II.1 Pour des oranges à trois francs le kilo, 1 kilo coûte 3 francs, 2 kilos coûtent 6 francs, 1/2 kilos coûtent 1 franc cinquante.

II.2 $y = 4 \cdot x + 3$, $x = (y - 3) / 4$. Si $y = -19$, $x = (-19 - 3) / 4 = -22 / 4 = -11 / 2 = -5{,}5$

II.3 Dans l'exemple 4, si $x = 3$, $y = 4 \cdot 3 + 3 = 15$

II.4 $y = (x + 1)^2$. $42 = (x + 1)^2$ => $x = \sqrt{42} - 1$ ou $x = -\sqrt{42} - 1$.

II.5 $x^2 + y^2 = 4$. Si $x = 1$, alors $y = \sqrt{3}$ ou $y = -\sqrt{3}$?

II.6 $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1) \cdot (x-1)}{(x-1)} = x + 1$. La dernière égalité est vraie si $x \neq 1$.
Donc si x est proche de 1, $y = x + 1$ est proche de 2.

II.7 $y = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$. Quand x prend des valeurs très grandes, $1 / x$ devient très petit, donc y devient proche de 1.

II.8 Beaucoup d'exemples ont déjà été donnés dans le cours. En voici d'autres.
a) $x \cdot y = 1$ b) $x^2 - y^2 = 1$ c) secondes = 3600 · heures

II.9 En physique vous en avez vu beaucoup.
a) distance = vitesse · temps b) variation_de_vitesse = accélération · temps
$x = x_0 + v_0 \cdot t + 0{,}5 \cdot a \cdot t^2$ lie les cinq variables : x, x_0, v_0, t et a.
Souvent, x_0 et v_0 sont considéré comme des constantes, pas comme des variables.

III.1 Il faut recopier la définition d'une relation, donnée en page 6.
Les trois phrases qui définissent une relation. Pour avoir une relation, il faut que :
1) on ait un ensemble A, appelé ensemble de départ.
2) on ait un ensemble B, appelé ensemble de d'arrivée.
3) on ait une règle de correspondance, qui à chaque élément de l'ensemble de départ A, fait correspondre zéro, un ou plusieurs éléments de l'ensemble d'arrivée B.

III.2 Si x représente vous-même, trois images de x sont rois objets que vous possédez. Par exemple, votre natel, votre montre et votre cours de mathématiques.

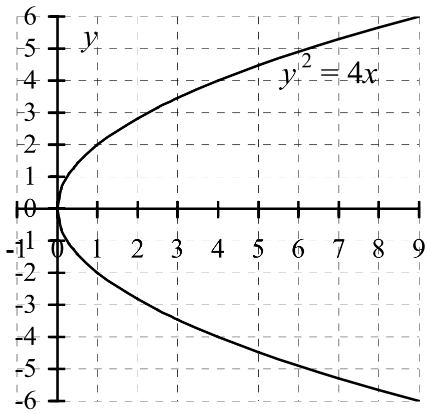
III.3 L'ensemble des images de 60 sont est { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60 }

III.4 L'ensemble des préimages du nombre 7 est :
{ 7 ; 14 ; 21 ; 28 ; 35 ; 42 ; 49 ; 56 ; 63 ; 70 ; 77 ; 84 ; 91 ; 98 ; 105 ; ... }
Ce sont tous les multiples de 7.

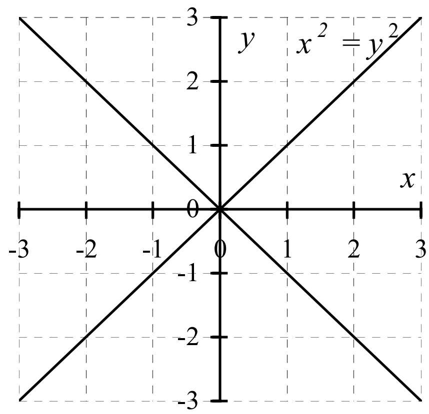
III.5 Le graphique de a) correspond à celui du haut à gauche,
le graphique de b) correspond à celui du haut à droite,
le graphique de f) correspond à celui du bas à gauche,
le graphique de g) correspond à celui du bas à droite.
Le graphique de e) est celui de l'exemple 4 de la page 7 du cours.

III.5 suite. Voici les autres graphiques.

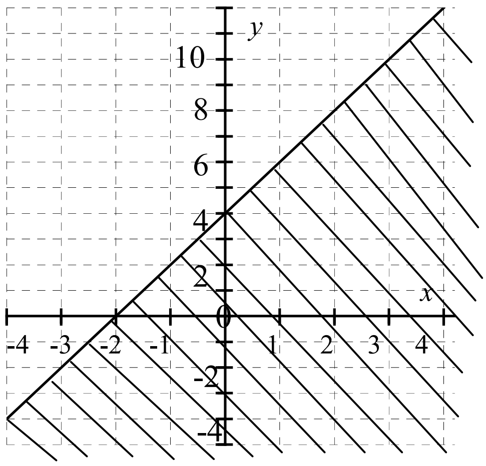
c) $y^2 = 4x$



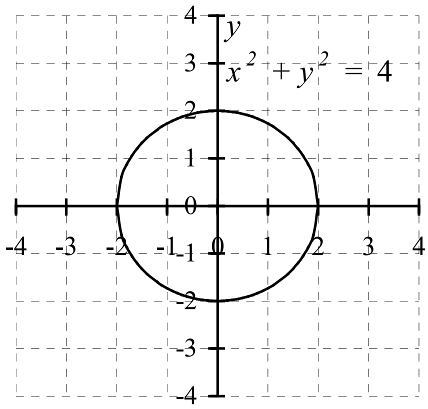
d) $x^2 = y^2$



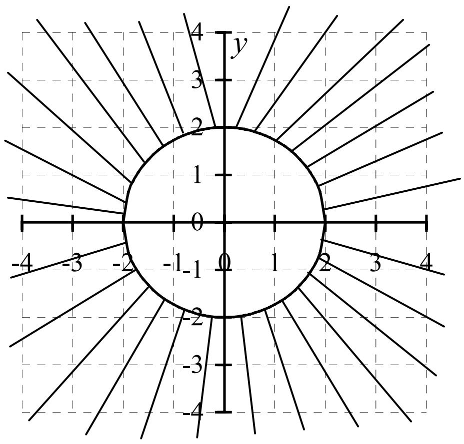
h) $y < 4 + 2x$



e) $x^2 + y^2 = 4$



i) $x^2 + y^2 \geq 4$



IV.1 Il faut recopier la définition d'une fonction, donnée en page 10.

Les trois phrases qui définissent une fonction. Pour avoir une fonction, il faut que :

1) on ait un ensemble A, appelé ensemble de départ.
2) on ait un ensemble B, appelé ensemble de d'arrivée.
3) on ait une règle de correspondance, qui à chaque élément de l'ensemble de départ A, fait correspondre zéro ou un élément de l'ensemble d'arrivée B.

IV.2 Un élément peut avoir plusieurs images par une relation, alors que par une fonction il peut avoir au maximum une image.

IV.3 Un élément peut ne pas avoir d'image par une fonction, alors que ce n'est pas possible pour une application. Une application est une fonction qui a chaque élément de l'ensemble de départ fait correspondre <u>exactement</u> une image.

IV.4
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Images par g : $g(64) = 8$; $g(121) = 11$; $g(144) = 12$; $g(200) = \sqrt{200} = 10 \cdot \sqrt{2}$

Préimages par g : $g^{-1}(7) = \{49\}$; $g^{-1}(11) = \{121\}$; $g^{-1}(15) = \{225\}$

L'image de -4 par g n'existe pas, car la racine carrée de -4 n'est pas un nombre réel.

IV.5 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-6x+8}=\dfrac{1}{(x-4)\cdot(x-2)}$ factoriser est toujours une bonne idée.

$f(0)=\dfrac{1}{8}$ $\qquad f(\pi)=\dfrac{1}{\pi^2-6\cdot\pi+8}=\dfrac{1}{(\pi-4)\cdot(\pi-2)}$, les deux réponses sont bonnes.

$f(\sqrt{2})=\dfrac{1}{2-6\cdot\sqrt{2}+8}=\dfrac{1}{(\sqrt{2}-4)\cdot(\sqrt{2}-2)}$, les deux réponses sont bonnes.

2 et 4 n'ont pas d'images par *f*, car on ne peut pas diviser par 2, ni par 4. Dom(f) = $\mathbb{R} \setminus \{ 2 \,;\, 4 \}$

$f(x)=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2-6x+8}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x^2-6x+8=3 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0$

$\Leftrightarrow (x-5)\cdot(x-1)=0$ donc $f^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)=\{\,1\,;5\}$

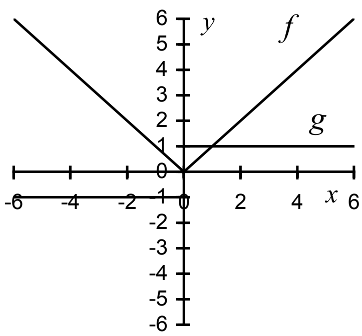
$f(x)=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2-6x+8}=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow x^2-6x+8=8 \Leftrightarrow x^2-6x=0$

$\Leftrightarrow x\cdot(x-6)=0$ donc $f^{-1}\left(\dfrac{1}{8}\right)=\{\,0\,;6\}$

V.1 Un but de cet exercice est que vous vous rendiez compte que l'image de 0 égale l'ordonnée à l'origine d'une fonction. Les cinq résultats sont : 0; 3/7; -π; pas défini; 0.

V.2 L'axe des abscisses est l'axe horizontal. On l'appelle parfois l'axe des X.
L'axe des ordonnées est l'axe vertical. On l'appelle parfois l'axe des Y.

V.3 Ces exemples ont été donnés dans le cours, pages 14 et 15.



V.4 $f(x)=\begin{cases} x & si\ x\geq 0 \\ -x & si\ x<0 \end{cases}$ et $g(x)=\begin{cases} 1 & si\ x>0 \\ 0 & si\ x=0 \\ -1 & si\ x<0 \end{cases}$

V.5 $x+y=9$ => $y=9-x$.

Cette expression correspond à la fonction : $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 9-x \end{aligned}$

Les ensembles de départ et d'arrivée sont égaux à l'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R}$.

V.6 diagonale = $\sqrt{2}$ · côté, qui correspond à la fonction : $\begin{aligned} f:\mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{2}\cdot x \end{aligned}$

L'ensemble de départ égale l'ensemble des nombres réels positifs.
L'ensemble d'arrivée égale l'ensemble des nombres réels. On peut aussi se limiter à l'ensemble des nombres réels positifs.

V.7 aire = $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot$côté ^{2} . Par Pythagore on montre que la hauteur égale $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ fois la longueur d'un côté.

Cette relation correspond à la fonction : $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot x^2$

L'ensemble de départ égale l'ensemble des nombres réels positifs.
L'ensemble d'arrivée égale l'ensemble des nombres réels. On peut aussi le limiter à l'ensemble des nombres réels positifs.

V.8 La droite est définie par $y = 1 + x / 2$, qui correspond à la fonction : $\begin{array}{l} f_1 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 + x/2 \end{array}$

L'aire hachurée est celle d'un trapèze : Aire = $(1 + (1 + x / 2)) \cdot x / 2 = x + x^2 / 4$.

Ceci correspond à la fonction : $\begin{array}{l} f_2 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + x^2/4 \end{array}$

L'ensemble de départ égale l'ensemble des nombres réels positifs.
L'ensemble d'arrivée égale l'ensemble des nombres réels. On peut aussi se limiter à l'ensemble des nombres réels positifs.

V.9 L'aire d'une paroi latérale = $x \cdot h$. L'aire du fond = x^2.
L'aire extérieure $A = 4 \cdot x \cdot h + x^2$.
Le volume = $x^2 \cdot h = 500$, donc $h = 500 / x^2$. Ceci permet d'exprimer l'aire extérieure en fonction de x.
L'aire extérieure = $A(x) = 4 \cdot x \cdot 500 / x^2 + x^2 = 2'000 / x + x^2$.

Ceci correspond à la fonction : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2'000/x + x^2 \end{array}$

V.10 La première courbe ne correspond pas à une fonction, car les nombres de l'intervalle]-1 ; 1] ont plusieurs images.
La deuxième courbe correspond à une fonction, car aucun nombre n'a plus d'une image.
La troisième courbe ne correspond pas à une fonction, car les nombres de l'intervalle]-2 ; 2[ont deux images.
La quatrième courbe correspond à une fonction, car aucun nombre n'a plus d'une image. Il y a une ambiguïté concernant l'image de 0. Si vous estimez que 0 possède plusieurs images, alors cette courbe ne correspond pas à une fonction.
La cinquième courbe correspond à une fonction, car aucun nombre n'a plus d'une image. Il y a ambiguïté concernant les images de -2 ; 0 ; 1 et de 3. Mais raisonnablement, ces quatre nombres n'ont que 0 comme image.
La sixième courbe correspond à une fonction, car aucun nombre n'a plus d'une image. Il y a une ambiguïté concernant l'image de 1. Si vous estimez que 1 possède plusieurs images, alors cette courbe ne correspond pas à une fonction.

V.11 $f(1) = -2$ $\quad$ $f(-2) = -0{,}5$ $\quad$ $f(0) = -1{,}5$
$g(1) = 2$ $\quad$ $g(-2) = 2$ $\quad$ $g(0) = 3$
$h(1) = 2$ $\quad$ $h(-2) = -1$ $\quad$ $h(0) = 1$

b) Il semble raisonnable de penser que $h(x) = x+1$ en voyant le graphique. Dans ce cas, en remplaçant x par -49, son image par h égale bien -48, puisque -48 = -49 + 1. Donc l'affirmation est vraie.
Mais si on ne peut pas être sûr de cette réponse, car on n'est pas sur de la définition de la fonction h pour des valeurs hors de l'intervalle [-5 ; 4]. Il n'y a pas de réponse correcte sans justifier cette réponse.

c) $f^{-1}(-3) = \{3\}$ $\quad$ $g^{-1}(3) = \{-1 ; 0\}$ $\quad$ $h^{-1}(0) = \{-1\}$ vous pouvez aussi écrire :
$f(x) = -3 \Rightarrow x = 3$ $\quad$ $g(x) = 3 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 0$ $\quad$ $h(x) = 0 \Rightarrow x = -1$
$f(x) = g(2) = 0 \Rightarrow x = -3$ $\quad$ $f(x) = h(-3) = -2 \Rightarrow x = 1$
$g(x) = h(x) \Rightarrow x = -4$ ou $x = 1$ $\quad$ $g(x) > f(x) \Rightarrow x \in]-3 ; 3[$
$g(x) = g(x + 1) \Rightarrow x = -1$
$f(x) = h(x) \Rightarrow -0{,}5 \cdot x - 1{,}5 = x + 1 \Rightarrow -2{,}5 = 1{,}5 \cdot x \Rightarrow x = -2{,}5 / 1{,}5 = -5 / 3 = 0{,}6666...$

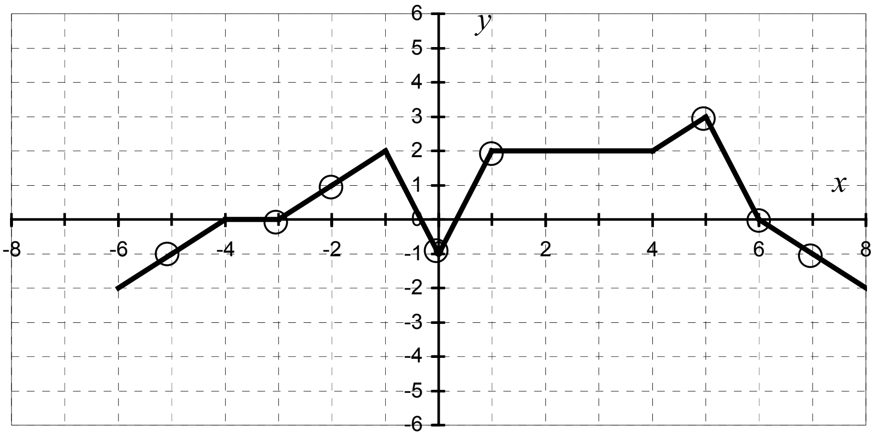
d) Zéros(f) = {-3}; $\quad$ Zéros(g) = {-3 ; 2}; $\quad$ Zéros(h) = {-1}
f est positive ou nulle sur l'intervalle]-∞ ; -3]
g est négative ou nulle sur $]-\infty ; -3] \cup [2 ; \infty[$
h est strictement positive sur l'intervalle]-1 ; ∞[

V.12 Les courbes a) et c) sont représentatives d'une fonction réelle.
La courbe c) a une ambiguïté en 0, mais on peut estimer que 0 n'a qu'une seule image.
La courbe b) ne l'est pas, cas il y a un nombre (même plusieurs) qui ont plus d'une image.
La courbe d) ne l'est pas, cas le nombre 1 possède plus d'une image.

V.13 Cette courbe pourrait représenter la hauteur en mètres, d'un niveau d'eau, relativement à une référence, au cours du temps.

b) $f(-6) = -2{,}666...$ car la pente de la droite à cet endroit est de 4 / 3.
$f(-4) = 0$ $f(-2) = 2$ $f(0) = 3$ $f(2) = 2$
$f(4) = -2$ $f(5{,}5) = -1$
$f^{-1}(-2) = \{-5{,}5 ; 4\}$ $f^{-1}(0) = \{-4 ; 3\}$ $f^{-1}(2) = [-2{,}5 ; -1] \cup \{2\}$
$f^{-1}(3) = \{0 ; 1{,}5\}$ $f^{-1}(4) = \{1\}$ $f^{-1}(4{,}5) = \varnothing = \{\ \}$ = l'ensemble vide.
Zéros(f) = $f^{-1}(0) = \{-4 ; 3\}$
L'ordonnée à l'origine = $f(0) = 3$

V.14 Des cercles ont été mis aux endroits imposés par l'énoncé.



V.15 a) $f(x) = -\dfrac{2}{3} \cdot x^2$ b) $f(x) = \dfrac{9}{5} \cdot x + 32$, 0 [°C] = 32 [°F], l'image de 0 est bien 32.
c) $f(x) = 10 / x$, puisque longueur fois largeur = x fois $f(x)$ = 10.

V.16 Ici, il faut vérifier si $f(2) = -3$.
a) $f(2) = 1$, donc la réponse est NON.
b) $f(2) = -4$, donc la réponse est NON.
c) $f(2) = 20$, donc la réponse est NON.
d) $f(2) = -3$, donc la réponse est OUI.

V.17 Ici, il faut remplacer x de chaque expression par les nombres -2; 0 et 8.
a) $f(-2) = 30$ $f(0) = 24$ $f(8) = 0$
b) $f(-2) = 0$ $f(0) = -4$ $f(8) = 60$
c) $f(-2) = 0$ $f(0) = \sqrt{2}$ $f(8) = \sqrt{10}$
d) $f(-2) = -6 / 5$ $f(0) = 0$ $f(8) = 24 / 65$

V.18 Ici, il faut résoudre $f(x)$ = le nombre -1; 0 ou 2, pour trouver les valeurs possibles pour x.
a) $f^{-1}(-1) = \{1\}$ $f^{-1}(0) = \{7 / 8\}$ $f^{-1}(2) = \{5 / 8\}$
b) $f^{-1}(-1) = \varnothing$ $f^{-1}(0) = \{0\}$ $f^{-1}(2) = \{-1; 1\}$
c) $f^{-1}(-1) = \{-1\}$ $f^{-1}(0) = \{0\}$ $f^{-1}(2) = \{8\}$
d) $f^{-1}(-1) = \varnothing$ $f^{-1}(0) = \varnothing$ $f^{-1}(2) = \mathbb{R}$

V.19 Pour déterminer le domaine de définition, il faut exclure des nombres réels $\mathbb{R}$, les cas de division par 0, les cas de racines carrées de nombre négatif et les cas de racines $4^{\text{ème}}$, $6^{\text{ème}}$ etc. de nombre négatif.
Les Zéros de f égale l'ensemble des nombres ayant 0 comme image.
L'ordonnée à l'origine est simplement l'image de 0.

a)	$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$	$\text{Zéros}(f) = \{-2 / 3\}$	$f(0) = 2$
b)	$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$	$\text{Zéros}(f) = \{-3 ; 3\}$	$f(0) = -9$
c)	$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$	$\text{Zéros}(f) = \{0 ; 1\}$ car $f(x) = x \cdot (x - 1)^2$	$f(0) = 0$
d)	$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_+$	$\text{Zéros}(f) = \{0\}$	$f(0) = 0$
e)	$\text{Dom}(f) = [-5 ; \infty[$	$\text{Zéros}(f) = \{-5\}$	$f(0) = \sqrt{5}$
f)	$\text{Dom}(f) =]-\infty ; 7/2]$	$\text{Zéros}(f) = \{7 / 2\}$	$f(0) = \sqrt{7}$
g)	$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$	$\text{Zéros}(f) = \varnothing$	$f(0) = 5 / 3$
h)	$f(x) = 5 / [(x - 3) \cdot (x + 4)]$, donc il y a division par zéro si $x = 3$ et si $x = -4$		
	$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-4 ; 3\}$	$\text{Zéros}(f) = \varnothing$	$f(0) = -5 / 12$
i)	$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$	$\text{Zéros}(f) = \{0\}$	$f(0) = 0$
j)	$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$	$\text{Zéros}(f) = \varnothing$ (2 n'est pas dans $\text{Dom}(f)$!)	$f(0) = 1 / 2$
k)	$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$	$\text{Zéros}(f) = \{0\}$	$f(0) = 0$
l)	$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_+$	$\text{Zéros}(f) = \{0\}$	$f(0) = 0$
m)	$\text{Dom}(f) = [4 ; 5]$	$\text{Zéros}(f) = \{4 ; 5\}$	$f(0)$ n'existe pas, car $0 \notin \text{Dom}(f)$

VI.1	Pente	Ordonnée à l'origine	Zéros(f)
a)	-5 / 6	4	{24 / 5}
b)	4	-2	{1 / 2}
c)	-1	1	{1}
d)	3 / 4	0	{0}
e)	0	6	$\varnothing$

f) $x = -3$ ne représente pas une application affine. Son graphique est représenté par une droite verticale d'abscisse $x = -3$.

g) On cherche pour quelle valeur de x, $-\frac{5}{6}x + 4 = 4x - 2$. Ceci est une équation simple à résoudre.

$$-5x + 24 = 24x - 12 \quad \rightarrow \quad 36 = 29x \quad \rightarrow \quad x = \frac{36}{29} \approx 1,2414$$

$$y = 4x - 2 = 4 \cdot \frac{36}{29} - \frac{58}{29} = \frac{4 \cdot 36 - 58}{29} = \frac{86}{29} \approx 2,9655.$$

Donc $\mathbf{d_1 \cap d_2} = \left\{ \left(\frac{36}{29} ; \frac{86}{29} \right) \right\}$ Pour le graphique, c.f. page suivante.

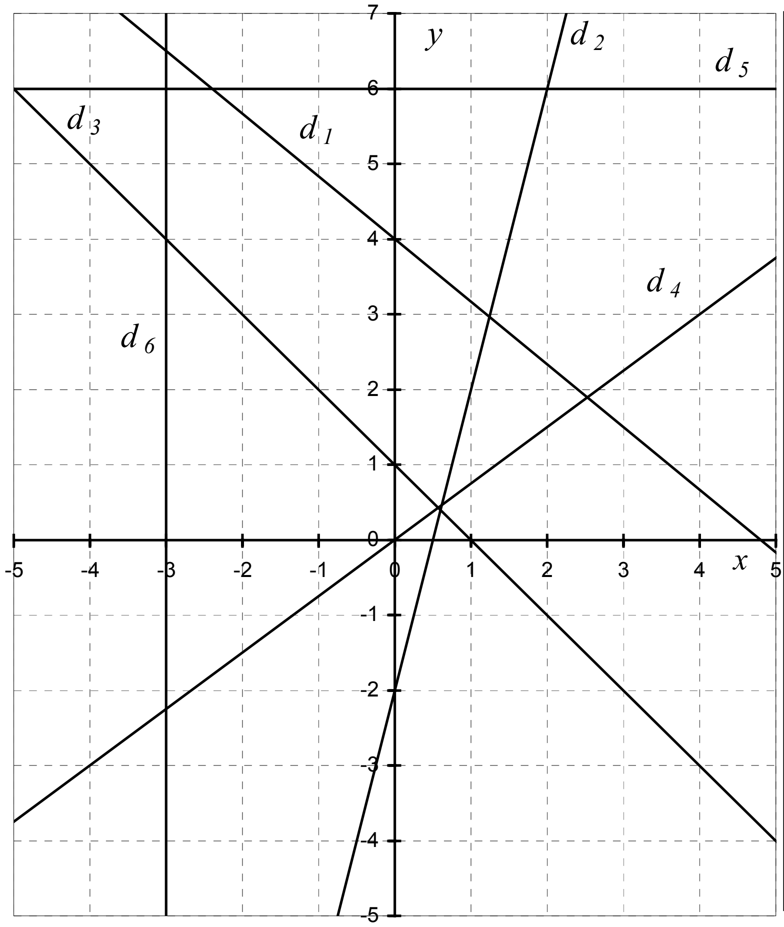
VI.2 On donne à chaque fois la pente de la droite, ainsi qu'un point par lequel elle devra passer. Construisez le graphe de chacune de ces droites, en donnant à chaque fois l'équation exacte.

a) $d_1(x) = -2 \cdot x + b$ et on sait que : $d_1(-4) = 1$, donc $1 = -2 \cdot (-4) + b$, donc $b = 1 - 8 = -7$.
$d_1(x) = -2 \cdot x - 7$

b) $d_2(x) = \frac{3}{4} \cdot x + b$ et on sait que : $d_2(2) = -1$, donc $-1 = \frac{3}{4} \cdot 2 + b$, donc $b = -\frac{3}{2} - 1 = -2,5$
$d_2(x) = 0,75 \cdot x - 2,5$

c) Parallèle signifie avoir la même pente, donc :
$d_3(x) = \frac{3}{4} \cdot x + b$ et on sait que : $d_3(-3) = 4$, donc $4 = \frac{3}{4} \cdot (-3) + b$, donc $b = 4 + \frac{9}{4} = 6,25$
$d_3(x) = 0,75 \cdot x + 6,25$ Les graphes sont des lignes droites. Ils sont donnés deux pages plus loin.

Ex VI.1, graphique.



Question supplémentaire :
Les droites d_2 ; d_3 et d_4 se croisent-elles en un même point ?

$d_2 \cap d_3$: $4x - 2 = -x + 1 \Leftrightarrow 5x = 3$

d_2 croise d_3 en $x = \frac{3}{5} = 0,6$

$d_4 \cap d_3$: $\frac{3}{4}x = -x + 1 \Leftrightarrow 7x = 4$

d_4 croise d_3 en $x = \frac{4}{7} \approx 0,571$

Donc ces trois droites ne se croisent pas en un même point.

Calculons encore l'abscisse du point de croisement de d_2 avec d_4.

$d_2 \cap d_4$: $4x - 2 = \frac{3}{4}x \Leftrightarrow 13x = 8$

d_4 croise d_3 en $x = \frac{8}{13} \approx 0,615$

VI.3 La pente se calcule par : pente = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ où $(x_1\,;\,y_1)$ et $(x_2\,;\,y_2)$ sont les deux points donnés.

On choisit généralement les couples tels que $x_1 < x_2$, mais ce n'est pas obligatoire.

1) pente = $\frac{-3-4}{1-(-2)} = \frac{-7}{3}$. $d_1(x) = -\frac{7}{3} \cdot x + b$ $\quad -3 = -\frac{7}{3} \cdot 1 + b$ donc $b = -3 + \frac{7}{3} = -\frac{2}{3}$

Donc $d_1(x) = -\frac{7}{3} \cdot x - \frac{2}{3}$

2) pente = $\frac{-2-(-2)}{5-(-3)} = 0$. $d_1(x) = 0 \cdot x + b = b$ $\quad -2 = b$ (Dans ce cas, l'équation est très simple !)

Donc $d_2(x) = -2$ (C'est une application constante)

3) pente = $\frac{2,5-(-1,5)}{-1-(-1)} = \frac{4}{0} =$ pas défini. Aucune application affine passe par ces deux points.

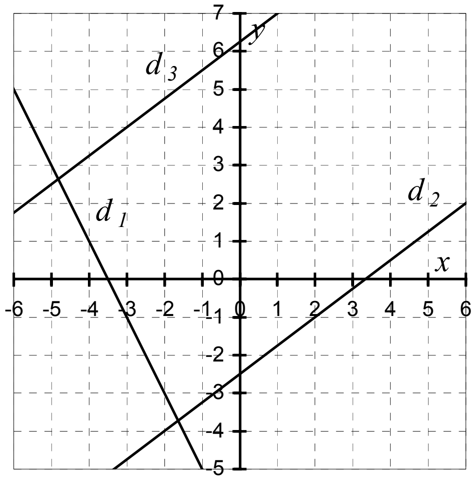
Mais ces deux points définissent une droite verticale d'équation $x = -1$.

4) pente = $\frac{4-1}{5-(-4)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ On peut aussi calculer : pente = $\frac{1-4}{-4-5} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$

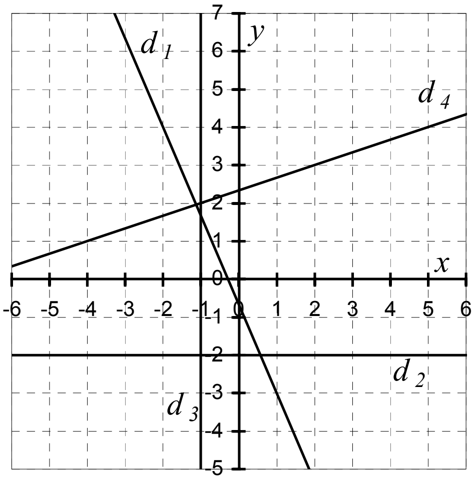
$d_4(x) = \frac{1}{3} \cdot x + b$ $\quad 4 = \frac{1}{3} \cdot 5 + b$ donc $b = 4 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$

Donc $d_4(x) = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{7}{3}$

VI.2 (Graphique)

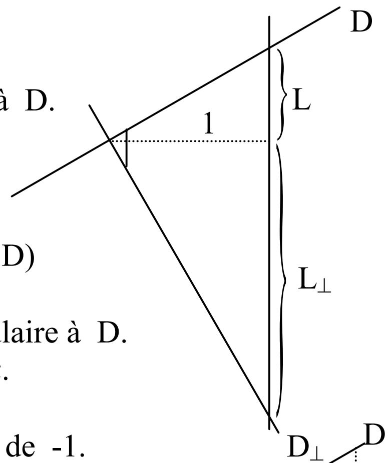


VI.3 (Graphique)



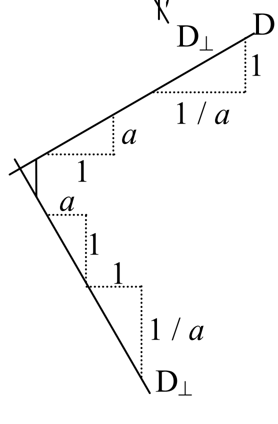
VI.4 L'équation de la droite D peut aussi s'écrire : $y = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{5}{4}$ ou $y = -0{,}75 \cdot x + 1{,}25$

1) La pente égale -3 / 4 = -0,75
2) L'ordonnée à l'origine égale 5 / 4 = 1,25
3) En remplaçant x par 15 dans l'expression ci-dessus, on obtient $-\frac{3}{4} \cdot 15 + \frac{5}{4} = -\frac{40}{4} = -10$,
   donc (15 ; -10) appartient à la droite D.
4) Pour obtenir un point de la droite D, il suffit de choisir une valeur arbitraire de x, et de calculer le y correspondant par la relation ci-dessus. Voici quelques points de D :
   (0 ; 1,25), (1 ; 0,5), (2 ; -0,25), (3 ; -1), (4 ; -1,75), (5 ; -2,5), (6 ; -3,25), (7 ; -4)
   On peut aussi utiliser des valeurs de x non entières.
   (0,1 ; -0,075+1,25), (√2 ; -0,75·√2+1,25), (π ; -0,75·π+1,25)
5) Pour une valeur de x, toutes les valeurs de y sont acceptable, sauf celle qui satisfait la relation.
   Voici des points qui n'appartiennent pas à D :
   (0 ; 0), (0 ; 1), (0 ; 2), (1 ; 125), (√2 ; 17), (π ; √2)
6) Pour trouver les Zéros de D, il faut résoudre : -0,75 · x + 1,25 = 0. On trouve x = 5 / 3
   Les Zéros de D = { 5/3 }



VI.5 Voici une manière de trouver la pente d'une droite $D_\perp$ perpendiculaire à D.
La pente de la droite D égale L.
La pente de la droite $D_\perp$ égale - $L_\perp$.
Le théorème de la hauteur dit que L · $L_\perp$ = hauteur = 1, donc $L_\perp$ = 1 / L
<u>Conclusion</u> : La pente de la droite $D_\perp$ égale -1 / (la pente de la droite D)

Voici une autre manière de trouver la pente d'une droite $D_\perp$ perpendiculaire à D.
La pente de la droite D est a. Si x augmente de 1, y augmente de a.
Si x augmente de 1 / a, y augmente de 1.
La pente de la droite $D_\perp$ est -1 / a. Si x augmente de a, y augmente de -1.
Si x augmente de 1, y augmente de -1/a.
<u>Conclusion</u> : La pente de la droite $D_\perp$ égale -1 / (la pente de la droite D)



Si la pente de D égale 2, la pente de $D_\perp$ égale -1/2.

b) L'équation de $D_\perp$ est : y = -1 / 1,5 · x + b = (-2 / 3) · x + b
On trouve b à partir de l'équation : -1 = (-2 / 3) · 6 + b donc b = 3
L'équation de $D_\perp$ est : y = (-2 / 3) · x + 3

VI.6 L'expression algébrique définissant f est donnée en trois parties. Celle correspondant aux valeurs de x plus petit que 0, celle correspondant aux valeurs de x entre 0 et 1 et celle correspondant aux valeurs de x supérieur à 1. Dans ces trois cas, il faut déterminer l'équation d'une droite.
Pour f, l'expression des trois droites est facile à trouver. Donc on obtient :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ -2 \cdot x + 1 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ -1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

L'expression algébrique définissant g est aussi donnée en trois parties. Celle correspondant aux valeurs de x plus petit que -1, celle correspondant aux valeurs de x entre -1 et 0 et celle correspondant aux valeurs de x supérieur à 0. Dans ces trois cas, il faut déterminer l'équation d'une droite.
Pour g, l'expression des trois droites est moins facile à trouver.
A partir du graphique, on trouve que :

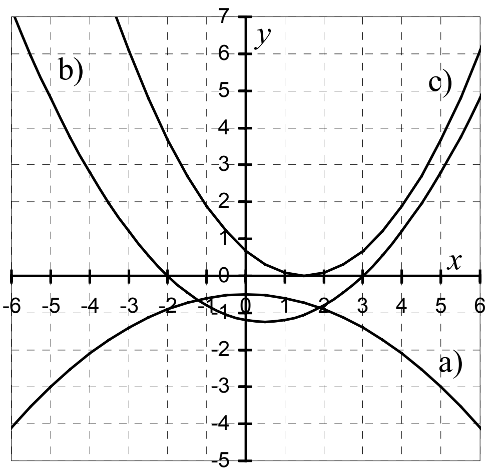
- la pente de la première droite est de 2,5, car on monte de 2,5 si on avance de 1.
- l'ordonnée à l'origine de la première droite est de 4, car y passe de 1,5 à 1,5 + 2,5 si x passe de -1 à 0.
- la pente de la deuxième droite est de -1, car on descend de 1 si on avance de 1.
- l'ordonnée à l'origine de la deuxième droite se lit sur le graphique et vaut 0,5.
- la pente de la troisième droite est de 0,5, car on monte de 0,5 si on avance de 1.
- l'ordonnée à l'origine de la troisième droite se lit sur le graphique et vaut 0,5.

Donc on obtient :

$$g(x) = \begin{cases} 2,5 \cdot x + 4 & \text{si} \quad x \le -1 \\ -x + 0,5 & \text{si -1} < x \le 0 \\ 0,5 \cdot x + 0,5 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

VII.1 Si le nombre a vaut zéro, on obtient l'application affine : $y = \ b \cdot x + c$

VII.2



VII.3 a) Les Zéros de la fonction parabolique $y = 3 \cdot (x+4) \cdot (x-3)$ sont : {-4 ; 3}

b) $y = 3 \cdot (x+4) \cdot (x-3) = 3x^2 + 3x - 36$.

c) Les zéros de $y = 3x^2 + 3x - 36$ sont les même que ceux de $y = 3 \cdot (x+4) \cdot (x-3)$. Zéros = {-4 ; 3}

d) $(x_1 + x_2) = -b / a$; $x_1 \cdot x_2 = (b^2 - \Delta)/(4a^2) = (4 \cdot a \cdot c)/(4a^2) = c / a$

$$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = a \cdot x^2 - a \cdot (x_1 + x_2) \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2 = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

VII.4 On peut utiliser ce qu'on a vu dans l'exercice précédent, pour se simplifier la tache.

a) $f(x) = a \cdot (x + 2) \cdot (x - 2) = a \cdot x^2 - 4 \cdot a$ et $-12 = f(0) = -4 \cdot a$, donc $a = 3$
$f(x) = 3 \cdot x^2 - 12$

b) $f(x) = a \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$ et $6 = f(0) = a \cdot (-1) \cdot (-3) = a \cdot 3$, donc $a = 2$
$f(x) = 2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) = 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 6$ (Les deux écritures sont acceptables.)

c) Les images sont toutes les trois égales à celle de la fonction définie en b), plus 5.
Donc la fonction est la même plus 5. Ce qui donne :
$f(x) = 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 6$ **+ 5** $= 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 11$

d) En utilisant la même idée que celle pour résoudre le point c), cherchons une fonction qui satisfait :
$g(-1) = 0 \quad g(3) = 0 \quad g(1) = 1$
On a soustrait 7 aux trois images. Il suffira d'ajouter 7 à la fonction obtenue.
$g(x) = a \cdot (x + 1) \cdot (x - 3)$ et $1 = g(1) = a \cdot 2 \cdot (-2)$, donc $a = -1/4 = -0{,}25$
$g(x) = -0{,}25 \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) = -0{,}25 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x + 0.75$
$f(x) = g(x) + 7 = -0{,}25 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x + 7{,}75$

e) Dans le cas où un minimum est donné, il est plus simple d'utiliser : $f(x) = a \cdot \left(x - x_{\min}\right)^2 + y_{\min}$
Donc $f(x) = a \cdot (x + 2)^2 - 18$.
Si $x = -2$, $f(x) = f(-2) = -18$ et c'est un minimum. Reste à trouver la valeur de a.
$0 = f(-5) = a \cdot (-5 + 2)^2 - 18$ donc $0 = a \cdot 9 - 18$ donc $a = 2$
La réponse finale est : $f(x) = 2 \cdot (x + 2)^2 - 18$.
On peut développer, mais ce n'est pas nécessaire : $f(x) = 2 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 10$.

f) Dans le cas où un minimum est donné, il est plus simple d'utiliser : $f(x) = a \cdot \left(x - x_{\min}\right)^2 + y_{\min}$
Donc $f(x) = a \cdot (x - 2)^2 - 8$.
Si $x = 2$, $f(x) = f(2) = -8$ et c'est un minimum. Reste à trouver la valeur de a.
$4 = f(0) = a \cdot (0 - 2)^2 - 8$ donc $4 = a \cdot 4 - 8$ donc $a = 3$
La réponse finale est : $f(x) = 3 \cdot (x - 2)^2 - 8$.
On peut développer, mais ce n'est pas nécessaire : $f(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 4$.
Remarquez qu'on retrouve 4 comme ordonnée à l'origine.

VII.5 La factorisation permet souvent de trouver plus rapidement les Zéros. La formule de Viète est plus automatique, mais plus longue.
x_{minimum} ou $x_{\text{maximum}} = -b / (2a)$ = moyenne des deux valeurs des Zéros.
Il suffit de calculer l'image de x_{minimum} ou x_{maximum} pour trouver l'ordonnée correspondante.

a) $f(x) = (x + 1)^2$. Donc Zéros(f) = {-1} et le minimum est en (-1 ; 0) (Δ=0)

b) $f(x) = (x + 3) \cdot (x - 1)$. Donc Zéros(f) = {-3 ; 1} et le minimum est en (-1 ; -4) car
$-1 = (-3 + 1) / 2$ et $-4 = f(-1)$ (Δ=16)

c) La factorisation n'est pas simple, on utilise la formule de Viète.
$a = 1 \quad b = 2 \quad c = -4 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 20$

Zéros : $$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-2+\sqrt{20}}{2} = \frac{-2+2\cdot\sqrt{5}}{2} = -1+\sqrt{5}$$
$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-2-\sqrt{20}}{2} = \frac{-2-2\cdot\sqrt{5}}{2} = -1-\sqrt{5}$$

$x_{\text{minimum}} = -b / (2a) = -2 / 2 = -1 \qquad y_{\text{minimum}} = f(x_{\text{minimum}}) = f(-1) = -5$

Zéros(f) = $\left\{-1+\sqrt{5}\ ;\ -1-\sqrt{5}\right\}$ et le minimum est en (-1 ; -5)

d) $f(x) = 3 \cdot (x + 3) \cdot (x - 1)$. Donc Zéros(f) = {-3 ; 1} et le minimum est en (-1 ; -12)
(Δ=144)

e) $f(x) = (x - 2/3)^2$. Donc Zéros(f) = {2/3} et le minimum est en (2/3 ; 0) (Δ=0)

f) $f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{9}=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=x^2-2\cdot\frac{2}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{9}=\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{9}$

Donc le minimum est en (2/3 ; 1/9) et Zéros(f) = ∅ (Δ = -4/9 est négatif)

g) On utilise la formule de Viète.

$a = 9$ $b = -12$ $c = 5$ $\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 5 = -36$ (rem. $(-12)^2 = 12^2$)

Puisque le discriminant Δ est négatif, il n'y a pas de Zéros, donc Zéros(f) = ∅

$x_{\text{minimum}} = -b / (2a) = -(-12) / (2 \cdot 9) = 2/3$ $y_{\text{minimum}} = f(x_{\text{minimum}}) = f(2/3) = 1$

le minimum est en (2/3 ; 1)

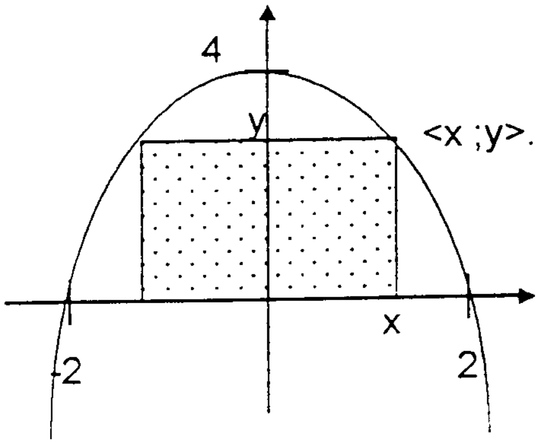
On aurait pu remarquer que $f(x)=9x^2-12x+5=(3x-2)^2+1$ et trouver plus rapidement sans utiliser la formule de Viète les résultats précédents.

Une dernière remarque : Tous les exemples de cet exercice sont des paraboles **convexes** car le coefficient a qui multiplie x^2 est positif. Donc on détermine chaque fois un minimum. Quand le coefficient a est négatif, la parabole est **concave** et possède un maximum.

VII.6 a) $f(x) = a \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$ puisque les Zéros = {-2 ; 2}

$f(0) = 4 = a \cdot (-2) \cdot 2$, donc $a = -1$

$f(x) = 4 - x^2$



b) L'aire $A(x)$ = base · hauteur = $2 \cdot x \cdot f(x) = 8 \cdot x - 2 \cdot x^3$

c) Cette partie est hors programme de première année. Mais elle est réalisable avec les connaissances que vous avez.

Cherchons pour quelles valeurs x et h on a :

$A(x) = A(x + h)$.

$8 \cdot x - 2 \cdot x^3 = 8 \cdot (x + h) - 2 \cdot (x + h)^3$

$8x - 2x^3 = 8x + 8h - 2 \cdot (x^3 + 3x^2 \cdot h + 3x \cdot h^2 + h^3)$

$8x - 2x^3 = 8x + 8h - 2x^3 - 6x^2 \cdot h - 6x \cdot h^2 - 2h^3$ on simplifie

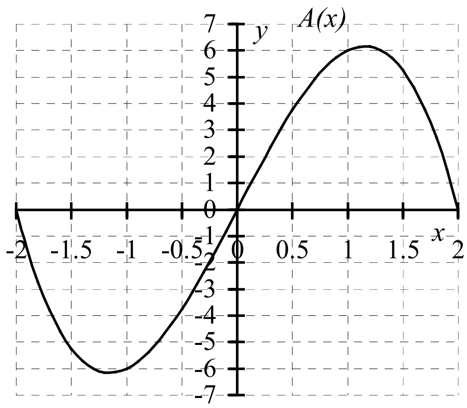
$0 = 8h - 6x^2 \cdot h - 6x \cdot h^2 - 2h^3$

$0 = 4 - 3x^2 - 3x \cdot h - h^2$

Cette égalité lie les variables x et h.

Pour chaque valeur de h (petite), il y a une valeur positive de x qui satisfait l'égalité. Le maximum se trouvant en une valeur de l'abscisse entre x et $x + h$.

A la limite, quand $h = 0$, on a trouvé l'abscisse du maximum.



$x > 0$ et $0 = 4 - 3x^2$ donc $x=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\approx 1{,}1547$

Le maximum est en :

$\left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\,;\,y_{\max}\right)$ $y_{\max}=f\left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right)\approx 6{,}1584$

VIII.1 $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\quad f(x)=x^2+8x+12=(x+2)\cdot(x+6)$

a) La translation verticale de cette fonction par +4 est $g(x) = f(x) + 4 = x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$
b) La translation verticale de cette fonction par -3 est $g(x) = f(x) - 3 = x^2 + 8x + 9$
c) La translation verticale de cette fonction par -12 est $g(x) = f(x) - 12 = x^2 + 8x$
d) La translation horizontale de cette fonction par -3 est $g(x) = f(x+3) = (x + 5) \cdot (x + 9)$
e) La translation horizontale de cette fonction par 2 est $g(x) = f(x-2) = x \cdot (x + 4)$
f) La translation horizontale de cette fonction par 6 est $g(x) = f(x-6) = (x - 4) \cdot x$
d') La translation horizontale de cette fonction par 3 est $g(x) = f(x-3) = (x - 1) \cdot (x + 3)$
e') La translation horizontale de cette fonction par -2 est $g(x) = f(x+2) = (x + 4) \cdot (x + 8)$
f') La translation horizontale de cette fonction par -6 est $g(x) = f(x+6) = (x + 8) \cdot (x + 12)$

VIII.2 $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\quad f(x)=x^2+4x-5$ et $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\quad g(x)=x-1$

$(f+g)(x) = x^2 + 4x - 5 + x - 1 = x^2 + 5x - 6$
$(f-g)(x) = x^2 + 4x - 5 - x + 1 = x^2 + 3x - 4$
$(f\cdot g)(x) = (x^2 + 4x - 5) \cdot (x - 1) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ (il n'est pas nécessaire de développé)
$(f/g)(x) = (x^2 + 4x - 5) / (x - 1)$
$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = (x - 1)^2 + 4 \cdot (x - 1) - 5 = x^2 - 2x + 1 + 4x - 4 - 5 = x^2 + 2x - 8$
$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2 + 4x - 5) - 1 = x^2 + 4x - 6$
On voit que $(f\circ g)(x)$ est différent de $(g\circ f)(x)$, donc les fonctions $f\circ g$ et $g\circ f$ sont différentes.

VIII.3 $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\quad f(x)=x^2-4x+1\quad a = 1;\ b = -4;\ c = 1$

a) Soit on utilise $x_{\min} = -b/(2a) = 4/2 = 2$, $y_{\min} = -(b^2 - 4ac)/(4a) = -(16-4)/4 = -3$,
soit on fait une manipulation algébrique :
$f(x) = x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x + 4 - 3 = (x - 2)^2 - 3$
b) La valeur minimale de f est -3. Il faut donc ajouter 3 pour avoir une valeur minimale de 0.
$g(x) = f(x) + 3 = (x - 2)^2$
c) La valeur minimale de f se trouve en $x = 2$. Il faut donc faire une translation horizontale de -2 pour que le minimum se trouve en $x = 0$.
$h(x) = f(x + 2) = x^2 - 3$
d) En combinant les deux translations, on obtient : $j(x) = f(x + 2) + 3 = x^2$ qui a un minimum en (0 ; 0).

VIII.4 $f(x)=x-3,\quad g(x)=x^2-9,\quad h(x)=\dfrac{1}{x+3},\quad j(x)=x+3$

a) $(f+g)(x) = x^2 + x - 12$
b) $(f\cdot j)(x) = (x - 3) \cdot (x + 3) = x^2 - 9$
c) $(g\cdot h)(x) = (x^2 - 9) \cdot 1 / (x + 3) = (x - 3) \cdot (x + 3) / (x + 3) = x - 3$ (si $x \neq -3$)
d) $(g/j)(x) = (x^2 - 9) \cdot / (x + 3) = (x - 3) \cdot (x + 3) / (x + 3) = x - 3$ (si $x \neq -3$)
e) $(f-j)(x) = (x - 3) - (x + 3) = -6$ C'est une fonction constante
f) Puisque $f\cdot j = g$, $(f\cdot j - g)(x) = 0$ C'est la fonction constante nulle partout.
g) Puisque $g/j = f$, $(g\cdot j - f)(x) = 0$ C'est la fonction constante nulle partout.
h) $(g/(j-f))(x) = (x^2 - 9) / (x + 3 - x + 3) = (x^2 - 9) / 6$
i) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = (x^2 - 9) - 3 = x^2 - 12$
j) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = (x - 3)^2 - 9 = x^2 - 6x + 9 - 9 = x^2 - 6x$ différent de $(f\circ g)(x)$
k) $(f\circ j)(x) = f(j(x)) = (x + 3) - 3 = x$
l) $(j\circ f)(x) = j(f(x)) = (x - 3) + 3 = x$ cette fois, $j\circ f = f\circ j$
m) $(g\circ j)(x) = g(j(x)) = (x + 3)^2 - 9 = x^2 + 6x + 9 - 9 = x^2 + 6x$
n) $(j\circ g)(x) = j(g(x)) = (x^2 - 9) + 3 = x^2 - 6$ différent de $(g\circ j)(x)$
o) $(h\circ g)(x) = h(g(x)) = 1 / ((x^2 - 9) + 3) = 1 / (x^2 - 6)$
p) $(g\circ g)(x) = g(g(x)) = (x^2 - 9)^2 - 9 = x^4 - 18x^2 + 81 - 9 = x^4 - 18x^2 + 72$

q) $((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f\left(g\left(\frac{1}{x+3}\right)\right) = f\left(\left(\frac{1}{x+3}\right)^2 - 9\right) = \left(\frac{1}{x+3}\right)^2 - 9 - 3 = \left(\frac{1}{x+3}\right)^2 - 12$

q) $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g)\left(\frac{1}{x+3}\right) = \left(\frac{1}{x+3}\right)^2 - 12$ on a utilisé le point i)

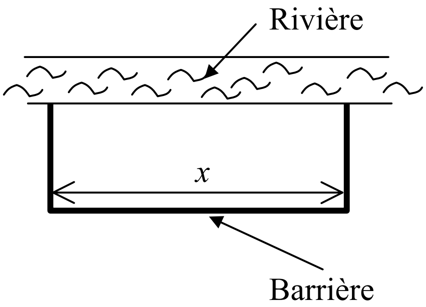
r) Le point s) montre que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ dans tous les cas.

s) $(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f\left(g(h(x))\right)$

$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f\left(g(h(x))\right)$

Dans les deux cas, on obtient la même fonction : *f(g(h(x)))* C'est juste un jeu d'écriture des parenthèses.
Donc on peut écrire : $f \circ g \circ h(x)$ sans parenthèses, car on peut en mettre ou on veut, le résultat sera toujours le même.

VIII.5 Notons x la longueur de la barrière parallèle à la rivière.
La longueur de chacune des deux barrières perpendiculaires à la rivière est (120 - x) / 2 = 60 - x/2.
L'aire délimitée par cette barrière et la rivière est :
$A(x)$ = base · hauteur = x · (60 - x/2) =60x - x^2 / 2
L'aire est une fonction parabolique concave de x.
Elle a un maximum en $x = -b/(2a) = 60$.
$A(60) = 60 \cdot 60 - 60^2 / 2$ = 1'800 mètres carrés.
L'aire maximale est de 1'800 mètres carrés.



En prenant une zone en demi-cercle, de périmètre égale à 120 mètres, on définit un rayon de longueur $r = 120 / \pi \approx 38{,}197$ mètres. Ce qui correspond à une surface de demi-disque de :
$\pi \cdot r^2 / 2 \approx 2'291{,}83$ mètres carrés. C'est mieux qu'une zone rectangulaire.
On peut montrer qu'il n'y a pas d'autre manière de délimiter cette zone pour obtenir une aire encore plus grande, mais cela est assez compliqué est de niveau universitaire.