❶ Cet exercice peut être résolu de deux manières différentes.

1) On peut effectuer une divisions polynomiales et déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a et b, le reste s'annule.
2) Plus simplement, on évalue le polynôme $P(x)$ en la ou les valeur(s) qui annule(nt) le polynôme diviseur $D(x)$. Ensuite il faut déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a et b, le résultat est nulle.

a) Première méthode

$$\begin{array}{l|l} x^2+5x+a & x+2 \\ \cline{2-2} -x^2-2x & x+3 \\ \cline{1-1} \quad 3x+a & \\ \quad -3x-6 & \\ \cline{1-1} \qquad a-6 \quad = \text{le reste} & \end{array}$$

Le reste est nulle pour $a = 6$, donc $x^2 + 5x + a$ est divisible par $x + 2 \Leftrightarrow a = 6$.

a) Deuxième méthode, plus simple.

$P(-2) = 4 - 10 + a = 6 - a$
$P(x) = x^2 + 5x + a$ s'annule en $x = -2$ pour $a = 6$,
donc $x^2 + 5x + a$ est divisible par $x + 2 \Leftrightarrow a = 6$.

b) Deuxième méthode, plus simple.

$P(3) = 54 + a\cdot 3 - 3 = 51 + a\cdot 3 = 3\cdot(17 + a)$
$P(x) = 2x^3 + a\cdot x - 3$ s'annule en $x = 3$ pour $a = -17$,
donc $2x^3 + a\cdot x - 3$ est divisible par $x - 3 \Leftrightarrow a = -17$.

c) Deuxième méthode, plus simple.

$P(1) = 1 + a - 5 = a - 4$
$P(x) = x^3 + a\cdot x - 5$ s'annule en $x = 1$ pour $a = 4$,
donc $x^3 + a\cdot x - 5$ est divisible par $x - 1 \Leftrightarrow a = 4$.

d) Première méthode

$$\begin{array}{l|l} x^3+ax^2 \qquad +bx \qquad +6 & x^2-5x+6 \\ \cline{2-2} -x^3+5x^2 \qquad -6x & x+5+a \\ \cline{1-1} (5+a)\cdot x^2+(b-6)\cdot x \ +6 & \\ -(5+a)\cdot x^2+(25+5a)\cdot x-30-6a & \\ \cline{1-1} \qquad (5a+b+19)\cdot x-6a-24 \quad = \text{le reste} & \end{array}$$

Le reste est nulle si $5a + b + 19 = 0$ et $6a + 24 = 0$. Donc il est nulle si $a = -4$ et $b = 1$.

Donc $x^3 + a\cdot x^2 + b\cdot x + 6$ est divisible par $x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow a = -4$ et $b = 1$.

d) Deuxième méthode, plus simple (?). $D(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)\cdot(x - 3)$ s'annule en $x = 2$ et $x = 3$.

$P(2) = 8 + a\cdot 4 + b\cdot 2 + 6 = 4a + 2b + 14 = 0.$

$P(3) = 27 + a\cdot 9 + b\cdot 3 + 6 = 9a + 3b + 33 = 0.$

Ici, il faut résoudre un système de deux équations. La solution est : $a = -4$ et $b = 1$.

Donc $x^3 + a\cdot x^2 + b\cdot x + 6$ est divisible par $x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow a = -4$ et $b = 1$.

e) Méthode, plus simple (?). $D(x) = x^2 + x - 2 = (x + 2)\cdot(x - 1)$ s'annule en $x = -2$ et $x = 1$.

$P(-2) = 16 - a\cdot 8 + 4 - b\cdot 2 - 6 = -8a - 2b + 14 = 0$.

$P(1) = 1 + a + 1 + b - 6 = a + b - 4 = 0$.

Ici, il faut résoudre un système de deux équations. La solution est : $a = 2$ et $b = 3$.

Donc $x^4 + a\cdot x^3 + x^2 + b\cdot x - 6$ est divisible par $x^2 + x - 2 \Leftrightarrow a = 1$ et $b = 3$.
Remarque : la division polynomial est plus compliquée, mais donnerait comme reste $R(x) = (b + 3a - 6)\cdot x + 2\cdot(1 - a)$, qui s'annule pour $a = 1$ et $b = 3$. Dans ce cas, il n'y a pas de système de deux équations à résoudre.

---

❷ a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ Avec Viète : $a = 3$; $b = -5$; $c = 2$; $\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 25 - 4\cdot 3\cdot 2 = 1$

Zéros : $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5 \pm 1}{6} = \begin{cases} 1 \\ 2/3 \end{cases}$ S = {2/3 ; 1}

Plus rapide est de voir qu'on peut factoriser : $3x^2 - 5x + 2 = (3x - 2)\cdot(x - 1)$, d'où S = {2/3 ; 1}

b) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
On recherche une racine rationnelle de ce polynôme. Le théorème page 6 du cours nous indique que si p/q est une racine rationnelle de P, alors p divise -6 et q divise 1.
Donc les seuls racines rationnelles envisageables sont : -6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6.
les images de nombres négatifs seront négatifs, donc il est inutile de tester les nombres négatifs.
$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$, on a trouvé une racine !
$P(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$, on a trouvé une deuxième racine !
$P(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$, on a trouvé une troisième racine !
Un polynôme de degré trois ne peut pas avoir plus de trois racines, donc on les a toutes.
S = { 1 ; 2 ; 3 }

c) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x = x\cdot(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = 0$
Une racine est évidente : $x = 0$.
Notons $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ et cherchons une racine rationnelle de ce polynôme. Le théorème page 6 du cours nous indique que si p/q est une racine rationnelle de P, alors p divise -6 et q divise 1.
Donc les seuls racines rationnelles envisageables sont : -6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6.
$P(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$, on a trouvé une racine !
$P(-2) = -8 + 8 + 10 - 6 = 4$, donc -2 n'est pas une racine !
$P(-3) = -27 + 18 + 15 - 6 = 0$, on a trouvé une deuxième racine !
$P(1) = ... < 0$.
$P(2) = 8 + 8 - 10 - 6 = 0$, on a trouvé une troisième racine !
Un polynôme de degré quatre ne peut pas avoir plus de quatre racines, donc on les a toutes.
S = { –3 ; –1 ; 0 ; 2 }

d) $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 = 0$

On recherche une racine rationnelle de ce polynôme. Le théorème page 6 du cours nous indique que si p/q est une racine rationnelle de P, alors p divise 6 et q divise 2.
Donc les seuls valeurs envisageables sont : $p=\pm 6$; $p=\pm 3$; $p=\pm 2$; $p=\pm 1$ et $q=1$ ou $q = 2$.
On essaie... en commençant par les calculs les plus simples.
$P(1) = 2 - 9 + 7 + 6 > 0$.
$P(-1) = -2 - 9 - 7 + 6 < 0$.
$P(2) = 16 - 36 + 14 + 6 = 0$, on a trouvé une racine !
$P(3) = 54 - 81 + 21 + 6 = 0$, on a trouvé une deuxième racine !
La dernière racine est plus embêtante à trouver. Soit on essaie toutes les possibilités en espérant obtenir toutes les racines, soit on fait une division polynomiale, pour se ramener à la recherche de racines d'un polynôme de degré plus petit que 3.
En cherchant plus on trouve que $P(-1/2) = -1/4 - 9/4 - 7/2 + 6 = 0$.
Par division polynomiale, on trouve que : $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 = (x-2)\cdot(x-3)\cdot(2x+1)$
Donc l'ensemble des solutions est : S = { $-1/2$; 2 ; 3}

e) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 0$

Le polynôme a été simplifié par 2, ce qui simplifie le problème.
On recherche une racine rationnelle de ce polynôme. Le théorème page 6 du cours nous indique que si p/q est une racine rationnelle de P, alors p divise 3 et q divise 1.
Donc les seuls racines rationnelles envisageables sont : -3 ; -1 ; 1 ; 3.
On essaie... en commençant par les calculs les plus simples.
$P(1) = 1 - 2 - 4 + 2 + 3 = 0$, on a trouvé une racine !
$P(-1) = 1 + 2 - 4 - 2 + 3 = 0$, on a trouvé une deuxième racine !
$P(3) = 81 - 54 - 36 + 6 + 3 = 0$, on a trouvé une troisième racine !
$P(-3) = 81 + 54 - 36 - 6 + 3 > 0$.
On peut soit argumenter que si 3 racines sont rationnelles, alors une éventuelle quatrième racine devrait aussi être entière, soir effectuer une division polynomiale, pour montrer qu'il n'y a pas d'autres racines que celles trouvée.
Par division polynomiale par $(x - 1)\cdot(x + 1)\cdot(x - 3)$, on obtient la factorisation :
$P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 \cdot (x-1) \cdot (x-3)$
Donc on a trois racines : S = { -1 ; 1 ; 3 }
On dit que -1 est une racine double, car le facteur $(x - (-1))$ apparaît au carré.

f) $P(x) = (x^2 + 1)\cdot(x^2 + 9)\cdot(x + 2)\cdot(x - 2) = 0$

Ici, le problème est beaucoup plus simple, car le polynôme est déjà complètement factorisé.
Donc l'ensemble des solutions est : S = { -2 ; 2}

---

❸ a) $P(x) = (x-1)\cdot(2x+5)\cdot(3-x) > 0$

La factorisation est utile pour résoudre ce problème avec un tableau de signes.

x		$-5/2$		1		3	
$x - 1$	–	–	–	0	+	+	+
$2x + 5$	–	0	+	+	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	+	+	0	–
$P(x)$	+	0	–	0	+	0	–

L'ensemble sur lequel P est positif est : S = $]-\infty ; -5/2[\cup]1 ; 3[$

❸suite b) $P(x) = (x-1)^2 \cdot (x+3) \leq 0$

La factorisation est utile pour résoudre ce problème avec un tableau de signes.

x		-3		1	
$(x-1)^2$	+	+	+	0	+
$x+3$	–	0	+	+	+
$P(x)$	–	0	+	0	+

L'ensemble sur lequel P est négatif ou nul est : S = $]-\infty\,;-3] \cup \{1\}$.

c) $P(x) = x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x = x \cdot (x^3 + 4x^2 + x - 6) = x \cdot (x-1) \cdot (x^2 + 5x + 6)$

$P(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) < 0$

La factorisation est utile pour résoudre ce problème avec un tableau de signes.

x		-3		-2		0		1	
$x+3$	–	0	+	+	+	+	+	+	+
$x+2$	–	–	–	0	+	+	+	+	+
x	–	–	–	–	–	0	+	+	+
$x-1$	–	–	–	–	–	–	–	0	+
$P(x)$	+	0	–	0	+	0	–	0	+

L'ensemble sur lequel P est négatif est : S = $]-3\,;-2[\ \cup\ ]0\,;1[$.

d) $P(x) = (x^2+1) \cdot (x+2) \cdot (x-3) \cdot (8x+2) \geq 0$

La factorisation est utile pour résoudre ce problème avec un tableau de signes.

x		-2		$-1/4$		3	
$x+2$	–	0	+	+	+	+	+
$8x+2$	–	–	–	0	+	+	+
$x-3$	–	–	–	–	–	0	+
x^2+1	+	+	+	+	+	+	+
$P(x)$	–	0	+	0	–	0	+

L'ensemble sur lequel P est positif ou nul est : S = $[-2\,;-1/4] \cup [3\,;\infty[$

---

❹ $P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = (x+4) \cdot (x+3) \cdot (x-1)$ Racines (P) = $\{-4\,;-3\,;1\}$

Ici encore, la factorisation est utile. On vérifie que le polynôme s'annule aux trois mêmes endroits que la courbe du graphique. De plus, l'ordonnée à l'origine vaut environ -12 selon le graphique, qui est égal à l'ordonnée à l'origine du polynôme P. La courbe du graphique est typique de celle d'un polynôme de degré 3, elle s'annule aux mêmes valeurs que le polynôme P et possède la même ordonnée à l'origine. Donc le graphique pourrait être celui du polynôme.

On sait de manière générale que :

- si deux polynômes sont de même degré
- si leur degré est égal au nombre de racines
- si leurs racines sont les mêmes
- si ils sont égaux en un point qui n'est pas une racine

Alors ces deux polynômes sont égaux.

Plus généralement, si deux polynômes de degré n sont égaux en $n + 1$ points, alors ils sont égaux.