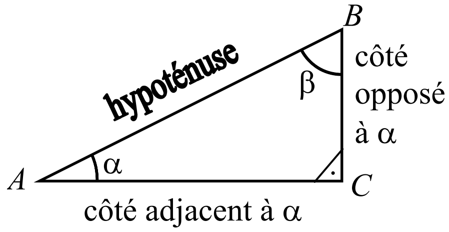
VIII. Trigonométrie dans le triangle rectangle

<u>Cadre constant dans ce chapitre :</u>
ABC désignera les sommets d'un triangle rectangle.
L'angle de sommet C sera l'angle droit.
α désignera la mesure de l'angle de sommet A.
β désignera la mesure de l'angle de sommet B.



<u>Définition :</u>
Le plus long côté du triangle rectangle s'appelle : l'hypoténuse

Les autres côtés du triangle rectangle s'appellent : les cathètes

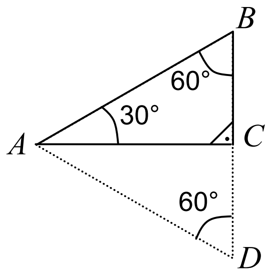
Le **côté** adjacent à α est le côté $[AC]$.

Le **côté** opposé à α est le côté $[BC]$.

Le **côté** opposé à β est le côté $[AC]$.

Le **côté** adjacent à β est le côté $[BC]$.

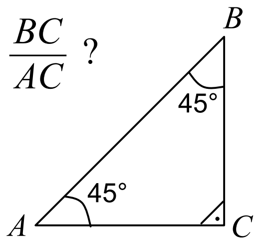
Les trois côtés sont reliés par la formule : $AB^2 = AC^2 + BC^2$



<u>Exercice VIII.1 :</u>

a) Si l'angle $\alpha = 30°$ que valent le rapport de longueurs : $\frac{BC}{AB}$?

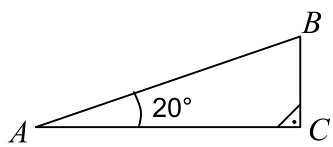
$\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$, car ABD est un triangle équilatéral et $BC = \frac{1}{2} \cdot BD$.



b) Si l'angle $\alpha = 45°$ que valent les rapports de longueurs : $\frac{BC}{AB}$; $\frac{AC}{AB}$; $\frac{BC}{AC}$?

$\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \frac{BC}{AC} = 1$

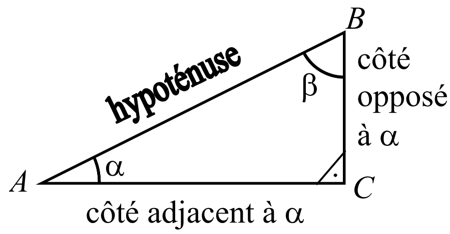
Cela s'obtient par Pythagore et car $AC = BC$.
Donc $AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow 2 \cdot AC^2 = AB^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2} \cdot AB$



c) Si l'angle $\alpha = 20°$ que vaut le rapport de longueurs : $\frac{BC}{AB}$?

La page suivante indique comment obtenir des résultats approximatifs.

Selon le théorème de Thalès, les rapports $\frac{BC}{AB}$; $\frac{AC}{AB}$; $\frac{BC}{AC}$ ne dépendent que de l'angle α.



On peut donc définir :

sin(α) $= \frac{BC}{AB} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$	On dit : "**Sinus** de alpha"
cos(α) $= \frac{AC}{AB} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$	On dit : "**Cosinus** de alpha"
tan(α) $= \frac{BC}{AC} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \alpha}{\text{longueur du côté adjacent à } \alpha}$	On dit : "**Tangente** de alpha"

Ces trois définitions sont TRES IMPORTANTES, et seront utilisées jusqu'à la fin du collège et dans beaucoup d'autres disciplines scientifiques.

Voici un truc mnémotechnique pour s'en souvenir :

"**sin op ip**" **sin**us = **op**posé sur **hyp**oténuse.
"**cos adj ip**" **cos**inus = **adj**acent sur **hyp**oténuse.
"**tan op adj**" **tan**gente = **op**posé sur **adj**acent.

Remarque concernant la calculatrice :
Chaque calculatrice possède des touches permettant de calculer des approximations numériques des fonctions Sinus, Cosinus et Tangente.

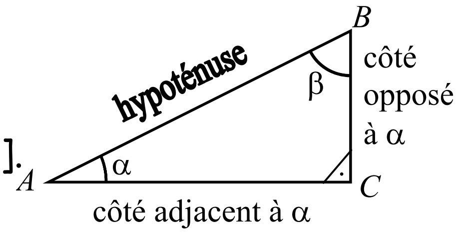
Attention : Un angle peut être exprimé autrement qu'en degrés.

Quand vous calculerez le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle en degrés sur la calculatrice, vous devrez vous assurer d'avoir sélectionné le mode de calcul d'angles en degrés.

Exercice VIII.2 :
Assurez-vous que votre calculatrice calculera en degrés, puis calculez :

sin(0°) ≈ 0	cos(0°) ≈ 1	tan(0°) ≈ 0
sin(20°) ≈ 0,342020143	cos(20°) ≈ 0,939692621	tan(20°) ≈ 0,363970234
sin(30°) ≈ 0,5	cos(30°) ≈ 0,866025404	tan(30°) ≈ 0,577350269
sin(45°) ≈ 0,707106781	cos(45°) ≈ 0,707106781	tan(45°) ≈ 1
sin(60°) ≈ 0,866025404	cos(60°) ≈ 0,5	tan(60°) ≈ 1,732050808
sin(70°) ≈ 0,939692621	cos(70°) ≈ 0,342020143	tan(70°) ≈ 2,747477419
sin(90°) ≈ 1	cos(90°) ≈ 0	tan(90°) ≈ error !

Exercice VIII.3 :



a) Si l'angle $\alpha = 70°$ et l'hypoténuse mesure 1 [cm], que mesurent les cathètes ? Elles mesurent :
$\sin(70°) \approx 0{,}9397$ [cm] et $\cos(70°) \approx 0{,}342$ [cm].

b) Si l'angle $\alpha = 80°$ et l'hypoténuse mesure 2 [cm], que mesurent les cathètes ?
Elles mesurent $2 \cdot \sin(80°) \approx 1{,}9696$ [cm] et $2 \cdot \cos(80°) \approx 0{,}3473$ [cm].

c) Si l'angle $\alpha = 12°$ et la plus grande cathète mesure 9 [cm], que mesurent les autres côtés ?
Puisque $\alpha < 45°$, la plus grande cathète est le côté adjacent à α. Donc
l'hypoténuse = $9 / \cos(12°) \approx 9{,}20$ [cm] et
l'autre cathète = $9 \cdot \tan(12°) \approx 1{,}913$ [cm].

Propriétés :

1) $\alpha + \beta =$ 90° car $\alpha + \beta + 90° = 180°$ = la somme des angles d'un triangle

2) Par symétrie sur le triangle rectangle on voit que :

$$\sin(\beta) = \boxed{\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos(\beta) = \boxed{\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)} = \frac{BC}{AB}$$

3) $\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$ car $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{BC / AB}{AC / AB} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC} = \tan(\alpha)$

4) $\boxed{(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1}$ On écrit aussi plus simplement : $\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$

Ceci est une conséquence directe du théorème de Pythagore. Justifiez pourquoi.

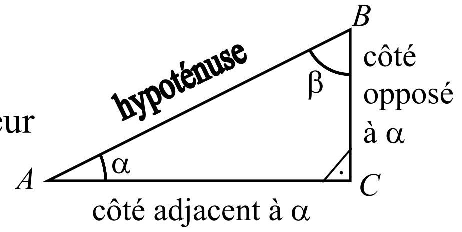
$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$$

La première égalité vient des définitions de sinus et cosinus.
La troisième égalité vient du théorème de Pythagore.

C'est une formule très importante que vous devez connaître absolument !!!

5) Puisque dans un triangle rectangle, le sinus et le cosinus d'un angle sont positifs, on déduit de cette formule que :

$\boxed{\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}}$ et $\boxed{\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}}$



Remarque :

Dans le cas où l'angle α est très petit, l'angle β est très proche de 90°, la longueur $\boldsymbol{BC}$ est très petite et la longueur $\boldsymbol{AC}$ est très proche de la longueur $\boldsymbol{AB}$.

On en déduit que :

i) Le sinus d'un très petit angle est très proche de zéro

ii) Le cosinus d'un très petit angle est très proche de un

iii) Le sinus d'un angle proche de 90° est proche de un

iv) Le cosinus d'un angle proche de 90° est proche de zéro

On étend donc les définitions de sinus, cosinus et tangente aux angles de 0° et de 90° par les valeurs définies dans la table suivante :

Quelques valeurs de sinus, cosinus et tangent dont il faut se souvenir :

1) $\sin(0°) = \cos(90°) = 0 = \dfrac{\sqrt{0}}{2}$ $\qquad \tan(0°) = 0$

2) $\sin(30°) = \cos(60°) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{1}}{2}$ $\qquad \tan(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3) $\sin(45°) = \cos(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \tan(45°) = 1$

4) $\sin(60°) = \cos(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \tan(60°) = \sqrt{3}$

5) $\sin(90°) = \cos(0°) = 1 = \dfrac{\sqrt{4}}{2}$ $\qquad \tan(90°) =$ pas défini

Remarques concernant la calculatrice :

Chaque calculatrice possède des touches permettant de calculer des approximations numériques des fonctions Sinus, Cosinus et Tangente.

Elles permettent aussi d'effectuer le calcule inverse, c.-à-d. de calculer un angle connaissant le rapport de longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle.

Attention : Un angle peut être exprimé autrement qu'en degrés.

$\arcsin\left(\dfrac{BC}{AB}\right) = \alpha =$ l'angle opposé au côté $[BC]$.	On dit "**arc sinus** de BC sur AB"
$\arccos\left(\dfrac{AC}{AB}\right) = \alpha =$ l'angle adjacent au côté $[AC]$.	On dit "**arc cosinus** de AC sur AB"
$\arctan\left(\dfrac{BC}{AC}\right) = \alpha$	On dit "**arc tangente** de BC sur AC"

Sur la calculatrice, "arcsin" se note $\sin^{-1}$
"arccos" se note $\cos^{-1}$
"arctan" se note $\tan^{-1}$

Corrigé des exercices :

1) Conception d'un toboggan de piscine

Commençons par la rampe de droite du toboggan qui forme l'hypoténuse d'un triangle rectangle de 5 mètres de hauteur et d'angle 35° avec l'horizontale.
La largeur du triangle égale 5 / tan(35°) ≈ 7,14 mètres et
la longueur de la rampe = longueur de l'hypoténuse = 5 / sin(35°) ≈ 8,72 mètres.

La rampe de gauche du toboggan forme l'hypoténuse d'un triangle rectangle de 5 mètres de hauteur et d'angle 25° avec l'horizontale.
La largeur du triangle égale 5 / tan(25°) ≈ 10,72 mètres et
la longueur de la rampe = longueur de l'hypoténuse = 5 / sin(25°) ≈ 11,83 mètres.

La rampe du milieu du toboggan est horizontale de longueur environ égale à,
30 - 7,14 - 10,72 mètres = 12,14 mètres.

La longueur totale du toboggan est d'environ 11,83 + 12,14 + 8,72 mètres = 32,69 mètres.

---

2) Elévation du soleil

La personne avec son ombre forme les cathètes d'un triangle rectangle.

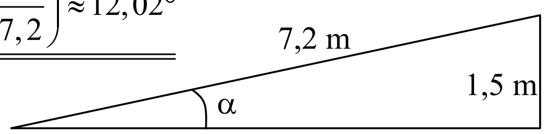
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{hauteur de la personne}}{\text{longueur de l'ombre}} = \frac{1,5}{1,2} = 1,25 \quad \text{Donc} \quad \underline{\underline{\alpha = \arctan(1,25) \approx 51,34°}}$$

L'angle d'élévation du soleil est d'environ 51,34°.

---

3) Construction d'une rampe

La rampe forme l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côté opposé à l'angle cherche de longueur 1,5 mètres. Donc $\sin(\alpha) = \dfrac{1,5}{7,2} = 0,208\overline{3}$ Donc $\underline{\underline{\alpha = \arcsin\left(\dfrac{1,5}{7,2}\right) \approx 12,02°}}$



L'angle que la rampe devrait faire avec l'horizontale est d'environ 12,02°.

---

4) Jeu vidéo

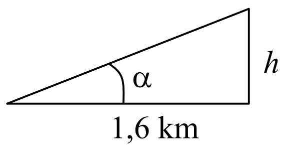
Si la balle met t secondes pour atteindre le canard, alors le triangle rectangle de sommet "O", "A" et "canard" a une hypoténuse de longueur $25 \cdot t$ cm et de côté "A"_"canard" de longueur $7 \cdot t$ cm.

Donc $\sin(\text{l'angle de tir : } \varphi) = \dfrac{7 \cdot t}{25 \cdot t} = \dfrac{7}{25} = 0,28$

L'angle de tir devrait être égal à acrsin(0,28) ≈ 16,26°.

---

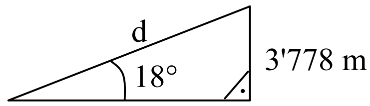
5) L'ouvrage le plus haut



L'angle α = 21° 20' 24". On lit : "21 degrés, 20 minutes et 24 secondes"
Cela se transforme en degrés de la manière suivante :
α = 21 + 20 / 60 + 24 / 3600 = 21,34°
Sur la TI-36X II, on peut taper "21°20'24" ="
où ° ' " sont sur la 3$^{\text{ème}}$ touche de la 2$^{\text{ème}}$ ligne de boutons.

$\dfrac{h}{1,6 \text{ km}} = \tan(21,34°)$, donc la hauteur de l'ouvrage est de tan(21,34°) · 1,6 km ≈ 0,625 km = 625 m.

6) L'étudiant au Japon



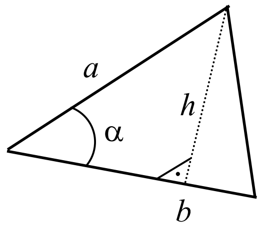
La position de l'étudiant, le sommet et la base du mont Fuji forment un triangle rectangle.

$$\frac{3'778\text{ m}}{\text{d}} = \sin(18°) \quad \text{donc} \quad d = \frac{3'778\text{ m}}{\sin(18°)} \approx 12'226\text{ m}$$

L'étudiant se trouve à 12,226 kilomètres à vol d'oiseau du sommet du mont Fuji.

---

7) L'aire d'un triangle



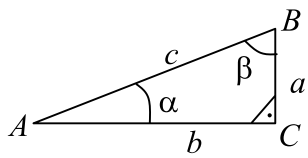
$\frac{h}{a} = \sin(\alpha)$, donc $h = a \cdot \sin(\alpha)$

L'aire du triangle = $\frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a \cdot \sin(\alpha)$

Voici une nouvelle formule : $\boxed{\text{l'aire du triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\alpha)}$

---

8) Côtés et angles manquants



a) $b = c \cdot \sin(\beta) \approx$ 4,33 cm $\qquad a = c \cdot \cos(\beta) \approx$ 1,95 cm
   $\alpha = 90° - \beta = 24{,}2°$

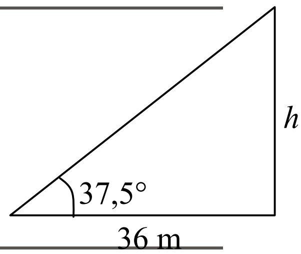
b) $c = a / \cos(\beta) \approx$ 116,20 cm $\qquad b = a \cdot \tan(\beta) \approx$ 29,09 cm
   $\alpha = 90° - \beta = 75{,}5°$

c) $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{18{,}21^2 - 4{,}95^2} = \sqrt{307{,}1016} \approx 17{,}52$ cm par Pythagore
   $\alpha = \arccos(b / c) \approx 74{,}23°$ $\qquad \beta = \arcsin(b / c) \approx 15{,}77°$ ($\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 74{,}23° \approx 15{,}77°$)

d) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{22{,}3^2 + 46{,}8^2} = \sqrt{2'687{,}53} \approx 51{,}84$ cm par Pythagore
   $\alpha = \arctan(a / b) \approx 25{,}48°$ $\qquad \beta = \arctan(b / a) \approx 64{,}52°$ ($\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 25{,}48° \approx 64{,}52°$)

---

9) La tour

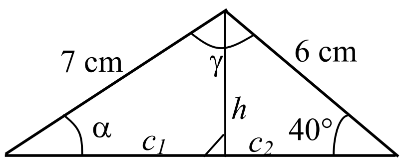


$\frac{h}{36\text{ m}} = \tan(37{,}5°)$ donc $h = 36 \cdot \tan(37{,}5°) \approx 27{,}62$ mètres

La hauteur de la tour est d'environ 27,62 mètres.

---

10) Challenge moyen



h = 6 · sin(40°) ≈ 3,86 cm.

α = arcsin(h / 7) ≈ arcsin(3,86 / 7) ≈ 33,47 °

β = 180° - 40° - α ≈ 180° - 40° - 33,47° ≈ 106,53°

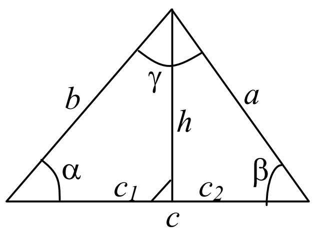
$c_1 = \sqrt{7^2 - h^2} \approx \sqrt{7^2 - 3{,}86^2} \approx \sqrt{34{,}1} \approx 5{,}84$ cm

$c_2 = \sqrt{6^2 - h^2} \approx \sqrt{6^2 - 3{,}86^2} \approx \sqrt{21{,}1} \approx 4{,}59$ cm

$c = c_1 + c_2 \approx 5{,}84 + 4{,}59 \approx 10{,}43$ cm

---

11) Super challenge $a = 30$ cm; $b = 35$ cm; $c = 40$ cm. (Sans explications !)



$c_1 + c_2 = c$; $\quad h^2 = a^2 - c_2^2$; $\quad h^2 = b^2 - c_1^2$; $\quad \Rightarrow \quad a^2 - c_2^2 = b^2 - c_1^2$

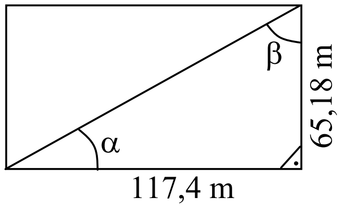
$b^2 - a^2 = c_1^2 - c_2^2 = (c_1 + c_2) \cdot (c_1 - c_2) = c \cdot (c_1 - c_2)$

$c_1 + c_2 = c$ et $c_1 - c_2 = (b^2 - a^2) / c$ En additionnant les deux égalités :

$c_1 = (c^2 + b^2 - a^2) / (2 \cdot c) = 24{,}0625$ cm. $\qquad c_2 = 40 - c_1 = 15{,}9375$ cm

$\alpha = \arccos(c_1 / b) \approx 46{,}57°$ $\quad \beta = \arccos(c_2 / a) \approx 57{,}91°$ $\quad \gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 75{,}52°$

12) Le rectangle

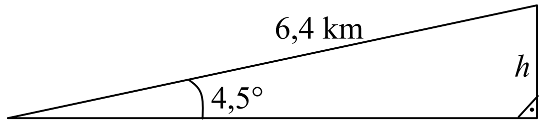


tan(α) = 65,18 / 117,4 => $\alpha = \arctan\left(\dfrac{65{,}18}{117{,}4}\right) \approx 29{,}04°$

β = 90° - α ≈ 60,96°

---

13) La route



La dénivellation égale h = 6,4 · sin(4,5°) ≈ 0,502 km = 502 m

---

14) Le calcul d'aire

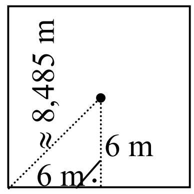
a) L'aire hachurée égale l'aire du secteur de disque de rayon r d'angle α moins l'aire du triangle d'angle α et de côtés adjacents à α égaux chacun à r.

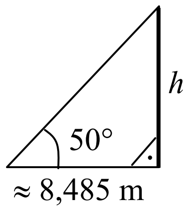
L'aire hachurée = $\dfrac{\alpha}{360°}\cdot\pi\cdot r^2 - \dfrac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin(\alpha) = r^2\cdot\left(\dfrac{\alpha\cdot\pi}{360°} - \dfrac{\sin(\alpha)}{2}\right)$

b) Si r = 10 cm et α = 60°, l'aire hachurée = $10^2\cdot\left(\dfrac{60°\cdot\pi}{360°} - \dfrac{\sin(60°)}{2}\right) = 10^2\cdot\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 9{,}06\ \text{cm}^2$

---

15) Le bassin et le jet d'eau



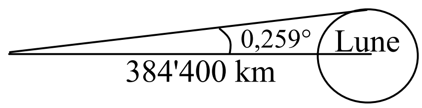


Pythagore => la distance de la base du jet d'eau = $6\cdot\sqrt{2} \approx 8{,}485$ mètres

$\dfrac{h}{8{,}485} \approx$ tan(50°) . Donc la hauteur h ≈ 8,485 · tan(50°) ≈ 10,11 mètres.

---

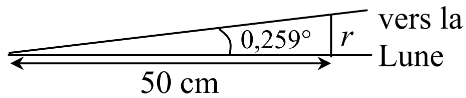
16) La Lune



Le diamètre apparent de la Lune = 0° 31’ 05’’ = 31 / 60 + 5 / 3600 ≈ 0,518° = 2 · 0,259°.

a) Le rayon de la Lune est égal à 384'400 · tan(0,518° / 2) ≈ 1'738 km
Donc le diamètre réel de la Lune est d'environ 3'476 km. Ceci se vérifie dans la table CRM.

b) Si r = rayon du disque de diamètre minimal que l'on interposerait à 50 cm de l’œil pour masquer la Lune, alors r = 0,5 · tan(0,518° / 2) ≈ 0,00226 m = 2,26 millimètres. Son diamètre serait d'environ de 4,5 millimètres.



---

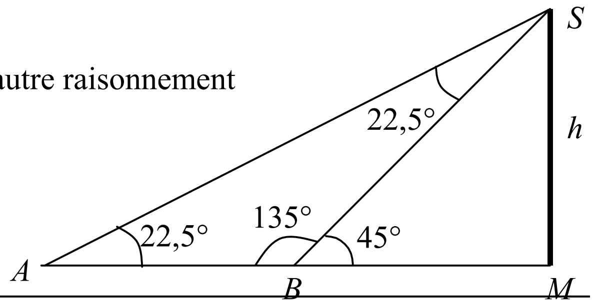
17) Le mât

Notons h = la hauteur du mât. $h = BM$ car le triangle BSM est isocèle.

On a : $\dfrac{h}{h+\sqrt{200}} = \tan(22{,}5°)$ donc $h = \left(h+\sqrt{200}\right)\cdot\tan(22{,}5°) = h\cdot\tan(22{,}5°)+\sqrt{200}\cdot\tan(22{,}5°)$

Donc $h\cdot\left(1-\tan(22{,}5°)\right) = \sqrt{200}\cdot\tan(22{,}5°)$ $h = \dfrac{\sqrt{200}\cdot\tan(22{,}5°)}{1-\tan(22{,}5°)} \approx 10{,}000$

La hauteur du mât est d'environ 10.



Dans ce cas, la solution se trouve plus facilement par un autre raisonnement
Après avoir indiquez tous les angles, on constate que
$BS = AB = \sqrt{200}$
Donc par Pythagore et avec $BM = h$: $2h^2 = 200$,
Donc $h = 10$. Ici l'égalité est exacte !

---

18) Les trois figures

<u>Première figure</u> : $\dfrac{x+1}{y} = \tan(47°)$ et $\dfrac{x}{y} = \tan(39°)$ Donc $x = y\cdot\tan(39°)$

$y\cdot\tan(39°)+1 = y\cdot\tan(47°)$ $1 = y\cdot\tan(47°) - y\cdot\tan(39°) = y\cdot[\tan(47°)-\tan(39°)]$

$y = \dfrac{1}{\tan(47°)-\tan(39°)} \approx 3{,}808$ $x = y\cdot\tan(39°) \approx 3{,}808\cdot\tan(39°) \approx 3{,}084$

<u>Deuxième figure</u> : $\dfrac{y}{x+1{,}2} = \tan(27°)$ et $\dfrac{y}{x} = \tan(41°)$ Donc $y = x\cdot\tan(41°)$

$x\cdot\tan(41°) = (x+1{,}2)\cdot\tan(27°) = x\cdot\tan(27°)+1{,}2\cdot\tan(27°)$ $x\cdot\tan(41°) - x\cdot\tan(27°) = 1{,}2\cdot\tan(27°)$

$x\cdot[\tan(41°)-\tan(27°)] = 1{,}2\cdot\tan(27°)$

$x = \dfrac{1{,}2\cdot\tan(27°)}{\tan(41°)-\tan(27°)} \approx 1{,}6995$ $y = x\cdot\tan(41°) \approx 1{,}6995\cdot\tan(41°) \approx 1{,}4774$

<u>Troisième figure</u> : Par Pythagore : $z = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\beta = \arctan\left(\dfrac{4}{3}\right) \approx 53{,}13°$ $\gamma = 90° - \beta \approx 36{,}87°$ $\delta = 90° - \gamma = \beta \approx 53{,}13°$ $\alpha = 90° - \beta = \gamma \approx 36{,}87°$

On peut utiliser la trigonométrie pour résoudre ce problème, mais ce n'est pas nécessaire.

Le théorème de la hauteur implique que $4^2 = 3\cdot x$ donc $x = 16/3 \approx 5{,}33$

Un théorème d'Euclide => $y^2 = x\cdot(x+3)$ donc $y \approx \sqrt{5{,}33\cdot(5{,}33+3)} \approx \sqrt{44{,}40} \approx 6{,}66$

On aurait pu utiliser Pythagore : $y^2 = x^2 + 4^2$ donc $y \approx \sqrt{5{,}33^2+4^2} \approx \sqrt{44{,}41} \approx 6{,}66$
