

- ① Notons x la longueur de la base, y la longueur de la hauteur et A l'aire du rectangle.

L'énoncé nous dit que :

$$(x + 8) \cdot (y + 5) = A + 180 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$(x + 3) \cdot (y - 4) = A - 30 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$x \cdot y = A$$

En développant et substituant A par $x \cdot y$ on obtient :

$$x \cdot y + 8 \cdot y + 5 \cdot x + 40 = x \cdot y + 180$$

$$x \cdot y + 3 \cdot y - 4 \cdot x - 12 = x \cdot y - 30$$

En simplifiant, on obtient le système :
$$\begin{cases} 5x + 8y = 140 \\ -4x + 3y = -18 \end{cases}$$

En multipliant la première égalité par 4 et la deuxième par 5, on obtient :
$$\begin{cases} 20x + 32y = 560 \\ -20x + 15y = -90 \end{cases}$$

En additionnant : $47y = 470$, donc

$$y = 10 \text{ [cm]} \text{ et } 5x + 8 \cdot 10 = 140, \quad 5x = 60, \quad x = 12 \text{ [cm]}$$

Vérifiez votre solution !!! $(12 + 8) \cdot (10 + 5) = 300 = 120 + 180$ et $(12 + 3) \cdot (10 - 4) = 90 = 120 - 30$

Le rectangle mesure 12 centimètres de longueur et 10 centimètres de hauteur.

- ② Notons x le premier nombre, y le second nombre.

L'énoncé nous dit que :

$$y = 2 \cdot x \text{ et}$$

$$x \cdot y = (x + y) / 2$$

On substitue $y = 2 \cdot x$ dans la deuxième équation : $2 \cdot x^2 = (x + 2 \cdot x) / 2$

$$\text{Donc } 4 \cdot x^2 = 3 \cdot x; \quad 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x = 0$$

Par **factorisation** on obtient : $x \cdot (4x - 3) = 0$

Donc soit $x = 0$, soit $x = 3 / 4$.

Il y a deux solutions. Soit les deux nombres sont nuls, soit le premier vaut $3 / 4$ et l'autre $3 / 2$.

Vérifiez vos solutions !!!

- ③ Notons x et y les longueurs deux cathètes et c la longueur de l'hypoténuse.

$$\text{Pythagore} \Rightarrow x^2 + y^2 = c^2 = 1301 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$x \cdot y / 2 = \text{aire} = 325 \text{ [m}^2\text{]}$$

On substitue $y = 650 / x$ dans la première équation : $x^2 + (650 / x)^2 = 1301$

On multiplie par x^2 des deux côtés : $x^4 + 650^2 = 1301 x^2$

On obtient l'équation bicarrée : $x^4 - 1301 x^2 + 650^2 = 0$

Elle peut se résoudre par Viète, en prenant x^2 comme inconnue.

$$a = 1; \quad b = -1301; \quad c = 650^2.$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1301^2 - 4 \cdot 1 \cdot 650^2 = 2601 = 51^2$$

$$\text{Donc } x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1301 \pm 51}{2} = \begin{cases} 676 \\ 625 \end{cases}$$

Il y a quatre solutions, $x = -26$; $x = -25$; $x = 25$ ($y = 26$); $x = 26$ ($y = 25$)

Mais les solutions négatives ne correspondent pas à des longueurs et les deux autres solutions sont symétriques. Donc il n'y a qu'une seule solution, les cathètes mesurent 25 et 26 mètres.

Vérifiez votre solution !!!

- ④ Notons x le premier nombre, y le second nombre.

L'énoncé nous dit que :

$$y = x + 1 \quad \text{et}$$

$$x^2 + y^2 = 545$$

On substitue $y = x + 1$ dans la deuxième équation : $x^2 + (x + 1)^2 = 545$.

On développe : $2 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 = 545$; $2x^2 + 2x - 544 = 0$

On simplifie par 2 : $x^2 + x - 272 = 0$

Par **factorisation** on obtient : $(x - 16) \cdot (x + 17) = 0$

On peut aussi utiliser Viète :

$$a = 1 ; b = 1 ; c = -272.$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1 + 4 \cdot 272 = 1089 = 33^2$$

$$\text{Donc } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 33}{2} = \begin{cases} -17 \\ 16 \end{cases} \quad \text{on retrouve les même solutions.}$$

Il y a deux solutions :

Soit le premier nombre est -17 et le second est -16 ,

soit le premier nombre est 16 et le second est 17 .

Vérifiez vos solutions !!!

- ⑤ Notons x le premier nombre, $x + 1 =$ le second nombre et $x + 2 =$ le troisième nombre.

L'énoncé nous dit que :

$$x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) = 21 \cdot (x + (x + 1) + (x + 2)) = 21 \cdot (3x + 3) = 63x + 63$$

Développer est une très mauvaise idée : $x^3 + 3x^2 + 2x = 63x + 63$

On regroupe : $x^3 + 3x^2 - 61x - 63 = 0$ Ici, il est difficile de trouver le résultat.

Factoriser permet de résoudre le problème : $x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) = 63 \cdot (x + 1)$

Soit $x = -1$, soit on simplifie pour obtenir : $x \cdot (x + 2) = 63$, donc $x^2 + 2x - 63 = 0$ etc.

Il est plus futé de rendre le problème symétrique :

Notons $y - 1$ le premier nombre, $y =$ le second nombre et $y + 1 =$ le troisième nombre.

L'énoncé nous dit que :

$$(y - 1) \cdot y \cdot (y + 1) = 21 \cdot ((y - 1) + y + (y + 1)) = 21 \cdot (3y) = 63y$$

On développe : $y \cdot (y^2 - 1) = 63y$

Cette équation est beaucoup plus simple à résoudre.

Soit $y = 0$, soit on simplifie par y .

$$y^2 - 1 = 63 ; y^2 = 64 ; \text{ donc } y = 8 \text{ ou } y = -8$$

Il y a trois solutions : les trois nombres sont soit $(-9 ; -8 ; -7)$ soit $(-1 ; 0 ; 1)$ soit $(7 ; 8 ; 9)$

Vérifiez vos solutions !!!

- ⑥ Notons x le nombre cherché.

L'énoncé nous dit que :

$$x + 2 \cdot \sqrt{x} = 48$$

Il y a deux manières de résoudre ce problème.

Première résolution : $2 \cdot \sqrt{x} = 48 - x$ mis au carré : $4 \cdot x = 48^2 - 2 \cdot 48 \cdot x + x^2$

Ceci mène à l'équation du second degré : $x^2 - 100 \cdot x + 48^2 = 0$ $\Delta = 100^2 - 4 \cdot 1 \cdot 48^2 = 784 = 28^2$

$x = (100 \pm 28) / 2$, $x = 36$ ou $x = 64$. En vérifiant, on voit que $x = 64$ n'est pas une bonne solution.

Deuxième résolution, plus simple : On pose $y = \sqrt{x}$

L'équation devient : $y^2 + 2y - 48 = 0$ $\Delta = 4 + 4 \cdot 1 \cdot 48 = 196 = 14^2$

$y = (-2 \pm 14) / 2$, $y = 6$ ou $y = -8$, qui n'est pas une bonne solution car $y = \sqrt{x}$ doit être ≥ 0 .

Il y a une seule solution. Le nombre cherché égale $x = y^2 = 36$.

En mettant les deux côtés d'une égalité au carré, on rajoute parfois des fausses solutions. Ceci montre l'importance de : **"Vérifiez vos solutions !!!"**

7 Notons x le nombre cherché.

L'énoncé nous dit que : $\frac{5x-24}{6} + 13 = x$

On multiplie par 6 des deux côtés de l'égalité : $5x - 24 + 78 = 6x$

On réduit : $54 = x$

Il y a une seule solution. Le nombre x cherché égale 54.

Vérifiez votre solution

8 Notons x/y le quotient cherché.

L'énoncé nous dit que : $\frac{x}{y} = \frac{x+15}{y+18}$ et $3 \cdot \frac{x}{y} = \frac{x+55}{y+6}$

On multiplie la première égalité par $y \cdot (y+18)$ pour éliminer les dénominateurs.

Elle devient : $x \cdot (y+18) = y \cdot (x+15)$

On multiplie la deuxième égalité par $y \cdot (y+6)$ pour éliminer les dénominateurs.

Elle devient : $3x \cdot (y+6) = y \cdot (x+55)$

On développe les deux égalités : $x \cdot y + x \cdot 18 = y \cdot x + y \cdot 15$ et $3x \cdot y + 3x \cdot 6 = y \cdot x + y \cdot 55$

On réduit : $18x = 15y$ et $2xy + 18x = 55y$

On substitue les $x = 15y / 18 = 5y / 6$ de la première égalité dans la deuxième : $\frac{10y^2}{6} + 15y = 55y$

On réduit cette nouvelle équation : $\frac{10y^2}{6} = 40y$, donc $10y^2 - 240y = 0$

On simplifie et factorise : $y \cdot (y - 24) = 0$

La solution $y = 0$ doit être exclue, car y est le dénominateur d'un quotient.

$y = 24$ et $x = 5 \cdot 24 / 6 = 20$.

Le quotient cherché est : $x / y = 20 / 24$

9 Notons x le chiffre des unités et y le chiffre des dizaines. Donc le nombre cherché s'écrit : $x + 10y$.

L'énoncé nous dit que :

$x + y = 12$

$(x + 10y)^2 + 48 = (y + 10x)^2 / 3$ (le nombre renversé égale : $y + 10x$)

On substitue $y = 12 - x$ dans la deuxième équation : $(x + 10 \cdot (12 - x))^2 + 48 = (12 - x + 10x)^2 / 3$.

On développe : $(120 - 9x)^2 + 48 = (12 + 9x)^2 / 3$.

On développe plus : $120^2 - 2160x + 81x^2 + 48 = (144 + 216x + 81x^2) / 3$.

On simplifie : $120^2 - 2160x + 81x^2 + 48 = 48 + 72x + 27x^2$.

On simplifie : $54x^2 - 2232x + 120^2 = 0$.

On simplifie par 18 : $3x^2 - 124x + 800 = 0$. (cette étape n'est pas indispensable, mais simplifie un peu)

On peut aussi utiliser Viète :

$a = 3$; $b = -124$; $c = 800$.

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 124^2 - 4 \cdot 3 \cdot 800 = 5776 = 76^2$

Donc $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{124 \pm 76}{6} = \begin{cases} 100/3 \\ 8 \end{cases}$ Comme x doit être un chiffre, seule la solution $x = 8$ est

valable. $y = 12 - x = 4$. Le nombre cherché est : 48.

Vérifiez votre solution, c'est particulièrement facile !!!

10) Notons x la somme partagée, y la somme reçue par chacun.

L'énoncé nous dit que :

L'aîné reçoit : $y = x / 10 + 100$

Le second reçoit : $y = (x - y) / 10 + 200$

Le troisième reçoit : $y = (x - 2y) / 10 + 300$

Le quatrième reçoit : $y = (x - 3y) / 10 + 400$

etc.

On déduit des équations précédentes que :

$$10y = x + 1000$$

$$11y = x + 2000$$

$$12y = x + 3000$$

etc.

En faisant la différence de deux équations, on obtient : $y = 1000$. Donc $x = 9000$

Chacun reçoit une somme de 1000 francs, la somme partagée est de 9000 francs.

Il y a 9 enfants.

D'autres méthodes de résolution existent, mais elles demandent plus de calculs.

11) Notons x le chiffre des unités, y le chiffre des dizaines et z le chiffre des centaines.

Donc le nombre cherché s'écrit : $x + 10y + 100z$.

L'énoncé nous dit que :

1) $x + y + z = 18$

2) $y = (4/5) \cdot (x + z)$

3) $x + 10y + 100z = 100x + 10y + z + 396$

De 1), on tire que : $x + z = 18 - y$, substitué dans 2) donne : $y = (4/5) \cdot (18 - y)$, donc $y = 8$

De 3), on tire que : 3) $-99x + 99z = 396$, donc $-x + z = 4$.

Additionné à 1), on obtient : $2z = 18 - y + 4 = 14$, donc $z = 7$.

Finalement : $x = 18 - z - y = 18 - 7 - 8 = 3$.

Le nombre est donc 783.

On vérifie facilement que c'est la bonne réponse.

12) Notons x le chiffre des unités, y le chiffre des dizaines et z le chiffre des centaines.

Donc le nombre cherché s'écrit : $x + 10y + 100z$.

L'énoncé nous dit que :

1) $x + y + z = 16$ $\Leftrightarrow x + z = 16 - y$

2) $100x + 10y + z + x + 10y + 100z = 1211$ $\Leftrightarrow 101(x + z) + 20y = 1211$

3) $100x + 10y + z - x - 10y - 100z = 297$ $\Leftrightarrow 99x - 99z = 297$ $\Leftrightarrow x - z = 3$

De 1), on tire que : $x + z = 16 - y$, substitué dans 2) donne : $101 \cdot (16 - y) + 20y = 1211$, donc $y = 5$

De 3), on tire que : 3) $x - z = 3$.

Additionné à 1), on obtient : $2x = 16 - y + 3 = 14$, donc $x = 7$.

Finalement : $z = 16 - x - y = 16 - 7 - 5 = 4$.

Le nombre est donc 457.

On vérifie facilement que c'est la bonne réponse.
