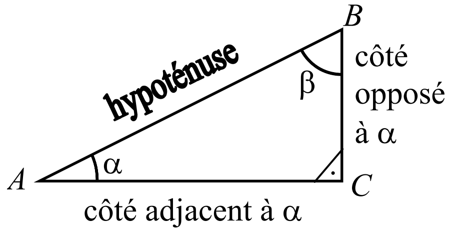
Trigonométrie dans le triangle rectangle

Cadre constant dans ce chapitre :
ABC désignera les sommets d'un triangle rectangle.
L'angle de sommet C sera l'angle droit.
α désignera la mesure de l'angle de sommet A.
β désignera la mesure de l'angle de sommet B.



Définition :
Le plus long côté du triangle rectangle s'appelle : ______________________________

Les autres côtés du triangle rectangle s'appellent : _____________________________

Le **côté** ______________________ à α est le côté $[AC]$.

Le **côté** ______________________ à α est le côté $[BC]$.

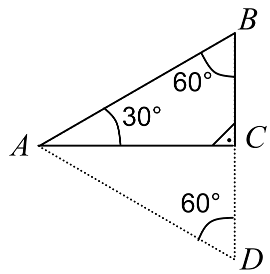
Le **côté** ______________________ à β est le côté $[AC]$.

Le **côté** ______________________ à β est le côté $[BC]$.

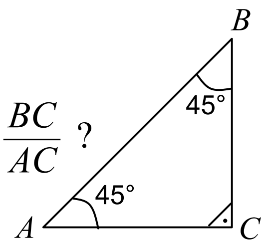
Les trois côtés sont reliés par la formule : _______________________________

Exercice *i* :

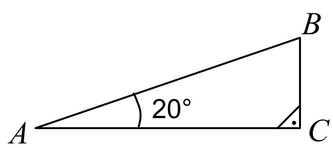
a) Si l'angle $\alpha = 30°$, que vaut le rapport de longueurs : $\dfrac{BC}{AB}$?



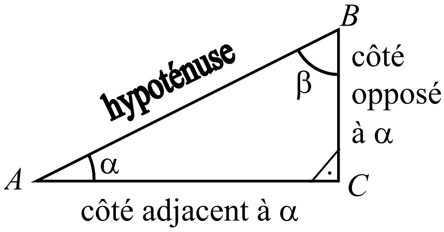
b) Si l'angle $\alpha = 45°$ que valent les rapports de longueurs : $\dfrac{BC}{AB}$; $\dfrac{AC}{AB}$; $\dfrac{BC}{AC}$?



c) Si l'angle $\alpha = 20°$ que vaut le rapport de longueurs : $\dfrac{BC}{AB}$?



Selon le théorème de Thalès, les rapports
$\frac{BC}{AB}$; $\frac{AC}{AB}$; $\frac{BC}{AC}$ ne dépendent que de l'angle α.



On peut donc définir :

$\mathbf{sin(\alpha)} = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$	On dit : "**Sinus** de alpha"
$\mathbf{cos(\alpha)} = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$	On dit : "**Cosinus** de alpha"
$\mathbf{tan(\alpha)} = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \alpha}{\text{longueur du côté adjacent à } \alpha}$	On dit : "**Tangente** de alpha"

Ces trois définitions sont TRES IMPORTANTES, et seront utilisées jusqu'à la fin du collège et dans beaucoup d'autres disciplines scientifiques.

Voici un truc mnémotechnique pour s'en souvenir :

"**sin op ip**" **sin**us = **op**posé sur **hyp**oténuse.
"**cos adj ip**" **cos**inus = **adj**acent sur **hyp**oténuse.
"**tan op adj**" **tan**gente = **op**posé sur **adj**acent.

Remarque concernant la calculatrice :
Chaque calculatrice possède des touches permettant de calculer des approximations numériques des fonctions Sinus, Cosinus et Tangente.

Attention : Un angle peut être exprimé autrement qu'en degrés.

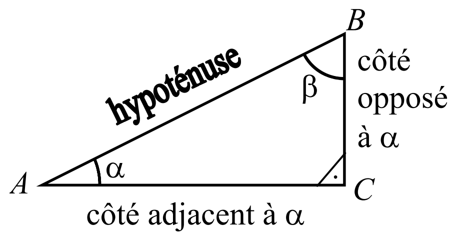
Quand vous calculerez le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle en degrés sur la calculatrice, vous devrez vous assurer d'avoir sélectionné le mode de calcul d'angles en degrés.

Exercice *ii* :
Assurez-vous que votre calculatrice calculera en degrés, puis calculez :

$\sin(0°) \approx$	$\cos(0°) \approx$	$\tan(0°) \approx$
$\sin(20°) \approx$	$\cos(20°) \approx$	$\tan(20°) \approx$
$\sin(30°) \approx$	$\cos(30°) \approx$	$\tan(30°) \approx$
$\sin(45°) \approx$	$\cos(45°) \approx$	$\tan(45°) \approx$
$\sin(60°) \approx$	$\cos(60°) \approx$	$\tan(60°) \approx$
$\sin(70°) \approx$	$\cos(70°) \approx$	$\tan(70°) \approx$
$\sin(90°) \approx$	$\cos(90°) \approx$	$\tan(90°) \approx$

Exercice *iii* :

a) Si l'angle $\alpha = 70°$ et l'hypoténuse mesure 1 [cm], que mesurent les cathètes ?



b) Si l'angle $\alpha = 80°$ et l'hypoténuse mesure 2 [cm], que mesurent les cathètes ?

c) Si l'angle $\alpha = 12°$ et la plus grande cathète mesure 9 [cm], que mesurent les autres côtés ?

Propriétés :

1) $\alpha + \beta =$ ____ car ______________________________

2) Par symétrie sur le triangle rectangle on voit que :

$\mathbf{\sin(\beta)} = \boxed{\mathbf{\sin(90° - \alpha) = \cos(\;\_\_\_\;)}} =$ ______________________________

$\mathbf{\cos(\beta)} = \boxed{\mathbf{\cos(90° - \alpha) = \sin(\;\_\_\_\;)}} =$ ______________________________

3) $\boxed{\mathbf{\tan}(\alpha) = \dfrac{\mathbf{\sin}(\alpha)}{\mathbf{\cos}(\alpha)}}$ car ______________________________

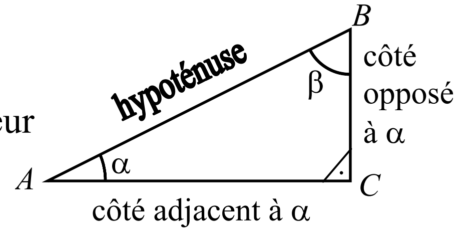
4) $\boxed{(\mathbf{\sin}(\alpha))^2 + (\mathbf{\cos}(\alpha))^2 = \_\_\_}$ On écrit aussi plus simplement : $\boxed{\mathbf{\sin}^2(\alpha) + \mathbf{\cos}^2(\alpha) = \_\_\_}$

Ceci est une conséquence directe du théorème de Pythagore. Justifiez pourquoi.

C'est une formule très importante que vous devez connaître absolument !!!

5) Puisque dans un triangle rectangle, le sinus et le cosinus d'un angle sont positifs, on déduit de cette formule que :

$\boxed{\mathbf{\sin}(\alpha) = \sqrt{\qquad\qquad}}$ et $\boxed{\mathbf{\cos}(\alpha) = \sqrt{\qquad\qquad}}$



Remarque :
Dans le cas où l'angle α est très petit, l'angle β est très proche de 90°, la longueur ***BC*** est très petite et la longueur ***AC*** est très proche de la longueur ***AB***.
On en déduit que :
i) Le sinus d'un très petit angle est très proche de ______________
ii) Le cosinus d'un très petit angle est très proche de ____________
iii) Le sinus d'un angle proche de 90° est proche de _____________
iv) Le cosinus d'un angle proche de 90° est proche de ___________

On étend donc les définitions de sinus, cosinus et tangente aux angles de 0° et de 90° par les valeurs définies dans la table suivante :

Quelques valeurs de sinus, cosinus et tangent dont il faut se souvenir :

1) sin(0°) = cos(90°) = _________= _________ tan(0°) = _________

2) sin(30°) = cos(60°) = _________= _________ tan(30°) = _________

3) sin(45°) = cos(45°) = _________= _________ tan(45°) = _________

4) sin(60°) = cos(30°) = _________= _________ tan(60°) = _________

5) sin(90°) = cos(0°) = _________= _________ tan(90°) = _________

Remarques concernant la calculatrice :
Chaque calculatrice possède des touches permettant de calculer des approximations numériques des fonctions Sinus, Cosinus et Tangente.

Elles permettent aussi d'effectuer le calcule inverse, c.-à-d. de calculer un angle connaissant le rapport de longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle.

Attention : Un angle peut être exprimé autrement qu'en degrés.

$\arcsin\left(\frac{BC}{AB}\right) = \alpha =$ l'angle opposé au côté $[BC]$. On dit "**arc sinus** de BC sur AB"

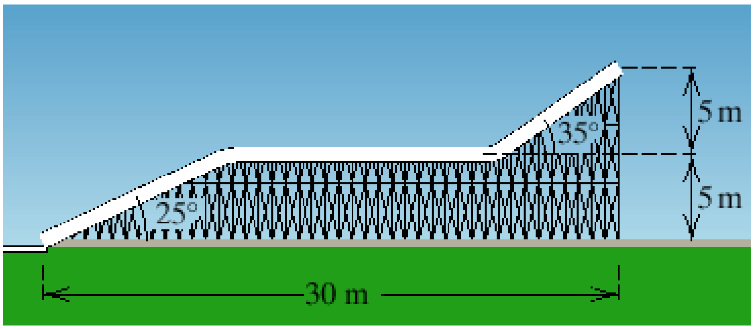
$\arccos\left(\frac{AC}{AB}\right) = \alpha =$ l'angle adjacent au côté $[AC]$. On dit "**arc cosinus** de AC sur AB"

$\arctan\left(\frac{BC}{AC}\right) = \alpha$ On dit "**arc tangente** de BC sur AC"

Sur la calculatrice, "arcsin" se note $\sin^{-1}$
"arccos" se note $\cos^{-1}$
"arctan" se note $\tan^{-1}$

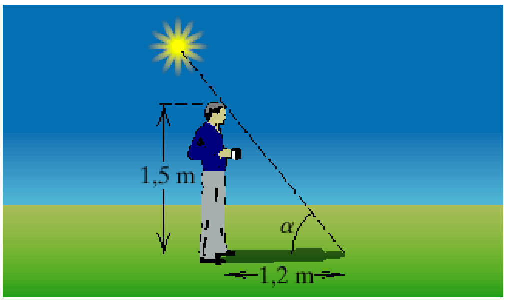
Exercices :

1) Conception d'un toboggan de piscine La figure représente une partie d'un plan de toboggan de piscine. Trouver la longueur totale du toboggan au centimètre près.



---

2) Elévation du soleil Calculer l'angle d'élévation α du soleil, si une personne haute de 1,5 [m] projette une ombre de 1,2 [m] de long sur le sol (voir figure).

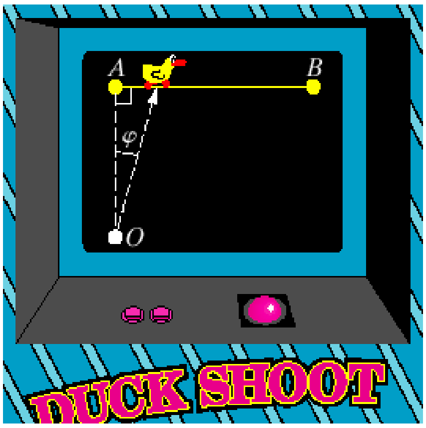


---

3) Construction d'une rampe Un constructeur désire ériger une rampe de 7,2 [m] de long qui atteigne une hauteur de 1,5 [m] par rapport au sol. Calculer l'angle que la rampe devrait faire avec l'horizontale.

---

4) Jeu vidéo La figure représente l'écran d'un jeu vidéo d'arcade dans lequel des canards se déplacent de A vers B à la vitesse de 7 [cm/s]. Des balles tirées depuis le point O traversent à 25 [cm/s]. Si un joueur tire dès qu'un canard apparaît au point A, quel devrait être l'angle de tir pour atteindre la cible du premier coup?



---

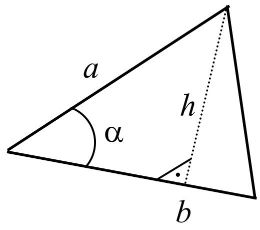
5) L'ouvrage le plus haut L'ouvrage le plus haut que l'homme n'ait jamais construit dans le monde est une tour de télévision sise près de Fargo, dans le Dakota du Nord. D'une distance au sol de 1,6 [km], son angle d'élévation est de 21,34°. Déterminer sa hauteur au mètre près.

---

6) L'étudiant au Japon Le sommet du mont Fuji, au Japon, culmine à 3778 [m]. Un étudiant en trigonométrie, à des kilomètres de là, remarque que l'angle entre le sol et le sommet du volcan est de 18°. Calculer la distance (à vol d'oiseau) de l'étudiant au sommet du mont Fuji.

---

7) L'aire d'un triangle Exprimez la hauteur h du triangle en fonction de l'angle α et de la longueur des deux côtés a et b adjacents à cet angle. Ensuite, exprimez l'aire du triangle en fonction de α, a et b.



---

8) Côtés et angles manquants Un triangle ABC est rectangle en C.

On note $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$; α et β la mesure des angles de sommet A et B.

Calculer les mesures de tous les côtés et tous les angles de ce triangle, connaissant :

a) $c =$ 4,75 cm et $\beta = 65{,}8°$ b) $a = 112{,}5$ cm et $\beta = 14{,}5°$

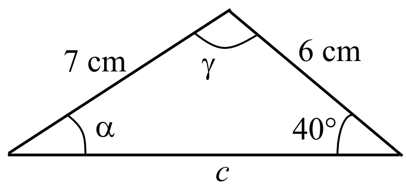
c) $c = 18{,}21$ cm et $b = 4{,}95$ cm d) $a =$ 22,3 cm et $b = 46{,}8$ cm

---

9) La tour Quelle est la hauteur d'une tour qui donne 36 mètres d'ombre lorsque le soleil est élevé de 37,5° au-dessus de l'horizon ?

Deux challenges

10) Challenge moyen
Donnez des approximations à trois chiffres significatifs des angles et longueurs du triangle suivant :



---

11) Super challenge
Donnez des approximations à trois chiffres significatifs des angles d'un triangle, sachant que ses côtés mesurent 30, 35 et 40 centimètres.

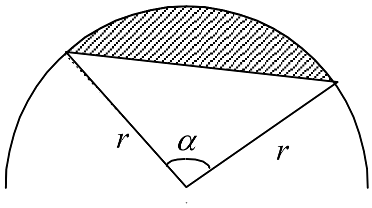
12) Le rectangle Un rectangle a pour dimensions 117,4 mètres et 65,18 mètres.
Combien mesurent les angles formés par les diagonales et les côtés ?

13) La route Une route s'élève régulièrement en formant avec l'horizontale un angle de 4,5°. Quelle est la dénivellation le long d'un parcours de 6,4 km ?

14) Le calcul d'aire Considérons la figure ci-contre :

a) Exprimez l'aire A de la surface hachurée en fonction de r et α.

b) Calculez A lorsque $r = 10$ cm et $\alpha = 60°$.
Indication : utilisez l'exercice "*7) L'aire d'un triangle*"



15) Le bassin et le jet d'eau Un bassin carré a 12 mètres de côté.
Au centre se trouve un jet d'eau, dont l'extrémité vue de l'un des sommets du carré, apparaît sous un angle d'élévation de 50°.
Quelle est la hauteur de jet d'eau ?

16) La Lune Le diamètre apparent de la Lune (c'est-à-dire l'angle sous lequel elle est vue de la Terre) est de 0° 31' 05''.

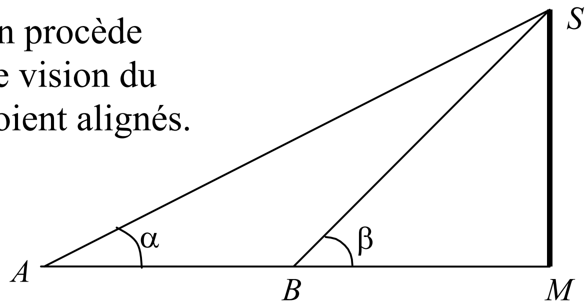
a) Quel est le diamètre réel de la Lune, si la distance Terre - Lune est de 384'400 km ?

b) Quel serait le diamètre minimal d'un disque que l'on interposerait à 50 cm de l'œil pour masquer la Lune ?

17) Le mât Pour mesurer la hauteur d'un mât, on procède selon le schéma ci-contre, en mesurant l'angle de vision du sommet en 2 endroits *A* et *B* tels que *A*, *B* et *M* soient alignés.

Déterminez la hauteur du mât lorsque :

$\alpha = 22{,}5°$ $\beta = 45°$ $\overline{AB} = \sqrt{200}$



18) Les trois figures Pour chaque figure, déterminez x et y.
Pour la troisième figure, déterminez aussi z et les angles α, β, γ et δ.