vecteurs.

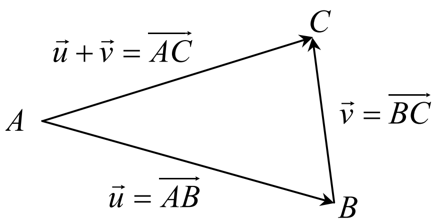
L'**addition de deux vecteurs** quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se fait en plaçant l'origine d'une flèche représentant le deuxième vecteur ($\vec{v}$) sur l'extrémité d'une flèche représentant le premier vecteur ($\vec{u}$). La flèche partant de l'origine de la première flèche et arrivant à l'extrémité de la flèche déplacée représente un nouveau vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

Le segment [AB] est un représentant du vecteur $\vec{u}$.
Le segment [BC] est un représentant du vecteur $\vec{v}$.
Le segment [AC] est un représentant du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

Voici deux représentants des vecteurs que l'on désire additionner.



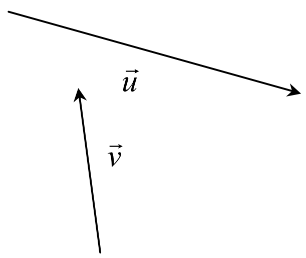
Voici la manière d'obtenir un représentant de la somme $\vec{u}+\vec{v}$



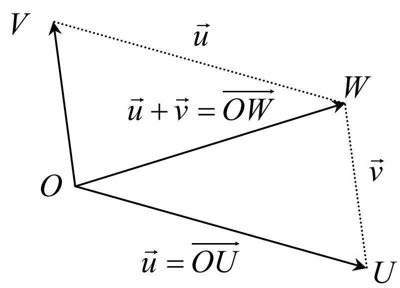
Voici une **autre manière d'additionner les deux vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Le segment [OU] est un représentant du vecteur $\vec{u}$.
Le segment [OV] est un représentant du vecteur $\vec{v}$.
Le segment [OW] est un représentant du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

Voici deux représentants des vecteurs que l'on désire additionner.



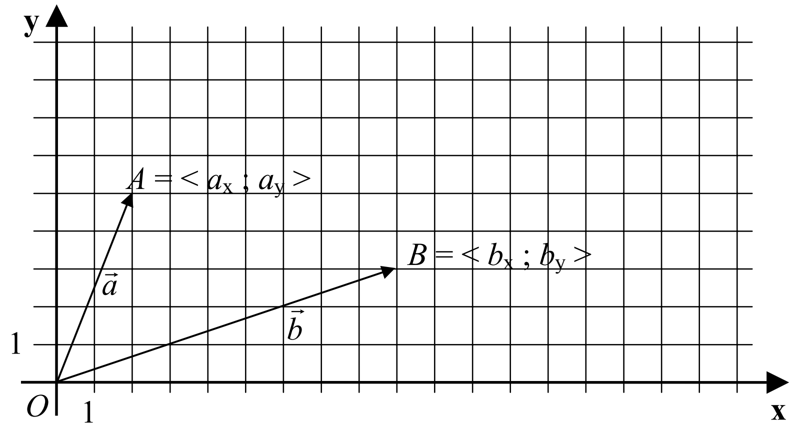
Voici l'autre manière d'obtenir un représentant de la somme $\vec{u}+\vec{v}$



C'est la **règle du parallélogramme.**

L'addition de deux vecteurs correspond à additionner les composantes de ces deux vecteurs.

Soient $\vec{a} = < a_x ; a_y >$ et $\vec{b} = < b_x ; b_y >$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.



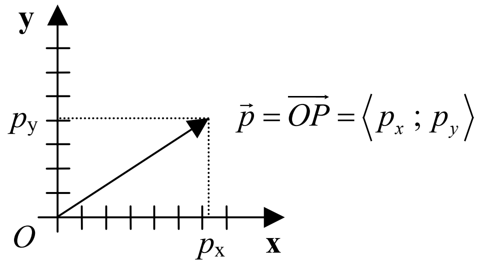
Représentez sur le graphique le vecteur $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Déterminez les composantes de ce vecteur $\vec{c}$. $\vec{c}$ =

On définit donc : $\boxed{< a_x ; a_y > + < b_x ; b_y > =}$

4.2 Norme d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$

La **norme** du vecteur $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \langle p_x ; p_y \rangle$ est définie par la longueur du segment $[OP]$.
Elle se calcule facilement à l'aide du théorème de Pythagore :



$$\boxed{\|\vec{p}\| = \|\langle p_x ; p_y \rangle\| =}$$

Exercice 4.1 :

Soient A, B, C, D, E et F des points quelconques du plan. Complétez, si possible :

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} =$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} =$

c) $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FB} =$

d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} =$

e) $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} =$

f) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} =$

g) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DF} =$

h) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD} =$

i) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{BF} =$

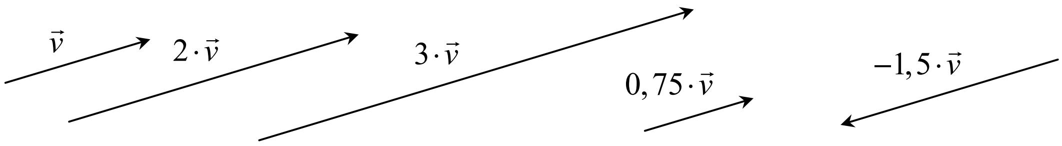
j) $\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BE} =$

4.3 Le produit par un nombre réel dans $\mathbb{R}^2$

Le produit d'un vecteur $\vec{v}$ par un nombre réel λ se note $\lambda \cdot \vec{v}$ et est défini de la manière suivante :

Le vecteur $\lambda \cdot \vec{v}$ est représenté par un segment orienté :
- de même *direction* que $\vec{v}$.
- de *longueur* égale à $|\lambda|$ fois la longueur d'un représentant de $\vec{v}$. Donc $\boxed{\|\lambda \cdot \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|}$
- de même *sens* que $\vec{v}$, si λ est positif, de *sens* opposé si λ est négatif.

Représentation d'un vecteur et de quelques produits de ce vecteur par des nombres réels.

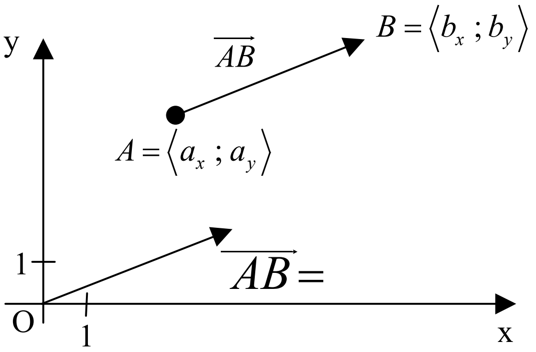


Remarque :
Si $\vec{v}$ est un vecteur, $-1 \cdot \vec{v}$ se note $-\vec{v}$.

Le produit d'un vecteur par un nombre réel λ correspond à multiplier les composantes de ce vecteur par le nombre λ.

On définit donc : $\boxed{\lambda \cdot < a_x \,;\, a_y > = \qquad\qquad}$

Remarque :
Si $A = < a_x \,;\, a_y >$ et $B = < b_x \,;\, b_y >$ sont deux points du plan, alors : $\boxed{\overrightarrow{AB} = \qquad\qquad}$



Quelques propriétés des vecteurs :

1) $[AB]$ est un segment orienté parallèle à $[CD]$, de même longueur et de même sens $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$. C'est la commutativité.
4) L'ordre des additions dans $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ n'a pas d'importance. C'est l'associativité.
5) $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = ... = \vec{0}$. C'est le vecteur nul.
6) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Exercice 4.2 :

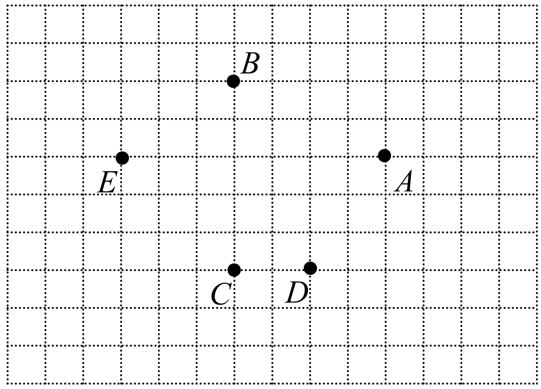
Dessinez un représentant des vecteurs suivants :

$\vec{x} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}$

$\vec{y} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE}$

$\vec{z} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA}$

$\vec{t} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$



Exercice 4.3 :

Dessinez un représentant de :

a) $\vec{v}_1 = -\vec{x}$

b) $\vec{v}_2 = -\vec{z}$

c) $\vec{v}_3 = 2\vec{x}$

d) $\vec{v}_4 = 1,5 \cdot \vec{y}$

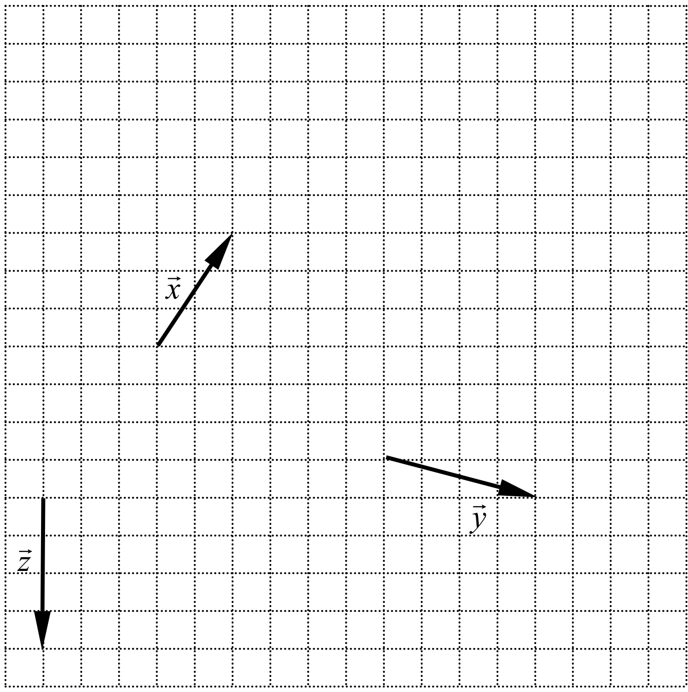
e) $\vec{v}_5 = -0,5 \cdot \vec{y}$

f) $\vec{v}_6 = \vec{x} + \vec{y}$

g) $\vec{v}_7 = \vec{x} - \vec{y}$

h) $\vec{v}_8 = \vec{y} - \vec{x}$

i) $\vec{v}_9 = \vec{y} - \vec{z} - \vec{x}$



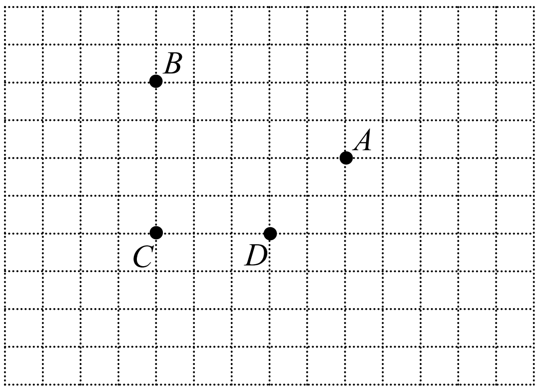
Exercice 4.4 :

Dessinez un représentant des vecteurs suivants :

$\vec{x}$ tel que $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \overrightarrow{DC}$,

$\vec{y}$ tel que $\overrightarrow{CD} + \vec{y} = \overrightarrow{AB}$,

$\vec{z}$ tel que $\overrightarrow{CB} + \vec{z} = \overrightarrow{DA}$



Exercice 4.5 :

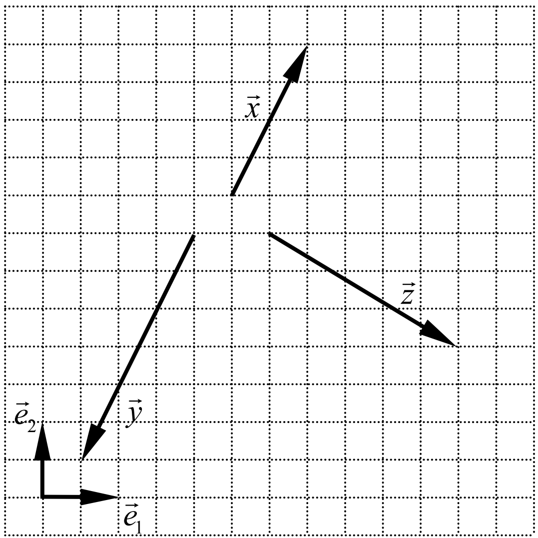
a) Trouvez un nombre k tel que $\vec{y} = k \cdot \vec{x}$.

b) Trouvez un nombre h tel que $\vec{x} = h \cdot \vec{y}$.

c) Trouvez deux nombres λ et μ tels que : $\vec{x} = \lambda \cdot \vec{e}_1 + \mu \cdot \vec{e}_2$.

d) Trouvez deux nombres α et β tels que : $\vec{z} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2$.

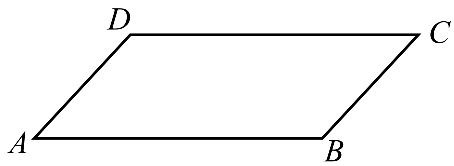
e) Trouvez deux nombres δ et ε tels que : $\vec{z} = \delta \cdot \vec{x} + \varepsilon \cdot \vec{y}$. !?!?



Exercice 4.6 :
Soient A, B, C et D quatre points quelconques du plan.

Montrez l'égalité suivante : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

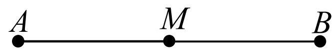
Exercice 4.7 :
Soit $ABCD$ un parallélogramme.
Vérifiez que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$



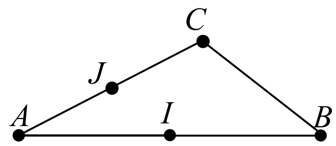
Exercice 4.8 :
Soit $ABCD$ un parallélogramme quelconque.

Montrez l'égalité suivante : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\cdot\overrightarrow{AD}$.

Exercice 4.9 :
Soit A et B deux points quelconques. Soit M le milieu du segment $[AB]$.
Remarquez que : $\overrightarrow{AM}=0,5\cdot\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$



Exercice 4.10 :
Soit ABC un triangle.
I est le milieu du segment $[AB]$.
J est le milieu du segment $[AC]$.
Montrez que : $\overrightarrow{IJ}=0,5\cdot\overrightarrow{BC}$.



Exercice 4.11* :
Soient un quadrilatère $ABCD$ quelconque.
Montrez à l'aide de l'écriture vectorielle, que les milieux M, N, P, Q des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ forment toujours un parallélogramme.
(C'est une version simplifiée du théorème de Varigon.)
Commencez par montrer que : $\overrightarrow{OM}=0,5\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.
Montrez ensuite que $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$.

Exercice 4.12 :
Déterminez le couple $\langle\, x\,;y\,\rangle$ qui vérifie :

a) $\langle x\,;y\rangle=\langle\, 6{,}5\,;-2\,\rangle+\langle\, 7\,;1\,\rangle-2\cdot\langle\, 5\,;-3\,\rangle$

b) $\langle\, 3\,;-1\,\rangle+\langle\, x\,;y\,\rangle=\langle\, 2\,;0\,\rangle$

c) $\langle\, 3\,;-2\,\rangle+\langle\, x\,;y\,\rangle=\langle\, -3\,;2\,\rangle$

d) $\langle\, x\,;y\,\rangle+\langle\, x\,;y\,\rangle=\langle\, 6\,;-2\,\rangle$

Exercice 4.13 :
Déterminez le réel k qui vérifie :

a) $k\cdot\langle\, 5\,;6\,\rangle=\langle\, 10\,;12\,\rangle$ b) $k\cdot\langle\, -4\,;0\,\rangle=\langle\, 4\,;0\,\rangle$ c) $k\cdot\langle\, 2\,;3\,\rangle=\langle\, 3\,;2\,\rangle$

Exercice 4.14 :
Montrez que : $\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{CD}$, où $A=\langle\, -3\,;1\,\rangle$; $B=\langle\, 1\,;3\,\rangle$; $C=\langle\, 4\,;1\,\rangle$ et $D=\langle\, 2\,;0\,\rangle$.

Exercice 4.15 :

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère : $A=\langle\ 2\,;1\ \rangle$; $B=\langle\ 6\,;4\ \rangle$ et $C=\langle\ 2\,;6\ \rangle$

a) $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=$ b) $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=$

c) Déduisez de ce qui précède que le triangle ABC est isocèle.

Exercice 4.16 :

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère : $A=\langle\ 0\,;0\ \rangle$; $B=\langle\ 6\,;8\ \rangle$ et $C=\left\langle\ 3+4\cdot\sqrt{3}\,;4-3\cdot\sqrt{3}\ \right\rangle$

Montrez que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 4.17 :

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère : $A=\langle\ 3\,;8\ \rangle$; $B=\langle\ -11\,;3\ \rangle$ et $C=\langle\ -8\,;-2\ \rangle$

Montrez que le triangle ABC est un triangle isocèle. Est-il équilatéral ?

Exercice 4.18 :

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère : $A=\langle\ 5\,;2\ \rangle$; $B=\langle\ 0\,;0\ \rangle$; $C=\langle\ 4\,;-10\ \rangle$ et $D=\langle\ 9\,;-8\ \rangle$

Montrez que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 4.19* :

Soient $\vec{a} = < a_x\,;a_y >$ et $\vec{b} = < b_x\,;b_y >$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

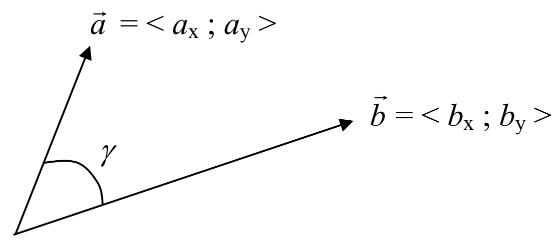
Le but est de déterminer l'angle γ entre ces deux vecteurs.

a) Dessinez le vecteur $\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$

b) Exprimez les composantes du vecteur $\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$

c) En utilisant le théorème du cosinus, exprimez $\cos(\gamma)$ en fonction des normes des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

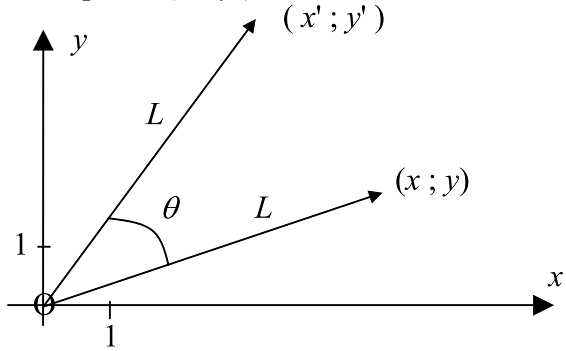
d) Ecrivez le numérateur en utilisant les composantes de $\vec{a}$, $\vec{b}$, développez et simplifiez.



Exercice 4.20* :

Exprimez $(x'\,;y')$ en fonction de $x\,;y$ et θ sans utiliser les fonctions arcsin, arccos ni arctan.

$(x'\,;y')$ est obtenu par rotation d'angle θ autour de l'origine du point $(x\,;y)$.



5. Droites dans $\mathbb{R}^2$

Soient deux vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^2$.
Remarquez que les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

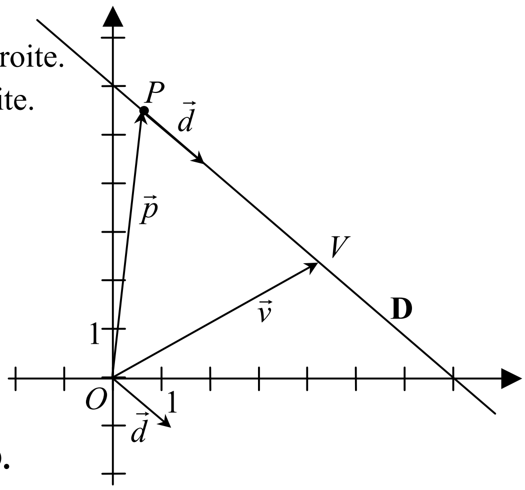
1. Les représentants des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont parallèles.
2. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ont même direction (mais leur sens peut être différent).
3. Il existe un nombre réel λ tel que $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$.

Définition :
Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont **parallèles** si et seulement s'ils satisfont les affirmations ci-dessus.

Remarques :
On dira que le vecteur nul $\vec{0}$ est parallèle à tous les autres.
Pour éviter des confusions, on évitera de prendre le vecteur nul comme vecteur parallèle à un autre.

5.1 Equations vectorielle et paramétrique d'une droite dans $\mathbb{R}^2$

Soit une droite **D** de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\vec{p}$ le vecteur correspondant au point $P = < p_x\,;p_y >$ de la droite.
Soit $\vec{v}$ le vecteur correspondant au point $V = < x\,;y >$ de la droite.
Soit $\vec{d}$ un vecteur parallèle à la droite **D**.



Remarquez que les vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{x} - \vec{p}$ sont parallèles.
Donc $\vec{v} - \vec{p} = \lambda \cdot \vec{d}$ pour un nombre réel λ.
Donc $\vec{v} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{d}$ pour un nombre réel λ.

Remarquez que $\vec{v} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{d}$ pour un nombre réel λ
si et seulement si $\vec{v}$ correspondants à un point de la droite D.

Définitions :
Une équation vectorielle de la droite D est : $\boxed{\vec{v} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{d}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}}$ où
le vecteur $\vec{p}$ correspond à un point de la droite **D** et le vecteur $\vec{d}$ est parallèle à la droite **D**.
Le vecteur $\vec{p}$ est appelé : **un vecteur position** de la droite **D**.
Le vecteur $\vec{d}$ est appelé : **un vecteur directeur** de la droite **D**.

Définition :
Quand on écrit une équation vectorielle d'une droite en composantes :

$$\langle x\,;y\rangle = \langle p_x\,;p_y\rangle + \lambda \cdot \langle d_x\,;d_y\rangle \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{ou plus précisément :}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = p_x + \lambda \cdot d_x \\ y = p_y + \lambda \cdot d_y \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{array}},$$

on parle d'**équation paramétrique de la droite**, au lieu d'équation vectorielle de la droite.
λ est le paramètre de cette équation.

x et y satisfont les deux équations ci-dessus $\Leftrightarrow$ $\langle x\,;y\rangle$ est un point de la droite.

Il y a bijection entre les points $\langle x\,;y\rangle$ de la droite et les nombres réels λ.

Exercice 5.1 :

Déterminez une équation vectorielle de la droite **D** de l'exemple du graphique de la page précédente.
Indication : pour résoudre l'exercice, vous devrez déterminer un vecteur position et un vecteur directeur de la droite.

Exercice 5.2 :

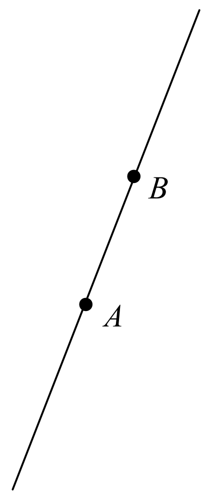
A partir de deux points $A = (a_1 ; a_2)$ et $B = (b_1 ; b_2)$ d'une droite, comment déterminer un vecteur directeur $\vec{d} = (d_1 ; d_2)$ de cette droite puis une équation vectorielle de cette droite ?

Exercice 5.3 :

Ecrivez une équation vectorielle de la droite passant par les points $(-1 ; 5)$ et $(4 ; 2)$.

Exercice 5.4 :

Soient deux points $A = (a_1 ; a_2)$ et $B = (b_1 ; b_2)$ d'une droite. Soit $\vec{d} = (b_1 - a_1 ; b_2 - a_2)$.
Soit l'équation paramétrique de cette droite : $(x ; y) = (a_1 ; a_2) + \lambda \cdot (d_1 ; d_2)$; $\lambda \in \mathbb{R}$.
Examinez les points correspondants aux valeurs suivantes de λ.



Le point correspondant à $\lambda = 0$ est :

Le point correspondant à $\lambda = 1$ est :

Le point correspondant à $\lambda = 0,5$ est :

Le point correspondant à $\lambda = -1$ est :

Le point correspondant à $\lambda = 2$ est :

5.2 Equation cartésienne d'une droite dans $\mathbb{R}^2$

Soient deux points $A = \langle a_x ; a_y \rangle$ et $B = \langle b_x ; b_y \rangle$ d'une droite.

Soit l'équation paramétrique de cette droite : $\begin{cases} x = a_x + \lambda \cdot \langle b_x - a_x \rangle \\ y = a_y + \lambda \cdot \langle b_y - a_y \rangle \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

En combinant ces deux équations, éliminons le paramètre λ pour obtenir une équation qui relie les variables x et y.

$\begin{cases} \lambda = \dfrac{x - a_x}{b_x - a_x} \\ \lambda = \dfrac{y - a_y}{b_y - a_y} \end{cases}$ en éliminant λ, on obtient : $\dfrac{x - a_x}{b_x - a_x} = \dfrac{y - a_y}{b_y - a_y}$

Cette équation est équivalente à : $\boxed{(b_y - a_y) \cdot (x - a_x) = (b_x - a_x) \cdot (y - a_y)}$

qui a l'avantage d'éviter les divisions par zéro quand $a_x = b_x$ ou quand $a_y = b_y$.

Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite passant par les points $A = \langle a_x ; a_y \rangle$ et $B = \langle b_x ; b_y \rangle$.

Exercices 5.5 :

a. Vérifiez que si l'on écrit $\alpha = b_y - a_y$; $\beta = a_x - b_x$ et $\gamma = \alpha \cdot a_x + \beta \cdot a_y$,

l'équation devient : $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \gamma$, qui est l'**équation cartésienne** écrite sous une autre forme. $\langle x ; y \rangle$ représentent les coordonnées des points de la droite.

b. Vérifiez que si $a_x = b_x$ alors l'équation devient : $x = a_x$.

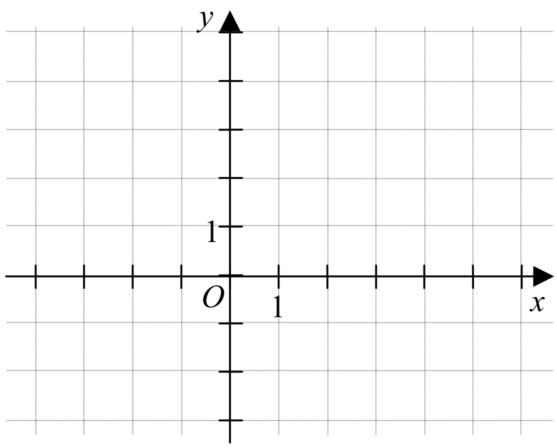
c. Vérifiez que si $a_y = b_y$ alors l'équation devient : $y = a_y$.

d. Comment passer d'une équation cartésienne à une équation paramétrique ?

Exercices 5.6 :

a. Ecrivez l'équation cartésienne de la droite passant par les points $(-1 ; 5)$ et $(4 ; 2)$, puis dessinez cette droite.

b. Ecrivez l'équation cartésienne de la droite passant par les points $(3 ; -3)$ et $(3 ; 5)$, puis dessinez cette droite.



Exercice 5.7 :

Dans $\mathbb{R}^2$ on donne la droite d'équation paramétrique : $\langle x\,;y\rangle=\langle 1\,;-2\rangle+\lambda\cdot\langle 1\,;3\rangle \quad \lambda\in\mathbb{R}$

a) Les points $A=\langle\, 2\,;1\,\rangle$; $B=\langle\, 3\,;2\,\rangle$ et $C=\langle\, 1+\pi\,;-2+3\pi\,\rangle$ appartiennent-ils à la droite définie ci-dessus ?
b) Donnez trois points de la droite définie ci-dessus (différents des points ci-dessus) ;
c) Donnez deux vecteurs directeurs de cette droite ;
d) Donnez l'équation cartésienne de cette droite.

Exercice 5.8 :

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les points : $A=\langle\, -3\,;2\,\rangle$; $B=\langle\, -5\,;7\,\rangle$ et $C=\langle\, -7\,;12\,\rangle$.

a) Déterminez un vecteur directeur de la droite passant par A et B.
b) Déterminez une équation paramétrique de la droite passant par A et B.
c) Le point C est-il sur la droite ?
d) Donnez l'équation cartésienne de cette droite.

Exercice 5.9 :

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les points : $A=\langle\, 1\,;2\,\rangle$; $B=\langle\, 0\,;3\,\rangle$ et $C=\langle\, 5\,;-2\,\rangle$

Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Exercice 5.10* :

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les points :

$A=\langle\, -37\,;28\,\rangle$; $B=\langle\, 52\,;-67\,\rangle$; $C=\langle\, -28\,;37\,\rangle$ et $D=\langle\, 67\,;-52\,\rangle$.

a) Déterminez une équation paramétrique du segment de droite $[A\,;B]$.
b) Déterminez une équation paramétrique de la demi-droite $[C\,;D)$.

6. Intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 6.1 :

Soient deux droites D et D', d'équation paramétrique :

$\langle x\,;y\rangle=\langle -3\,;2\rangle+\lambda\cdot\langle -2\,;5\rangle \quad \lambda\in\mathbb{R}$ pour D et $\langle x\,;y\rangle=\langle -2\,;-3\rangle+\lambda\cdot\langle -3\,;8\rangle \quad \lambda\in\mathbb{R}$ pour D'.

Déterminez le point d'intersection de ces deux droites.

Exercice 6.2 :

Soient deux droites D et D', d'équation cartésienne :

$y=-2,5\cdot x-5,5$ pour D et $y=-\dfrac{8}{3}x-\dfrac{25}{3}$ pour D'.

Déterminez le point d'intersection de ces deux droites.

Exercice 6.3 :

Soient deux droites D et D', d'équation paramétrique et cartésienne :

$\langle x\,;y\rangle=\langle 1\,;-11\rangle+\lambda\cdot\langle -3\,;8\rangle \quad \lambda\in\mathbb{R}$ pour D et $y=-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{11}{2}$ pour D'.

Déterminez le point d'intersection de ces deux droites.

Les résolutions des trois derniers exercices de la page précédente montrent comment déterminer les intersections de droites.

Exercice 6.4 :

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les points : $A=\langle 1;2 \rangle$; $B=\langle 0;3 \rangle$; $C=\langle -3;1 \rangle$ et $D=\langle -5;0 \rangle$

Déterminez le point d'intersection des deux droites (AB) et (CD).

Exercice 6.5 :

Soient deux droites D et D', d'équation paramétrique et cartésienne :

$\langle x\,;y\rangle=\langle p_x\,;p_y\rangle+\lambda\cdot\langle d_x\,;d_y\rangle$ $\lambda\in\mathbb{R}$ pour D et $\alpha\cdot x+\beta\cdot y=\gamma$ pour D'.

a) Déterminez le point d'intersection de ces deux droites.

b) Sous quelles conditions ces deux droites n'ont pas d'intersection ?

Exercice 6.6 :

Soient deux droites D et D', d'équation paramétrique :

$\langle x\,;y\rangle=\langle p_x\,;p_y\rangle+\lambda\cdot\langle d_x\,;d_y\rangle$ $\lambda\in\mathbb{R}$ pour D et $\langle x\,;y\rangle=\langle q_x\,;q_y\rangle+\mu\cdot\langle e_x\,;e_y\rangle$ $\mu\in\mathbb{R}$ pour D'.

a) Déterminez le point d'intersection de ces deux droites.

b) Sous quelles conditions ces deux droites n'ont pas d'intersection ?

Exercice 6.7 :

Soient deux droites D et D', d'équation cartésienne :

$\alpha\cdot x+\beta\cdot y=\gamma$ pour D et $\delta\cdot x+\varepsilon\cdot y=\eta$ pour D'.

a) Déterminez le point d'intersection de ces deux droites.

b) Sous quelles conditions ces deux droites n'ont pas d'intersection ?

Vous pouvez inventer autant d'exercices que vous voulez en remplaçant les paramètres :

$p_x\,;p_y\,;d_x\,;d_y\,;q_x\,;q_y\,;e_x\,;e_y\,;\alpha\,;\beta\,;\gamma\,;\delta\,;\varepsilon\,;\eta$ par des nombres.

7. Parallélisme et orthogonalité de droites dans $\mathbb{R}^2$, produit scalaire.

Remarquez que deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont parallèles et donc si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont multiples.

Remarquez que deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont perpendiculaires.

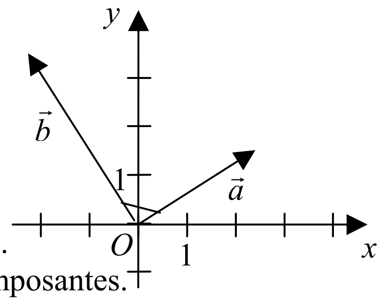
Exercice 7.1 :

Soient deux vecteurs $\vec{a} = (a_1\,;\,a_2)$ et $\vec{b} = (b_1\,;\,b_2)$. Trouvez une équation reliant les composantes de ces vecteurs qui est satisfaite exactement quand ces deux vecteurs sont perpendiculaires.

Indications :

$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$, dessinez un représentant du vecteur $\vec{c}$.

Ecrivez les composantes du vecteur $\vec{c}$.



Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaire si et seulement si les longueurs des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ satisfont le théorème de Pythagore.

Rappelez vous comment se calcule la norme d'un vecteur à partir de ses composantes.

$\|\vec{a}\|^2 =$ $\qquad\qquad$ $\|\vec{b}\|^2 =$ $\qquad\qquad$ $\|\vec{c}\|^2 =$

Ecrivez le théorème de Pythagore et simplifiez.

Vérifiez que vous avez montré l'affirmation suivante :

$\vec{a} = (a_1\,;\,a_2)$ et $\vec{b} = (b_1\,;\,b_2)$ sont perpendiculaires si et seulement si $\boxed{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0}$

Définitions :

L'expression : $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ s'appelle le **produit scalaire** de $\vec{a}$ avec $\vec{b}$ et on le note : $\vec{a} \bullet \vec{b}$.

Donc le **produit scalaire** de $\vec{a}$ avec $\vec{b}$ est : $\boxed{(a_1\,;\,a_2) \bullet (b_1\,;\,b_2) \overset{\text{définition}}{=} a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}$

Dire que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont **orthogonaux** est une autre manière de dire qu'ils sont perpendiculaires.

Dans ce cas, on dit aussi que $\vec{a}$ est **orthogonal** à $\vec{b}$.

Un vecteur perpendiculaire à une droite est dit **normal** à cette droite.

Exercice 7.2 :

Soit une droite **D** d'équation cartésienne : $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \gamma$

a) Trouvez deux points de cette droite. Par exemple du type $A = (a_1\,;\,0)$ et $B = (0\,;\,b_2)$.

b) Montrez que $\vec{d} = (\beta\,;\,-\alpha)$ est un vecteur directeur de cette droite.

c) Montrez que le vecteur $\vec{n} = (\alpha\,;\,\beta)$ est normal à cette droite.

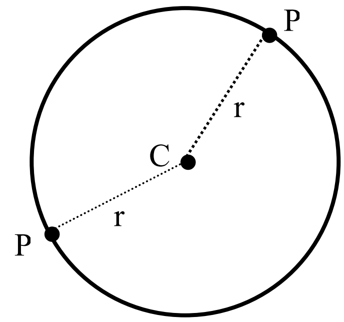
Exercice 7.3 :

Soient les droites : $\mathbf{D_1}$: $4x - 2y = 1$ et $\mathbf{D_2}$: $3x + 6y = 5$.

Montrez que ces deux droites sont orthogonales.

8. Cercles dans $\mathbb{R}^2$

Définition :

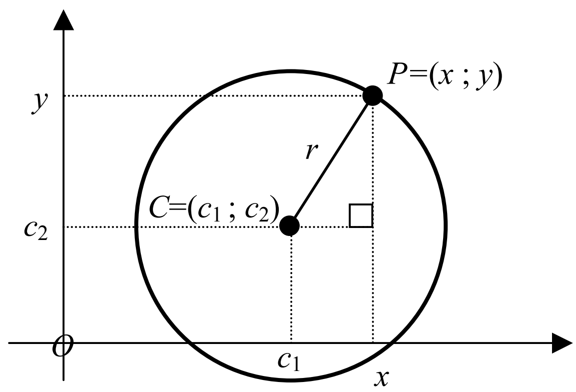


Un **cercle** Γ (gamma majuscule) est un ensemble de **points P** situés à une même distance d'un point donné. Le point donné est le **centre C** du cercle et la distance donnée le **rayon r** du cercle.

Exercice 8.1 :
Soit $P=(x\,;y)$ un point appartenant au **cercle** Γ de rayon r et de centre $C=(0\,;0)$.
Déterminez une équation reliant x et y.

Exercice 8.2 :
Soit $P=(x\,;y)$ un point appartenant au **cercle** Γ de rayon r et de centre $C=(c_1\,;c_2)$.

Déterminez une équation reliant x et y.



En résumé l'exercice 8.2 montre que

$$(x\,;y)\in\Gamma \quad\Leftrightarrow$$

Cette équation s'appelle **l'équation cartésienne** du cercle Γ.

Exercice 8.3 :
Déterminez l'équation cartésienne du cercle de rayon r et de centre $C=(c_1\,;c_2)$ où :
a) $C=(3\,;0)$ et $r=2$.
b) $C=(17\,;-24)$ et $r=\sqrt{12}$.
c) $C=(0\,;0)$ et $r=1$. Comment s'appelle ce cercle ?

Exercice 8.4* :
Déterminez une **équation paramétrique** du cercle de rayon r et de centre $C=(c_1\,;c_2)$.

Exercice 8.5 :
L'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ détermine bien un cercle.
Quel est son centre et quel est son rayon ?

Exercice 8.6 :
L'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 4 = 0$ détermine-t-il un cercle.
Si oui, quel est son centre et quel est son rayon ?

Exercice 8.7 :
L'équation cartésienne $4x^2 + 4y^2 + 40x - 48y + 219 = 0$ détermine-t-il un cercle.
Si oui, quel est son centre et quel est son rayon ?

Exercice 8.9 :
L'équation cartésienne $4x^2 + 4y^2 + 40x - 48y + 260 = 0$ détermine-t-il un cercle.
Si oui, quel est son centre et quel est son rayon ?

Exercice 8.10 :
a) Comment passer d'une équation cartésienne d'un cercle à une équation paramétrique du cercle ?
b) Comment passer d'une équation paramétrique d'un cercle à une équation cartésienne du cercle ?

Exercice 8.11 :
Soit Γ un cercle d'équation $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 36$.

a) Donnez le centre et le rayon de Γ.

b) Le point A=(2 ; –4) appartient-il à Γ ?

c) Trouvez les coordonnées des points de Γ ayant pour abscisse $x = -2$.

d) Trouvez les coordonnées des points de Γ ayant pour ordonnée $y = 0$.

Réponses en valeur exacte.

Exercice 8.12 :
Si cela est possible, déterminer le centre C et le rayon r des cercles suivants :

a) $\Gamma :\ x^2 + y^2 - 25 = 0$

b) $\Gamma :\ x^2 + y^2 + 36 = 0$

c) $\Gamma :\ x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

d) $\Gamma :\ x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 = 0$

e) $\Gamma :\ x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

f) $\Gamma :\ x^2 + y^2 - 27 = 0$

g) $\Gamma :\ 2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y + 8 = 0$

h*) $\Gamma :\ 9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$

Exercice 8.13* :
Déterminer *l'équation*, *le centre* et *le rayon* du cercle passant par les points :
$E = (3\ ;\ 1)$; $F = (0\ ;\ 2)$; $G = (-2\ ;\ -4)$.

9. Intersection de droites et de cercles dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 9.1 :
Soit le cercle Γ d'équation : $x^2 + y^2 - 25 = 0$ et
la droite D d'équation : $\langle x\,;\,y\rangle = \langle -18\,;1\rangle + \lambda \cdot \langle 7\,;1\rangle$ $\lambda \in \mathbb{R}$
Déterminez les points d'intersections de cette droite D et de ce cercle Γ.

Exercice 9.2 :
Soit le cercle Γ d'équation : $(x-3)^2 + (y+7)^2 - 169 = 0$ et
la droite D d'équation : $\langle x\,;\,y\rangle = \langle 8\,;5\rangle + \lambda \cdot \langle 2\,;7\rangle$ $\lambda \in \mathbb{R}$.
Déterminez les points d'intersections de cette droite D et de ce cercle Γ.

Exercice 9.3 :
Soit le cercle Γ d'équation : $(x-3)^2 + (y+7)^2 - 169 = 0$ et
la droite D d'équation : $\langle x\,;\,y\rangle = \langle 0\,;-23\rangle + \lambda \cdot \langle 2\,;7\rangle$ $\lambda \in \mathbb{R}$.
Déterminez les points d'intersections de cette droite D et de ce cercle Γ.

Exercice 9.4 :
Soit le cercle Γ d'équation : $(x-3)^2 + (y+7)^2 - 169 = 0$ et
la droite D d'équation : $y = 3{,}5 \cdot x - 23$.
Déterminez les points d'intersections de cette droite D et de ce cercle Γ.
Une fois résolu, vérifiez que cette droite D est la même que celle des exercices 9.2 et 9.3.

Exercice 9.5 :
Soit le cercle Γ d'équation : $x^2 + y^2 - 50 = 0$ et
la droite D d'équation : $y = 3 \cdot x + 1$.
Déterminez les points d'intersections de cette droite D et de ce cercle Γ.

Exercice 9.6* :
Soit les cercles Γ_1 d'équation : $x^2 + y^2 - 36 = 0$ et Γ_2 d'équation : $(x-4)^2 + (y-1)^2 - 31 = 0$.
Déterminez les points d'intersections de ces deux cercles.

Exercice 9.7* :
Soit les cercles Γ_1 d'équation : $x^2 + y^2 - 9 = 0$ et Γ_2 d'équation : $(x-6)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0$.
Déterminez les points d'intersections de ces deux cercles.

Exercice 9.8* :
Soit les ellipses E_1 d'équation : $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ et E_2 d'équation : $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$.
Déterminez les points d'intersections de ces deux ellipses. (Il y en a 4.)

Remerciements :
Je tiens à remercier M. Jean-Pierre Bichsel et M. Serge Piccione pour leur notes de cours desquelles je me suis inspiré pour écrire ce cours et les exercices qui lui sont associés.