

## VIII. Trigonométrie dans le triangle rectangle

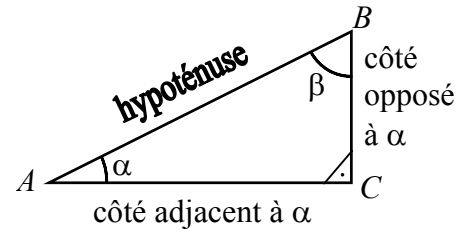
Cadre constant dans ce chapitre :

$ABC$  désignera les sommets d'un triangle rectangle.

L'angle de sommet  $C$  sera l'angle droit.

$\alpha$  désignera la mesure de l'angle de sommet  $A$ .

$\beta$  désignera la mesure de l'angle de sommet  $B$ .



Définition :

Le plus long côté du triangle rectangle s'appelle : \_\_\_\_\_

Les autres côtés du triangle rectangle s'appellent : \_\_\_\_\_

Le côté \_\_\_\_\_ à  $\alpha$  est le côté  $[AC]$ .

Le côté \_\_\_\_\_ à  $\alpha$  est le côté  $[BC]$ .

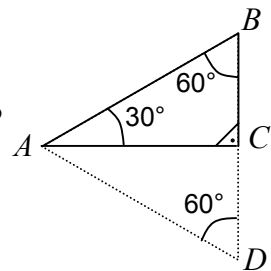
Le côté \_\_\_\_\_ à  $\beta$  est le côté  $[AC]$ .

Le côté \_\_\_\_\_ à  $\beta$  est le côté  $[BC]$ .

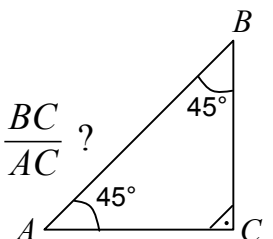
Les trois côtés sont reliés par la formule : \_\_\_\_\_

Exercice VIII.1 :

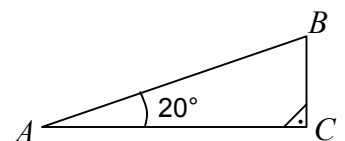
a) Si l'angle  $\alpha = 30^\circ$ , que vaut le rapport de longueurs :  $\frac{BC}{AB}$  ?



b) Si l'angle  $\alpha = 45^\circ$  que valent les rapports de longueurs :  $\frac{BC}{AB}$ ,  $\frac{AC}{AB}$ ,  $\frac{BC}{AC}$  ?

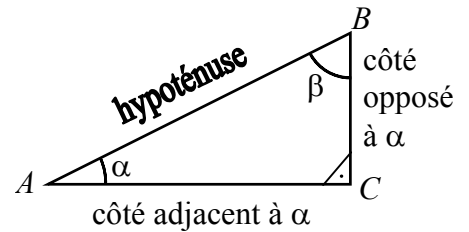


c) Si l'angle  $\alpha = 20^\circ$  que vaut le rapport de longueurs :  $\frac{BC}{AB}$  ?



Selon le théorème de Thalès, les rapports

$\frac{BC}{AB}$ ,  $\frac{AC}{AB}$ ,  $\frac{BC}{AC}$  ne dépendent que de l'angle  $\alpha$ .



On peut donc définir :

$\sin(\alpha) = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$	On dit : " <b>Sinus</b> de alpha"
$\cos(\alpha) = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$	On dit : " <b>Cosinus</b> de alpha"
$\tan(\alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \alpha}{\text{longueur du côté adjacent à } \alpha}$	On dit : " <b>Tangente</b> de alpha"

Ces trois définitions sont TRES IMPORTANTES, et seront utilisées jusqu'à la fin du collège et dans beaucoup d'autres disciplines scientifiques.

Voici un truc mnémotechnique pour s'en souvenir :

"**sin op ip**" sinus = **op**posé sur **ip**hypoténuse.

"**cos adj ip**" cosinus = **adj**acent sur **ip**hypoténuse.

"**tan op adj**" tangente = **op**posé sur **adj**acent.

Remarque concernant la calculatrice :

Chaque calculatrice possède des touches permettant de calculer des approximations numériques des fonctions Sinus, Cosinus et Tangente.

Attention : Un angle peut être exprimé autrement qu'en degrés.

Quand vous calculerez le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle en degrés sur la calculatrice, vous devrez vous assurer d'avoir sélectionné le mode de calcul d'angles en degrés.

Exercice VIII.2 :

Assurez-vous que votre calculatrice calculera en degrés, puis calculez :

$$\sin(0^\circ) \approx \qquad \cos(0^\circ) \approx \qquad \tan(0^\circ) \approx$$

$$\sin(20^\circ) \approx \qquad \cos(20^\circ) \approx \qquad \tan(20^\circ) \approx$$

$$\sin(30^\circ) \approx \qquad \cos(30^\circ) \approx \qquad \tan(30^\circ) \approx$$

$$\sin(45^\circ) \approx \qquad \cos(45^\circ) \approx \qquad \tan(45^\circ) \approx$$

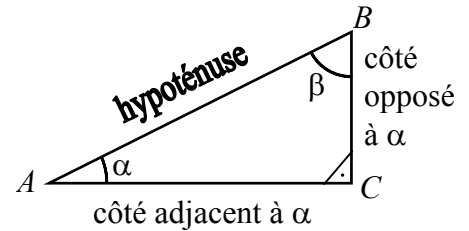
$$\sin(60^\circ) \approx \qquad \cos(60^\circ) \approx \qquad \tan(60^\circ) \approx$$

$$\sin(70^\circ) \approx \qquad \cos(70^\circ) \approx \qquad \tan(70^\circ) \approx$$

$$\sin(90^\circ) \approx \qquad \cos(90^\circ) \approx \qquad \tan(90^\circ) \approx$$

Exercice VIII.3 :

- a) Si l'angle  $\alpha = 70^\circ$  et l'hypoténuse mesure 1 [cm], que mesurent les cathètes ?
- b) Si l'angle  $\alpha = 80^\circ$  et l'hypoténuse mesure 2 [cm], que mesurent les cathètes ?
- c) Si l'angle  $\alpha = 12^\circ$  et la plus grande cathète mesure 9 [cm], que mesurent les autres côtés ?

Propriétés :

1)  $\alpha + \beta = \underline{\hspace{2cm}}$  car  $\underline{\hspace{2cm}}$

2) Par symétrie sur le triangle rectangle on voit que :

$$\sin(\beta) = \boxed{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\underline{\hspace{1cm}})} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(\beta) = \boxed{\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\underline{\hspace{1cm}})} = \underline{\hspace{2cm}}$$

3)  $\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$  car  $\underline{\hspace{2cm}}$

4)  $\boxed{(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = \underline{\hspace{1cm}}}$  On écrit aussi plus simplement :  
 $\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \underline{\hspace{1cm}}}$

Ceci est une conséquence directe du théorème de Pythagore. Justifiez pourquoi.

**C'est une formule très importante que vous devez connaître absolument !!!**

5) Puisque dans un triangle rectangle, le sinus et le cosinus d'un angle sont positifs, on déduit de cette formule que :

$$\sin(\alpha) = \sqrt{\underline{\hspace{2cm}}}$$

et

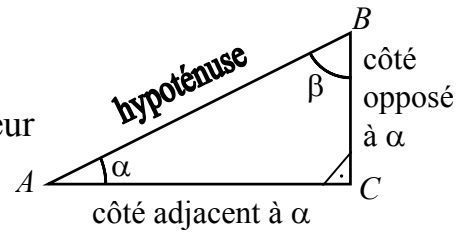
$$\cos(\alpha) = \sqrt{\underline{\hspace{2cm}}}$$

Remarque :

Dans le cas où l'angle  $\alpha$  est très petit, l'angle  $\beta$  est très proche de  $90^\circ$ , la longueur  $BC$  est très petite et la longueur  $AC$  est très proche de la longueur  $AB$ .

On en déduit que :

- i) Le sinus d'un très petit angle est très proche de \_\_\_\_\_
- ii) Le cosinus d'un très petit angle est très proche de \_\_\_\_\_
- iii) Le sinus d'un angle proche de  $90^\circ$  est proche de \_\_\_\_\_
- iv) Le cosinus d'un angle proche de  $90^\circ$  est proche de \_\_\_\_\_



On étend donc les définitions de sinus, cosinus et tangente aux angles de  $0^\circ$  et de  $90^\circ$  par les valeurs définies dans la table suivante :

Quelques valeurs de sinus, cosinus et tangente dont il faut se souvenir :

- 1)  $\sin(0^\circ) = \cos(90^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$        $\tan(0^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$
- 2)  $\sin(30^\circ) = \cos(60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$        $\tan(30^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$
- 3)  $\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$        $\tan(45^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$
- 4)  $\sin(60^\circ) = \cos(30^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$        $\tan(60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$
- 5)  $\sin(90^\circ) = \cos(0^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$        $\tan(90^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$

Remarques concernant la calculatrice :

Chaque calculatrice possède des touches permettant de calculer des approximations numériques des fonctions Sinus, Cosinus et Tangente.

Elles permettent aussi d'effectuer le calcul inverse, c.-à-d. de calculer un angle connaissant le rapport de longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle.

Attention : Un angle peut être exprimé autrement qu'en degrés.

$$\arcsin\left(\frac{BC}{AB}\right) = \alpha = \text{l'angle opposé au côté } [BC].$$

On dit "**arc sinus** de  $BC$  sur  $AB$ "

$$\arccos\left(\frac{AC}{AB}\right) = \alpha = \text{l'angle adjacent au côté } [AC].$$

On dit "**arc cosinus** de  $AC$  sur  $AB$ "

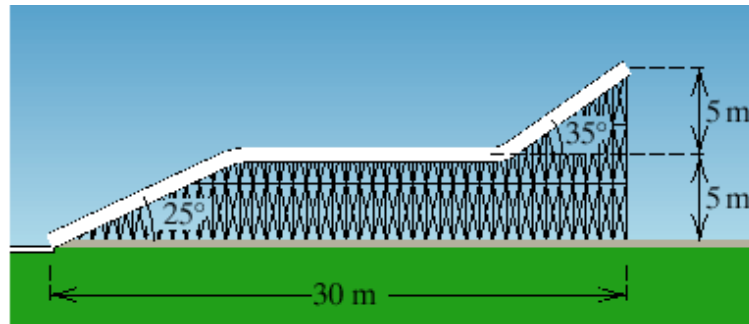
$$\arctan\left(\frac{BC}{AC}\right) = \alpha$$

On dit "**arc tangente** de  $BC$  sur  $AC$ "

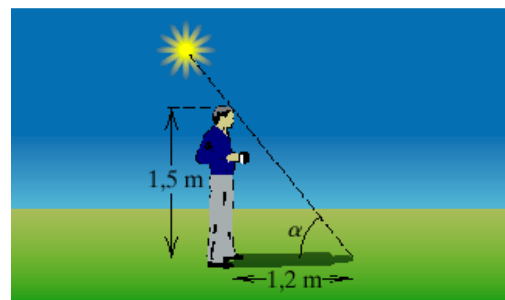
Sur la calculatrice, "arcsin" se note  $\sin^{-1}$   
 "arccos" se note  $\cos^{-1}$   
 "arctan" se note  $\tan^{-1}$

Exercices :

1) **Conception d'un toboggan de piscine** La figure représente une partie d'un plan de toboggan de piscine. Trouver la longueur totale du toboggan au centimètre près.



2) **Élévation du soleil** Calculer l'angle d'élévation  $\alpha$  du soleil, si une personne haute de 1,5 [m] projette une ombre de 1,2 [m] de long sur le sol (voir figure).



3) **Construction d'une rampe** Un constructeur désire ériger une rampe de 7,2 [m] de long qui atteigne une hauteur de 1,5 [m] par rapport au sol. Calculer l'angle que la rampe devrait faire avec l'horizontale.

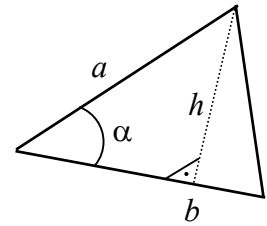
4) **Jeu vidéo** La figure représente l'écran d'un jeu vidéo d'arcade dans lequel des canards se déplacent de  $A$  vers  $B$  à la vitesse de 7 [cm/s]. Des balles tirées depuis le point  $O$  traversent à 25 [cm/s]. Si un joueur tire dès qu'un canard apparaît au point  $A$ , quel devrait être l'angle de tir pour atteindre la cible du premier coup?



5) **L'ouvrage le plus haut** L'ouvrage le plus haut que l'homme n'ait jamais construit dans le monde est une tour de télévision sise près de Fargo, dans le Dakota du Nord. D'une distance au sol de 1,6 [km], son angle d'élévation est de  $21^{\circ}20'24''$ . Déterminer sa hauteur au mètre près.

**6) L'étudiant au Japon** Le sommet du mont Fuji, au Japon, culmine à 3778 [m]. Un étudiant en trigonométrie, à des kilomètres de là, remarque que l'angle entre le sol et le sommet du volcan est de  $18^\circ$ . Calculer la distance (à vol d'oiseau) de l'étudiant au sommet du mont Fuji.

**7) L'aire d'un triangle** Exprimez la hauteur  $h$  du triangle en fonction de l'angle  $\alpha$  et de la longueur des deux côtés  $a$  et  $b$  adjacents à cet angle. Ensuite, exprimez l'aire du triangle en fonction de  $\alpha$ ,  $a$  et  $b$ .



**8) Côtés et angles manquants** Un triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$ .

On note  $a = BC$ ;  $b = AC$ ;  $c = AB$ ;  $\alpha$  et  $\beta$  la mesure des angles de sommet  $A$  et  $B$ .

Calculer les mesures de tous les côtés et tous les angles de ce triangle, connaissant :

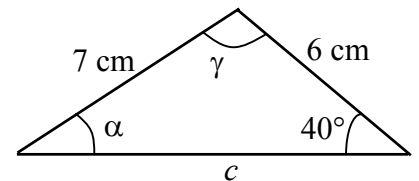
- |  |   |
|--|---|
| a) $c = 4,75$ cm et $\beta = 65,8^\circ$ | b) $a = 112,5$ cm et $\beta = 14,5^\circ$ |
| c) $c = 18,21$ cm et $b = 4,95$ cm       | d) $a = 22,3$ cm et $b = 46,8$ cm         |

**9) La tour** Quelle est la hauteur d'une tour qui donne 36 mètres d'ombre lorsque le soleil est élevé de  $37,5^\circ$  au-dessus de l'horizon ?

## Deux challenges

### 10) Challenge moyen

Donnez des approximations à trois chiffres significatifs des angles et longueurs du triangle suivant :



### 11) Super challenge

Donnez des approximations à trois chiffres significatifs des angles d'un triangle, sachant que ses côtés mesurent 30, 35 et 40 centimètres.

**12) Le rectangle** Un rectangle a pour dimensions 117,4 mètres et 65,18 mètres. Combien mesurent les angles formés par les diagonales et les côtés ?

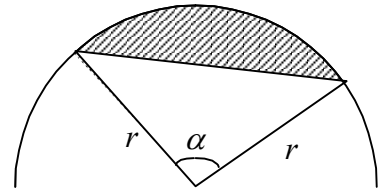
**13) La route** Une route s'élève régulièrement en formant avec l'horizontale un angle de  $4,5^\circ$ . Quelle est la dénivellation le long d'un parcours de 6,4 km ?

**14) Le calcul d'aire** Considérons la figure ci-contre :

a) Exprimez l'aire  $A$  de la surface hachurée en fonction de  $r$  et  $\alpha$ .

b) Calculez  $A$  lorsque  $r = 10$  cm et  $\alpha = 60^\circ$ .

Indication : utilisez l'exercice "7) L'aire d'un triangle"



**15) Le bassin et le jet d'eau** Un bassin carré a 12 mètres de côté.

Au centre se trouve un jet d'eau, dont l'extrémité vue de l'un des sommets du carré, apparaît sous un angle d'élévation de  $50^\circ$ .

Quelle est la hauteur de jet d'eau ?

**16) La Lune** Le diamètre apparent de la Lune (c'est-à-dire l'angle sous lequel elle est vue de la Terre) est de  $0^\circ 31' 05''$ .

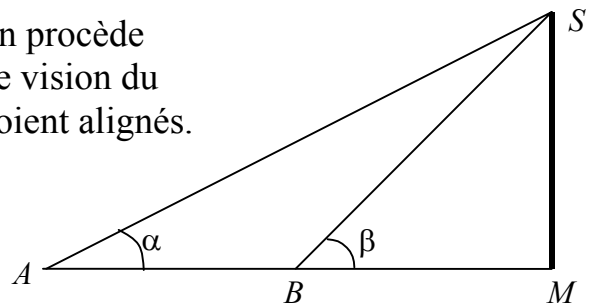
a) Quel est le diamètre réel de la Lune, si la distance Terre - Lune est de 384'400 km ?

b) Quel serait le diamètre minimal d'un disque que l'on interposerait à 50 cm de l'œil pour masquer la Lune ?

**17) Le mât** Pour mesurer la hauteur d'un mât, on procède selon le schéma ci-contre, en mesurant l'angle de vision du sommet en 2 endroits  $A$  et  $B$  tels que  $A$ ,  $B$  et  $M$  soient alignés.

Déterminez la hauteur du mât lorsque :

$$\alpha = 22,5^\circ \quad \beta = 45^\circ \quad \overline{AB} = \sqrt{200}$$



**18) Les trois figures** Pour chaque figure, déterminez  $x$  et  $y$ .

Pour la troisième figure, déterminez aussi  $z$  et les angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ .

