

Exercice ❶ :

Le premier graphique correspond à la fonction $F_2(x) = (2-x) \cdot (2+x)$, car elle s'annule en $x=2$ et en $x=-2$ et son sommet est en $(0; 4)$. Cette fonction est concave.

Le deuxième graphique correspond à la fonction $F_1(x) = (x-2)^2$, car elle s'annule en $x=2$ et pour aucune autre valeur de x , et son sommet est en $(2; 0)$. Cette fonction est convexe.

Le troisième graphique correspond à la fonction $F_3(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 + 2$, car elle s'annule en $x=1$ et en $x=5$ et son sommet est en $(3; 2)$. Cette fonction est concave.

Exercice ❷:

a) $f(x) = a \cdot (x+2) \cdot (x-4)$ $f(0) = a \cdot (0+2) \cdot (0-4) = 16$ donc $a = -2$.

$$\underline{\underline{f(x) = -2 \cdot (x+2) \cdot (x-4)}}$$

b) $f(x) = a \cdot (x-3) \cdot (x-5)$ $f(1) = a \cdot (1-3) \cdot (1-5) = 8$ donc $a = 1$.

$$\underline{\underline{f(x) = (x-3) \cdot (x-5)}}$$

c) Posons $g(x) = f(x) - 2$, donc $g(0) = 1$; $g(1) = 0$; $g(-4) = 0$.

Donc $g(x) = a \cdot (x-1) \cdot (x+4)$ $g(0) = a \cdot (0-1) \cdot (0+4) = 1$ donc $a = -0,25$.

Finalement $\underline{\underline{f(x) = g(x) + 2 = -0,25 \cdot (x-1) \cdot (x+4) + 2}}$.

d) $f(x) = a \cdot (x+1)^2 - 2$ $f(2) = a \cdot (2+1)^2 - 2 = 6$ donc $a = \frac{8}{9}$. Finalement $\underline{\underline{f(x) = \frac{8}{9} \cdot (x+1)^2 - 2}}$.

e) $f(x) = a \cdot (x+1)^2 + 5$ $f(3) = a \cdot (3+1)^2 + 5 = 1$ donc $a = -\frac{1}{4}$. Finalement $\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x+1)^2 + 5}}$.

f) Ici, on ne peut pas utiliser les mêmes méthodes que précédemment, car on ne connaît pas deux valeurs de x qui possèdent la même image.

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 5$$

On sait que : $a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 5 = 7$ et $a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 5 = 13$.

Cela donne deux équations. Multiplions la première par -2 et additionnons les !

$$\begin{cases} -8 \cdot a - 4 \cdot b - 10 = -14 \\ 16 \cdot a + 4 \cdot b + 5 = 13 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{8 \cdot a - 5 = -1}}$$

Donc $a = 0,5$ et de $4 \cdot 0,5 + 2 \cdot b + 5 = 7$ on en déduit que : $b = 0$.

Finalement : $\underline{\underline{f(x) = 0,5 \cdot x^2 + 5}}$

g) Ici, on peut utiliser la même méthode que en f).

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 20$$

On sait que : $a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + 20 = -16$ et $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 20 = 12$.

Cela donne deux équations. Multiplions la deuxième par 3 et additionnons les !

$$\begin{cases} 9 \cdot a - 3 \cdot b + 20 = -16 \\ 3 \cdot a + 3 \cdot b + 60 = 36 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{12 \cdot a + 80 = 20}}$$

Donc $a = -5$ et de $1 \cdot (-5) + 1 \cdot b + 20 = 12$ on en déduit que : $b = -3$.

Finalement : $\underline{\underline{f(x) = -5 \cdot x^2 - 3x + 20}}$

Exercice ③ :

a) $x^2 + 3x + 2 = (x + 2) \cdot (x + 1) = 0$ Donc $Zéros(f) = \{-2; -1\}$

f possède un **minimum** en $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$. $\Delta = 1$

b) $x^2 + 4x + 3 = (x + 3) \cdot (x + 1) = 0$ Donc $Zéros(f) = \{-3; -1\}$

$f(x) = (x + 2)^2 - 1$ f possède un **minimum** en $(-2; -1)$. $\Delta = 4$

c) $x^2 + 8x + 5 = 0$; $a = 1$; $b = 8$; $c = 5$; $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 5 = 44$; $x = \frac{-8 \pm \sqrt{44}}{2} = -4 \pm \sqrt{11}$

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{44}}{2} = \frac{-8}{2} \pm \frac{2 \cdot \sqrt{11}}{2} = -4 \pm \sqrt{11}$. $Zéros(f) = \{-4 - \sqrt{11}; -4 + \sqrt{11}\}$

$f(x) = (x + 4)^2 - 11$ f possède un **minimum** en $(-4; -11)$.

d) $x^2 - x - 1 = 0$; $a = 1$; $b = -1$; $c = -1$; $\Delta = 1^2 + 4 = 5$; $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. $Zéros(f) = \left\{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$

f possède un **minimum** en $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right)$.

e) $-x^2 + 7x - 3 = 0$; $a = -1$; $b = 7$; $c = 3$; $\Delta = 7^2 + 4 \cdot 3 = 61$.

$x = \frac{-7 \pm \sqrt{61}}{-2}$. $Zéros(f) = \left\{\frac{7 - \sqrt{61}}{2}; \frac{7 + \sqrt{61}}{2}\right\}$

f possède un **maximum** en $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{7}{2}; \frac{61}{4}\right)$.

f) $x^2 - 4x + 6 = 0$; $a = 1$; $b = -4$; $c = 6$; $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 6 = -8 < 0$ donc $Zéros(f) = \emptyset$

$f(x) = (x - 2)^2 + 2$ f possède un **minimum** en $(2; 2)$.

g) $2x^2 + 5x + 1 = 0$; $a = 2$; $b = 5$; $c = 1$; $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 = 17$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$. $Zéros(f) = \left\{\frac{-5 - \sqrt{17}}{4}; \frac{-5 + \sqrt{17}}{4}\right\}$

f possède un **minimum** en $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{5}{4}; -\frac{17}{8}\right)$.

h) $-2x^2 + 5x - 3 = 0$; $a = -2$; $b = 5$; $c = -3$; $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{-4}$. ; $Zéros(f) = \left\{\frac{5 - 1}{4}; \frac{5 + 1}{4}\right\} = \left\{\frac{4}{4}; \frac{6}{4}\right\}$; $Zéros(f) = \{1; 1,5\}$

On aurait aussi pu factoriser : $2x^2 - 5x + 3 = (2x - 3) \cdot (x - 1)$.

f possède un **maximum** en $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{5}{4}; \frac{1}{8}\right)$.

i) $2x^2 + 4x + 1 = 0$; $a = 2$; $b = 4$; $c = 1$; $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 2 = 8$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{-4}{4} \pm \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. $Zéros(f) = \left\{-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

$f(x) = 2 \cdot (x + 1)^2 - 1$ f possède un **minimum** en $(-1; -1)$.

Exercice ③ suite :

j) $3x^2 + 5x + 1 = 0; a = 3; b = 5; c = 1; \Delta = 5^2 - 4 \cdot 3 = 13$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}. \quad \underline{\underline{Zéros(f) = \left\{ \frac{-5 - \sqrt{13}}{6}; \frac{-5 + \sqrt{13}}{6} \right\}}}$$

$$f \text{ possède un } \mathbf{minimum} \text{ en } \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right) = \left(-\frac{5}{6}; -\frac{13}{12} \right).$$

k) $-10x^2 - 7x - 2 = 0; a = -10; b = -7; c = -2; \Delta = 7^2 - 4 \cdot 10 \cdot 2 = 9$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{20}. \quad \underline{\underline{Zéros(f) = \left\{ \frac{7-3}{20}; \frac{7+3}{20} \right\}}} \quad \underline{\underline{Zéros(f) = \left\{ \frac{1}{5}; \frac{1}{2} \right\}}}$$

$$f \text{ possède un } \mathbf{maximum} \text{ en } \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right) = \left(-\frac{7}{20}; \frac{9}{40} \right).$$

l) $12x^2 - 11x + 5 = 0; a = 12; b = -11; c = 5; \Delta = 11^2 - 4 \cdot 12 \cdot 5 = -119 < 0$

donc : $\underline{\underline{Zéros(f) = \emptyset}}$.

$$f \text{ possède un } \mathbf{minimum} \text{ en } \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right) = \left(-\frac{11}{24}; \frac{119}{48} \right).$$

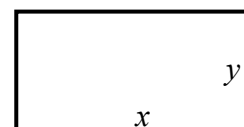
m) $-30x^2 + 23x - 4 = 0; a = -30; b = 23; c = -4; \Delta = 23^2 - 4 \cdot 30 \cdot 4 = 49$

$$x = \frac{-23 \pm \sqrt{49}}{-60}. \quad \underline{\underline{Zéros(f) = \left\{ \frac{23-7}{60}; \frac{23+7}{60} \right\}}} \quad \underline{\underline{Zéros(f) = \left\{ \frac{4}{15}; \frac{1}{2} \right\}}}$$

On aurait aussi pu factoriser : $-30x^2 + 23x - 4 = -(30x^2 - 23x + 4) = -(15x - 4) \cdot (2x - 1)$.

$$f \text{ possède un } \mathbf{maximum} \text{ en } \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right) = \left(\frac{23}{60}; \frac{49}{120} \right).$$

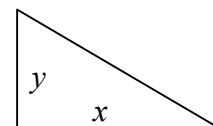
Exercice ④

Notons x et y la longueur en [cm] des deux côtés du rectangle.L'énoncé dit que $2x + 2y = 24$.Donc $x + y = 12$. Donc $y = 12 - x$.L'aire du rectangle est : Aire = $x \cdot y = x \cdot (12 - x)$. $f(x) = x \cdot (12 - x)$ est une fonction qui représente l'aire du rectangle en fonction de la longueur d'un de ses côtés. $f(x) = -x^2 + 12x$ représente une parabole concave ayant un maximum en $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{-2} = 6$ Donc l'aire est maximale lorsque $x = y = 6$.Le rectangle d'aire maximale est un carré de côtés 6 [cm] de longueur et d'aire égale à 36 [cm²].

Exercice ⑤

Notons x et y la longueur en [cm] des deux cathètes du triangle rectangle.L'énoncé dit que $x + y = 60$.La longueur de l'hypoténuse au carré vaut : $H^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (60 - x)^2$. $f(x) = x^2 + (60 - x)^2$ est une fonction qui représente le carré de la longueur de l'hypoténuse en fonction de la longueur d'une de ses cathètes. $f(x) = 2x^2 - 120x + 3600$ représente une parabole convexe ayant un minimum en $x = -\frac{b}{2a} = \frac{120}{2 \cdot 2} = 30$ Donc l'hypoténuse est de longueur minimale lorsque $x = y = 30$.

Le triangle rectangle est donc isocèle de cathètes valant chacune 30 [cm].



Exercice 6

Notons y la longueur de la barrière, x la hauteur de la barrière.

L'énoncé nous dit que : $y + 2x = 120$ mètres

On veut maximiser l'aire $x \cdot y$

De la première égalité, on en déduit que $y = 120 - 2x$

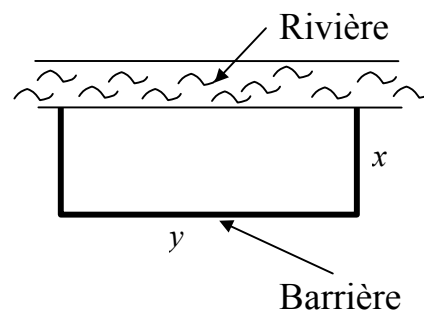
On veut donc maximiser : $x \cdot (120 - 2x) = 2x^2 - 120x$

C'est l'équation d'une parabole convexe avec ($a = 2$, $b = -120$, $c = 0$),

qui possède un minimum en $x = -\frac{b}{2a} = \frac{120}{4} = 30$.

Donc les dimensions optimales sont $x = 30$ mètres et $y = 60$ mètres.

Ce qui donne une aire de $30 \cdot 60 = \underline{1'800 \text{ mètres carrés}}$.

**Exercice 7**

L'énoncé nous dit que la hauteur de l'objet en fonction du temps est : $h(t) = -4,9 \cdot t^2 + 6 \cdot t + 1,5$

Les distances exprimées en mètres et le temps en secondes.

a) On cherche t tel que $h(t) = -4,9 \cdot t^2 + 6 \cdot t + 1,5 = 1,5$.

Donc $-4,9 \cdot t^2 + 6 \cdot t = 0$. Soit $t = 0$ [s], au départ, soit $t = \frac{6}{4,9} \approx 1,22$ [s].

Après 1,22 [s] l'objet se retrouve à une hauteur de 1,5 [m].

b) On cherche t tel que $h(t) = -4,9 \cdot t^2 + 6 \cdot t + 1,5 = 3,2$.

Donc $-4,9 \cdot t^2 + 6 \cdot t - 1,7 = 0$. $a = -4,9$; $b = 6$; $c = -1,7$ $\Delta = 2,68$.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{2,68}}{-9,8} = \begin{cases} 0,445 \\ 0,779 \end{cases}$$

L'objet se trouve à une hauteur de 3,2 [m] au temps $t = 0,455$ [s] à la montée et au temps $t = 0,779$ [s] à la descente.

c) la hauteur $h(t)$ représente une parabole concave en fonction du temps.

Son maximum se trouve en $t = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2 \cdot 4,9} = 0,612$ [s].

La hauteur maximale vaut : $h_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4a} = \frac{36 - 4 \cdot (-4,9) \cdot 1,5}{4 \cdot 4,9} = 3,34$ [m].